УДК 519.71

Доопределение системы с переменной структурой в областях переключения функции управления

© В. И. Сафонкин[1]

Аннотация. В статье изучение системы с переменной структурой строится на замене исходной системы последовательностью систем, в каждой из которых управляющая функция представлена последовательностью равномерно ограниченных функций u^{ν} , $\nu = 1, 2, ...$, принадлежащих множеству $U(t, x)$ предельных значений функции управления.

Ключевые слова: системы с переменной структурой, дифференциальные включения, управление

1. Введение

Различные подходы изучения поведения систем с переменной структурой требуют соответствующего доопределения моделей реальных систем как в достаточно малой окрестности многообразий разрыва управляющей функции, так и на самих этих многообразиях. Каждый вид принимаемого доопределения диктуется или существующим режимом поведения реальной системы, или тем, который мы хотели бы синтезировать в модели. Существующие методы доопределения и используемые в исследовании систем, чаще всего базируются на предположении «мгновенного» переключения управляющего органа в реальных системах, что, как известно, не наблюдается в реальных системах.

Такой подход позволяет доопределить систему в достаточно малой окрестности многообразий переключения и тем самым установить условия перехода траекторий из одной области однозначности в смежную область, что оказывается чрезвычайно важным при организации «скользящих» режимов и других режимов в областях запаздывания срабатывания управляющего органа.

Известно, что обобщенной моделью систем с переменной структурой является система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u(t, x)), \tag{1.1}$$

где $x \in R^n$, $f(t, x, u)$ - непрерывная по совокупности аргументов функция, управляющая функция $u(t, x), u \in \Re^m$ претерпевает разрыв первого рода на некоторых поверхностях $S_j \quad j = 1, 2, ..., l$ в пространстве переменных $(t, x) \in [t_0, T] \times R^n$, задаваемых уравнениями $s_j(x_1, ..., x_n) = 0$ и представляющие собой множества M_j меры нуль, состоящие из точек границ областей $s_j(x) > 0$ и $s_j(x) < 0$. Функция $f(t, x, u(t, x))$ является непрерывной вплоть до общей границы указанных областей.

Исследования систем вида (1.1) при заданном виде функции $u(t, x)$ в конечном счете сводятся к ее доопределению на многообразиях S_j . При этом приходится считаться с тем, что существующие методы доопределения (например [3],[7] и др.) приводят к излишне идеализированным моделям, которые не позволяют в полной мере оценить такие важные для практики параметры, как фактическая скорость процесса в режимах скольжения и в

[1] Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск

процессах близких к ним, а также определить допустимые размеры участков прошиваемости при обеспечении режима их форсирования и другие.

Учитывая реальные процессы в системах с переменной структурой при переходе траекторий из одной области однозначности в другую будем рассматривать функцию управления $u(t,x)$ в виде: $u(t,x) = u^+(t,x)$ при $s(x) > \delta$; $u(t,x) = u^-(t,x)$ при $s_j(x) < -\delta$, $s(x) = 0$. При этом предполагается то, что функции $u^+(t,x)$ и $u^-(t,x)$ непрерывны в областях определения и дифференцируемы по обеим переменным в областях однозначности. Из вида функции $u(t,x)$ следует, что в области $|s(x)| \le \delta$ сохраняется то значение, которое она имела накануне предыдущего переключения. Фактически во время неоднократного перехода решения $x(t:t_0,x_0)$ из одной области однозначности в другую имеем дело с двумя многообразиями переключения $S^+(t)$ и $S^-(t)$, на которых функция управления $u(t,x)$ претерпевает разрыв.

Прежде, чем сформулировать задачу, введем несколько понятий и определений. При этом наряду с многообразиями $S^+(s(x)-\delta=0)$ и $S^-(s(x)+\delta=0)$ будем рассматривать многообразие $S(s(x)=0)$, как многообразие меры нуль, каждая точка которого равно удалена от ближайших точек многообразий $S^+(t)$ и $S^-(t)$. Тогда эти многообразия будут являться границей $\delta-$ окрестности (S^δ) многообразия $S(s(x)=0)$. Через $(S^+)^\varepsilon$ и $(S^-)^\varepsilon$ обозначим ε- окрестность многообразий $S^+(t)$ и $S^-(t)$ соответственно, при этом будем полагать $\varepsilon < \delta$.

Наряду с системой (1.1) будем рассматривать последовательность систем

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u^\nu(t,x)), \quad \nu = 1,2,... \quad , \quad u^\nu(t,x) \in U(t,x) \quad , \tag{1.2}$$

где функции $u^\nu(t,x)$ равномерно ограничены в областях их определения. Множество $U(t,x)$ непустое, ограниченное и замкнутое. В работе [5] показана справедливость утверждения: если множество $U(t,x)$ в точках разрыва содержит все точки, предельные для любых последовательностей вида $\nu_k \in U(t_k,x_k)$, где $t_k \to t$, $k=1,2,....$, $(t,x)\in S^-$, то система (1.2) равносильна системе (1.1). Введенную в (1.2) последовательность непрерывных равномерно ограниченных функций

$$u^\nu(t,x) \in U(t,x), \quad \nu = 1,2,... \tag{1.3}$$

будем считать аппроксимирующей для функции $u(t,x)$ в ограниченной замкнутой области $G \in R^n$ при $t \in [t_0, t_0+T]$. Кроме того, каждая последовательность (1.3) сходится равномерно в областях однозначности $S^- < 0$ и $S^+ > 0$ к значению $u^-(t,x)$ или $u^+(t,x)$ соответственно. Тогда каждой конкретной последовательности (1.3) в системе (1.1) отвечает одно решение $x(t:t_0,x_0)$ из последовательности решений $x^\nu(t)$, $\nu=1,2,...$ Это решение будем представлять как частичный предел

$$x(t:t_0,x_0) = \lim x^\nu(t), \quad \nu = 1,2,... \quad , \quad (t_0,x_0) \in (S^-)^\varepsilon. \tag{1.4}$$

Множество пределов всех последовательностей обозначим через $X(t)$.

Определение 1.1. *За решение системы (1.1) можно принимать любую абсолютно непрерывную функцию $x(t) \in X(t)$.*

Определение 1.2. *Под $\delta-$ скользящим режимом системы (1.1) будем понимать такое ее поведение, когда траектории, пришедшие их $\varepsilon-$ окрестности многообразий $S^-(t)$ или $S^+(t)$, попадают в $\delta-$ окрестность многообразия S в момент $t=t_p$ и остаются в ней при $t>t_p$.*

В силу свойств функций $u^{\nu}(t,x)\in U(t,x)$ система (1.1), а, следовательно, и система (1.2), равносильны дифференциальному включению

$$\frac{dx}{dt}\in F(t,x,u(t,x)), \tag{1.5}$$

где $t\in[t_0,T]$, $x\in R^n$, $u\in U(t,x)$, $U\subset R^m$ - компакт.

При этом правая часть включения (1.5) должна удовлетворяет следующим условиям:
а) $F(t,x,u)$ - выпуклый компакт при всех $(t,x,u)\in[t_0,T]\times R^n\times R^m$;
б) многозначное отображение $(t,x,u)\mapsto F(t,x,u)$ непрерывно в точке $p\in R^n$ по совокупности аргументов в хаусдорфовой метрике;
в) множество $F(t,x,u)$ непустое, ограниченное и замкнутое для всех $(t,x,u)\in[t_0,T]\times R^n\times R^m$.

Налагаемые условия а), б) и в) вытекают из свойств функции $u^{\nu}(t,x)\in U(t,x)$ и из выполнения требований при любом доопределении системы (1.1).

2. Постановка задачи

Как известно, отличительной чертой систем с переменной структурой является то, что их поведение, как в областях однозначности, так и на многообразиях разрыва управляющей функции $u(t,x)$ существенно зависит от характера поведения регулирующего органа реальных систем в областях переложения "рулей" с текущего их положения на противоположное. В связи с этим важно так доопределить систему путем наложения условий на управление, выполнение которых обеспечивало бы переход траекторий из областей однозначности в область $|S(t,x)|\le\delta$ и сохранение в ней движения в течение определенного времени. Очевидно, обеспечение таких требований заключается в необходимости такого доопределения заданной функции управлений $u(t,x)$ и в определении такой топологии многообразий $S^{+}(t)$ и $S^{-}(t)$, которые способны были бы обеспечивать режим «скольжения» в соответствии с определением 1.2. (см. выше). Насколько важно обеспечение такого режима, вытекает из решения задачи стабилизации в реальных системах с переменной структурой [2],[6].

3. Решение задачи

Вначале дополнительно введем следующие определения.

О п р е д е л е н и е 3.1. *Множество векторов $\{\dot{x}(t)\}$, отвечающих последовательности решений $x^{\nu}(t:t_0,x_0)$, $(t_0,x_0)\in(S^{-})^{\varepsilon}$ и входящих в достаточно малую окрестность точки $(t_p,x_p)\in S^{-}$ из области $S^{-}<0$, будем называть входным конусом C_{bx} для последовательности $u^{\nu}\in U_{bx}\subset U$, $\nu=1,2,...$ Точку $(t_p,x_p)\in S^{-}$ будем называть точкой падения, которая является и общей вершиной как входного, так и выходного конуса. Образующими такого конуса являются векторы $f^{-}(t,x,u^{-}(t,x))=\lim f(t,x_*)$ $(x_*\to x_p,\ x_*\in S^{-}<0)$ и $f(t,x,u_{eq})$, где $u_{eq}\in U(t,x)$, получен при доопределении (например, [1]) системы (1.1) на многообразии $S^{-}(s(x)-\delta=0)$.*

О п р е д е л е н и е 3.2. *Множество векторов $\{\dot{x}(t)\}$, отвечающих подмножеству $U^{*}_{bx}\subset U_{bx}$, будем называть входным подконусом C^{*}_{bx} конуса C_{bx}.*

Разобьем интервал $[t_0,t_p]$ точками $t^{\nu}_k\in[t_0,t_p]$, $k=1,2,...$ $\nu=1,2,...$, где индекс ν соответствует управлению $u^{\nu}(t,x)$, а точки (t_k,x_k) лежат на графиках этого решения и принадлежат границе окрестности $(S^-)^{\varepsilon(x_k)}$. Таким образом, при $(t_k,x_k)\to(t_p,x_p)$ граница окрестности $(S^-)^{\varepsilon(x_k)}$ стремится к многообразию S^-.

Из выше приведенных определений следует, что все последовательности $x^\nu(t)$, отвечающие последовательностям $u^\nu(t,x)$, имеют свои предельные точки $(t_*^\nu,x_*^\nu)\in S^-$ в достаточно малой окрестности ($(S^-)^{\varepsilon(x)}, \rho(x,S^-)\le\varepsilon)$ точки $(t_p,x_p)\in S^-$.

Рассмотрим последовательность функций $\{x^\nu(t)\}$, отвечающих подмножеству U_{bx}^* и имеющих пределом точку. При этом оказывается справедливым следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Если подмножество $U_{bx}^*\subset U_{bx}$ образует сходящуюся последовательность $u_{bx}^\nu\in U_{bx}$, $\nu=1,2,,,$, то последовательность x_{bx}^ν, отвечающая подмножеству U_{bx}^*, имеет одну предельную точку.*

Доказательство. Так как все функции $u_{bx}^\nu\in U_{bx}$ равномерно ограничены при всех $t\in[t_k^\nu,t_p]$, а (t_k,x_k), $k=1,2,...$ - точки на границе множества $(S^-)^{\varepsilon(x_k)}$, то множество $\{\dot x^\nu\}$ также ограничено, то есть имеет место $|\dot x^\nu|\le\max F(t,x,\eta)=M$, $M-Const$. А это означает, что последовательность решений $x^\nu(t:t_k^\nu,x_k^\nu)$ ограничена, то есть имеет место $|x^\nu(t)|=|x_k^\nu|+M(t_p-t_k^\nu)$. Из чего следует, что каждая последовательность точек на траекториях, отвечающих множеству $U_{bx}^*\subset U_{bx}$, сходится к точке $(t_p,x_p)\in S^-$, т.е. $\lim x^\nu(t:t_k^\nu,x_k^\nu)=x(t_p)$, $\nu=1,2,...$ Заметим, что существование подмножества $U_{bx}^*\subset U_{bx}$ при этом обеспечивается выполнением условий теоремы Арцеля [7]. Что и требовалось доказать.

Теорема 3.2. *Если все сходящиеся последовательности $x^\nu(t:t_k^\nu,x_k^\nu)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на промежутке $[t_k^\nu,t_p]$, к тому же имеют один и тот же предел, то последовательности $u_{bx}^\nu\in U_{bx}$ сходятся.*

Доказательство. Действительно, из условий теоремы следует $|f(t,x,u(t,x))|\le M_1$. Кроме того $|\dot x^\nu|\le\max|F(t,x,u)|=M_1$, $|x^\nu(t)|\le|x_0|+M_1(t_p-t_0)$. Откуда следует $|u(t,x)|\le M$ при $t_0\le t\le t_p$. Предположим, что последовательность $u_{bx}^\nu\in U_{bx}$ не является сходящейся. Тогда из равномерно сходящейся последовательности $x^\nu(t)$ следует существование такого $M-Const$, что
имеет место $|x^\nu(t)\le|x_k^\nu||+M(t_p-t_k^\nu)$. Откуда имеем $\{|\dot x|\}\le\max|F(t,x,u_k^\nu(t,x)|=M_1$, $u_k^\nu\in U_{bx}^*$. Это означает, что семейство $f(t,x,u_k^\nu)$ является равномерно сходящимся. Если предположить, что последовательности $u_{bx}^\nu\in U_{bx}$ не являются сходящимися, то среди множества U_{bx}^* не существует предельной точки для данной последовательности. А это, согласно Теоремы 3.1., означает, что последовательность $x^\nu(t)$ не является сходящейся. Тогда мы приходим к противоречию. Теорема доказана.

Пусть уравнение

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,u_{eg}) \tag{3.1}$$

получено в процессе доопределения уравнения (1.1) на многообразии S^- одним из методов [7] , где u_{eg} соответствует вектору скорости , расположенному на касательной поверхности к этому многообразию в точке (t_p,x_p). Покажем, что при наложенных условиях на последовательность $u^\nu(t,x)$ и на отображение $F(t,x,u(t,x))$ в (1.3) при выполнении условий теорем 3.1. и 3.2., любое решение из множества $\{x^\nu(t)\}$ приближается при $t_k^\nu\to t_p$ к решению уравнения (3.1) на сколь угодно малую величину.

Теорема 3.3. *Пусть $x^\nu(t,t_*^\nu,x_*^\nu)$ - одно из решений множества $\{x^\nu(t)\}$, отвечающее функции $u^\nu(t)\in U_{bx}^*$, а $x^0(t:t_s^0,x_s^0)$ - решение уравнения (1.2) на многообразии*

S^-, $(t_s^0, x_s^0) \in S^-$. *Тогда, если для* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ *такие, что* $|t_*^\nu - t_s^\nu| < \delta$, $|x_*^\nu - x_s^0| < \delta$, $\rho(u_*^\nu, u_{eg}) < \delta$, *то каждое решение* $x^\nu(t)$ *отличается от решения* $x^0(t)$ *не более чем на величину* ε.

Доказательство. Поскольку функция $u(t,x)$ разрывная в точке $(t_p, x_p) \in S^-$ и непрерывна в точках $(t_k^\nu, x_k^\nu) \to (t_p, x_p)$ при $t_k^\nu \to t_p$, то найдется такая точка непрерывности, что $f^0(t_p, x_p, u_{eg}(t_p, x_p)) \in [f(t_*^\nu, x_*^\nu, u^\nu)]^\delta$, т.е. при достаточно больших $k = 1, 2, ...$ точки на графиках решений содержаться в ε_0, $\varepsilon_0 \in [0, \varepsilon]$ окрестности точки $(t_p, x_p) \in S^-$. Тогда согласно Теореме 3.1. можно утверждать, что при достаточно больших значениях k точки $f(t_k^\nu, x_k^\nu)$ будут содержаться в сколь угодно малой окрестности множества $F(t^\varepsilon, x^\varepsilon)$, точка $(t^\varepsilon, x^\varepsilon) \in (S^-)^\varepsilon$. Если это не так, то для некоторого ε_0 нашлась бы подпоследовательность точек $f(t_k^\nu, x_k^\nu)$ не содержащаяся в $(F(t^\varepsilon, x^\varepsilon))^{\varepsilon_0}$. Как известно [5], из этой подпоследовательности можно выбрать другую подпоследовательность $f(t_{k_j}^\nu, x_{k_j}^\nu)$, $(k = 1, 2, ..., j = 1, 2, ...)$, которая при $(t_{k_j}^\nu, x_{k_j}^\nu) \to (t_k^\nu, x_k^\nu)$, будет стремиться к некоторому пределу $\lambda \in F(t_k^\nu, x_k^\nu) \in F(t^\varepsilon, x^\varepsilon)$, что противоречит утверждению: подпоследовательность $f(t_k^\nu, x_k^\nu)$ не содержится в ε_0- окрестности множества $F(t^\varepsilon, x^\varepsilon)$. Что и требовалось доказать.

Поведение траекторий движений в окрестностях многообразий разрыва управляющей функции изображено на рисунке 3.1.

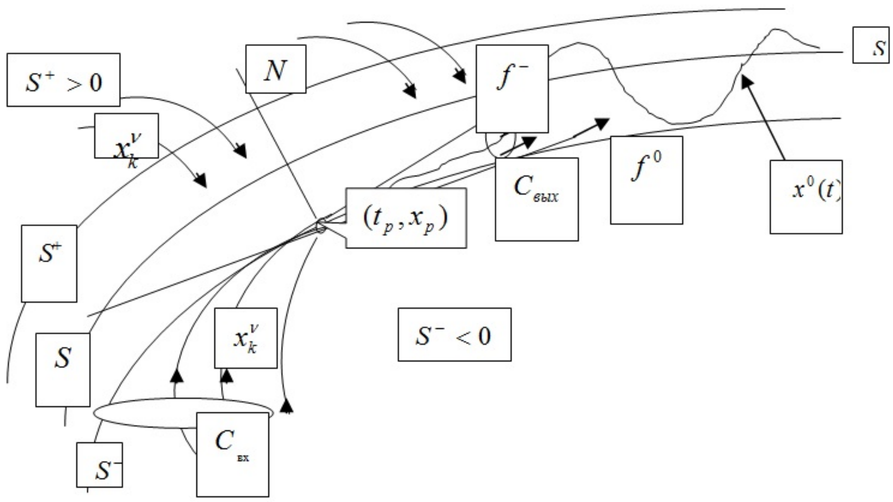

Рисунок **3.1**

Поведение траекторий движения в $\delta-$ окрестности многообразия переключения S.

Условие перехода траекторий из областей однозначности в область $\|S(x) \geq \delta\|$.

Постановка задачи требует указать условия, при выполнении которых траектория, пришедшая из области однозначности функции $u(t,x)$ в окрестность точки падения $(t_p, x_p) \in S^-$, сможет перейти в область $\|S^-(x)\| \leq \delta$.

Введем понятие вектора разрыва в нашем случае для точек поверхности S^-.

Определение 3.3. *Под вектором разрыва* $r(t,x)$ *предельного вектора* $f^-(t, x, u^-(t,x))$ *и вектора скорости скольжения* $f^0(t, x, u_{eg})$ *при* $(t_k^\nu, x_k^\nu) \to (t_p, x_p)$ *будем понимать*

$$r(t,x) = f^0(t,x) - f^-(t,x). \tag{3.2}$$

Очевидно, переход решений $x(t:t_k^\nu x_k^\nu)$ из окрестности точки $(t_p,x_p)\in S^-$ на многообразие S^- может произойти в том случае, когда для уравнения (1.1) или уравнения (1.2) имеет место правая единственность. В работе [7] показано, что это может произойти при условии, когда вектор $r(t,x)$ направлен по нормали N, проведенной к поверхности S^- в точке (t_p,x_p), в сторону этой поверхности, т.е. $r_N(t,x)\le 0$. $r_N(t,x)-$ проекция вектора на нормаль.

Следствие 3.1. *Если выполнены условия теорем 1 и 2, кроме того, для системы (1.1) имеет место правая единственность* [7], *а точка (t_p,x_p) не является точкой касания решения $x(t:t_k^\nu,x_k^\nu)$ с поверхностью S^- при $(t_k^\nu,x_k^\nu)\to(t_p,x_p)$, то траектории движения $x^\nu(t)$ из $\varepsilon-$ окрестности многообразия S^- либо переходят в область $\|S(x)\|\ge\delta$, либо будут принадлежать этому многообразию.*

Из выдвинутых условий и учитывая, что $f_N^0=0$ следует $|f^0(t,x,u_{eg})-f(t,x,u(t_k^\nu,x_k^\nu))|\le m|x_p-x_k^\nu|$, где $x_k^\nu\in(S^-)^\varepsilon$, $m-const$. Имея в виду то, что $f(t_k^\nu,x_k^\nu,u^\nu)\to f^0(t_p,x_pu_{eg})$ при $x_k^\nu\to x_p$, а также выполнение условий $S_t^-+S_xf^-\ne 0\quad(\dot S^-(x)\ne 0)$ и $f_N^-(t,x)>0$, точка (t_p,x_p) будет являться точкой "срыва" траектории движения из $\varepsilon-$окрестности многообразия S^- либо на саму поверхность S^-, либо в область $\|S(x)\|<\delta$.

Следует также заметить, что решения уравнения (1.1), достигнув поверхности S^-, не могут сойти опять в область $S^-<0$ в силу теоремы 3.3..

Замечание 3.1. *Выше рассмотрен случай перехода траекторий из области $S^-<0$ в область $\|S(x)\|<\delta$. Без каких либо изменений выше проведенные исследования переносятся на область $S^+>0$. Выполнение требований в обоих случаях и есть те условия, при которых траектории попадают вовнутрь области $\|S(x)\|<\delta$.*

Пример 3.1.

В качестве примера рассмотрим простейшую систему управления вида

$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=bf(\sigma),$ где $\quad f(\sigma)=m$ при $\quad\sigma>l_2,\quad f(\sigma)=-m$ при $\quad\sigma<-l_1,(*)$

где m,l_1,l_2 - положительные величины, $\sigma=c_1x_1+c_2x_2$, $c_1\cdot c_2<0$. Тогда многообразие S имеет вид $c_1x_1+c_2x_2=0$, а множества S^- и S^+- соответственно $c_1x_1+c_2x_2=-\delta$ и $c_1x_1+c_2x_2=\delta$. При соответствующем выборе значения коэффициента $b>0$ в областях однозначности $S^+>0$ и $S^-<0$ соответственно имеют место соотношения $\lim\dot S^+<0$ при $S^+\to 0\quad(S^+>0)$ и $\lim\dot S^->0$ при $S^-\to 0\quad(S^-<0)$. Это означает, что траектории из областей однозначности $S^+>0$ и $S^-<0$ из $\varepsilon-$ окрестностей многообразий S^+ и S^- направлены внутрь области $|\mathrm{S}|\le\delta$.

Формально доопределим систему (1.1) методом эквивалентного управления на многообразии S, потребовав $\dot S(x_1,x_2)\equiv 0$ в силу системы (*). Откуда $f(\sigma)=-\frac{1}{b}x_2$. Подставив выражение $f(\sigma)$ в систему, заключаем: на множестве S в области положительных значений x_2 координата x_1 изображающей точки при возрастании времени t возрастает, а в области $x_2<0$ - убывает.

Поскольку фазовыми траекториями системы в областях однозначности в силу системы $\frac{dx_1}{dx_2}=bx_2$ являются параболы, примыкающиеся к каждому из множеств S^- и S^+ не под нулевыми углами. Это означает, что траектории со временем попадают в достаточно малую их $\varepsilon-$окрестность. А при выполнении требований теоремы 3.3. к функции $f(\sigma)$ обеспечивается переход траекторий из областей однозначности S^- вовнутрь области $|\mathrm{S}|\le\delta$.

Таким образом, доопределение системы (1.1) с заданной функцией управления $u(t,x)$ на многообразиях S, S^-, S^+ и в их окрестностях показывает справедливость следующих выводов.

Выводы.

1. При выполнении условий, наложенных на правые части уравнений (1.1) и (1.2), траектории движений $x^\nu(t,x)$ из $\varepsilon-$ окрестности многообразия S^- попадают в сколь угодно малую ε_0- окрестность ($0<\varepsilon_0\le\varepsilon$) точки $(t_p,x_p)\in S^-$. К тому же, если точка падения (t_p,x_p) является точкой без контакта, т.е. $S_t+S_xf^-\ne 0$ (S_t,S_x- производные по соответствующим переменным), $r(t,x)\to 0$ при $t\to t_p$, то траектории движений либо переходят из области $S^-<0$ в область $S^->0$, либо остаются на многообразии $S^-(x)$.

2. Проведенные исследования в отношении $\varepsilon-$ окрестность S^- и полученные при этом результаты, без каких либо существенных изменений могут быть перенесены на окрестность многообразия $S^+(x)$. Как было отмечено ранее, полученные результаты могут иметь практическое значение при проведении исследований реальных систем с переменной структурой.

3. Наложенные условия на функцию управления $u(t,x)$ и правые части уравнений (1.1) и (1.2) согласуются с требованиями, свойствами и поведением исследуемых физических систем в зоне переключения органа управления.

4. Как известно, определение скорости в режимах скольжения является одной из важнейших вопросов, решающих на этапе внедрения результатов исследования в практику.

Наличие в регуляторе зон нечувствительности, как в нашем случае, приводит к тому, что после попадания траектории движения в область $|S(x)|\le\delta$ скорость изображающей точки может иметь две составляющих. Одна из этих составляющих определяет движение вдоль множества $S(t)$, другая – определяет колебания вдоль этого многообразия. В любом случае определение скорости движения в “скользящем” режиме согласно определения **??** выводит на рассмотрение случая, при котором движение в полосе $S(x)\le\delta$ происходит по синусоидальной кривой в окрестности $s(x)=0$ с амплитудой, не превосходящей значения δ. В связи с этим речь может идти об определении некоторой средней скорости. Рассматривая движение на четверти периода, когда изображающая точка по траектории $x_k^\nu(t)$ попадает в окрестность точки (t_p,x_p) из области $S^-<0$, далее продолжает свое дальнейшее движение в полосе $|S(x)|\le\delta$ под управлением $u(t_p,x_p)$ до попадания в окрестность множества S^+ в области $S>0$. В этом случае величина перемещения изображающей точки вдоль множества S будет определяться приближенно как произведение скорости изображающей точки $f(t,x,u^-(t,x))$ на время $t=\frac{\pi}{2}$ (период $T=2\pi$), за которое изображающая точка попадает в $\varepsilon-$ окрестность множества S^+. Вообще, время может быть определено из уравнения $2\delta=t\cdot(\nabla s\cdot f^-)$, где ∇s- градиент $s(x)$, f^-- предельное значение f при $x^\nu\to x_p$.

Если принять, что изображающая точка движется только вдоль касательной плоскости к одной из поверхностей S,S^- или S^+, то ее скорость будет определяться только вектором $f^0(t:t_p,x_p,u^-)$.

Таким образом, истинная скорость движения в скользящем режиме $\dot{x}^s$ будет находиться в интервале (f^-,f^0), т.е. $f^-\le\dot{x}^s\le f^0$.

Список литературы

1. Барбашин Е. А., Алимов Ю. И., “К теории релейных дифференциальных уравнений”, *Известия вузов, сер. Матем.*, **1** (1962), 3–13.

2. Барбашин Е. А., *Введение в теорию устойчивости*, Наука, РЖМат., 1967, 576 с.

3. Емельянов С. В., *Теория систем с переменной структурой*, Наука, М., 1970, 576 с.

4. Сафонкин В. И., "Асимптотика поведения решений систем с переменной структурой", *Труды Средневолжского математического общества*, **7**:1 (2005), 251–256.

5. Пятницкий Е. С., *Избранные труды (теория управления). Т.1.*, Физматлит, М., 2004.

6. Уткин В. И., *Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления.*, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, М., 1981.

7. Филиппов А. Ф., *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.*, Наука, М., 1985, 576 с.

Extending the definition of variable structure system in areas switching control function

© **V. I. Safonkin**[2]

Abstract. The article analyzes the system with variable structure is based on replacing the original system sequence of systems, each of which control function is represented by a sequence of uniformly bounded functions u^ν , $\nu = 1, 2, ...$, belonging to the set $U(t, x)$ limit values of control.

Key Words: variable structure system, differential inclusions, control

[2] Associate professor of Applied Mathematics, Differential Equations and theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk