УДК 517.9

О топологической сопряжённости 3-диффеоморфизмов с одной орбитой гетероклинического касания

© Т. М. Митрякова[1], О. В. Починка[2]

Аннотация. В настоящей работе рассматривается класс трёхмерных диффеоморфизмов, лежащих на границе множества градиентно-подобных систем и отличающихся от последних наличием не более, чем одной орбиты касания у пары двумерных сепаратрис. Доказывается, что для изучаемых диффеоморфизмов необходимым и достаточным условием топологической сопряжённости является совпадение классов эквивалентности их схем и модулей устойчивости, соответствующих орбитам касания.

Ключевые слова: топологическая сопряжённость, гетероклинические касания, модули устойчивости

Введение

Диффеоморфизмы Морса-Смейла являются математическими моделями процессов с регулярной динамикой. Начало их исследования восходит к классической работе А.А. Андронова и Л.С. Понтрягина [1], в которой было введено понятие грубости потока, заданного векторным полем, определенным в компактной части плоскости, ограниченной циклом без контакта. В начале 60-х годов прошлого века благодаря открытиям Д.В. Аносова [2] и С. Смейла [11] стало понятно, что потоки (каскады), заданные на многообразиях размерности три (два), могут обладать счетным множеством гиперболических периодических орбит. Это означало наличие хаотического поведения в процессах, описываемых динамическими системами такого вида. Поэтому грубые системы, обладающие регулярной динамикой, были выделены в отдельный класс систем Морса-Смейла. Эти системы интенсивно изучаются как с точки зрения топологической классификации, так и с точки зрения исследования бифуркаций, соответствующих переходу из одного класса топологической сопряженности к другому. Прежде всего к бифуркациям такого вида приводит наличие гетероклинических касаний устойчивых и неустойчивых многообразий периодических точек.

Очевидно, что нарушение условия трансверсальности гетероклинических пересечений седловых точек диффеоморфизма приводит к его негрубости. Более того, это приводит к возникновению непрерывных топологических инвариантов — *модулей топологической сопряженности* — и, следовательно, к существованию континуума несопряженных диффеоморфизмов с изоморфными графами и одинаковой геометрией гетероклинического пересечения.

Первым, кто обратил внимание на существование модулей топологической сопряженности, был Ж. Палис [10]. Он обнаружил, что такими модулями обладают уже двумерные диффеоморфизмы с негрубой гетероклинической траекторией, в точках которой инвариантные многообразия двух разных седловых неподвижных точек имеют одностороннее касание. Существенным продвижением в этом направлении явилась работа В. ди Мелу, С. Ж. ван Стрина [6], в которой были найдены необходимые и достаточные условия

[1] Доцент кафедры теории функций, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; tatiana.mitryakova@yandex.ru

[2] Профессор кафедры информационных систем и технологий, НИУ ВШЭ-НН, Нижний Новгород; olga-pochinka@yandex.ru

того, что диффеоморфизм ориентируемой поверхности имеет конечное число модулей топологической сопряженности, описывающих все классы топологической сопряженности, принадлежащие некоторой окрестности такого диффеоморфизма.

В 2010 г. в работе [7] Т.М. Митряковой и О.В. Починки была получена топологическая классификация содержательного класса диффеоморфизмов ориентируемой поверхности с конечным числом модулей топологической сопряжённости. Существенное отличие от уже упомянутой работы [6] заключается в приведении условий топологической сопряжённости систем не только для некоторой окрестности диффеоморфизмов данного класса, но и для "далёких" систем. Кроме того, в работе [8] описана реализация двумерных систем с гетероклиническими касаниями.

В случае многообразий размерности большей двух известно лишь несколько результатов. В работе Ш. Ньюхауса, Ж. Палиса и Ф. Такенса [9] приведено и доказано необходимое условие топологической сопряжённости двух диффеоморфизмов n-мерных многообразий, содержащих одну орбиту одностороннего гетероклинического касания. В работе Ж. Палиса и В. ди Мелу [5] рассмотрены диффеоморфизмы n-мерных многообразий с одной орбитой одностороннего гетероклинического касания и приведена классификация диффеоморфизмов в окрестности. В работе Е. А. Гринеса и О. В. Починки [4] доказано необходимое условие топологической сопряженности диффеоморфизмов, заданных на многообразиях размерности 3 и имеющих конечное число орбит гетероклинического касания двумерных инвариантных многообразий.

В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряжённости диффеоморфизмов трёхмерных многообразий не более, чем с одной орбитой касания двумерных сепаратрис.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м).

1. Формулировка результатов

В данной работе рассматривается класс Ψ диффеоморфизмов $f: M^3 \to M^3$, заданных на гладком трёхмерном замкнутом ориентируемом многообразии M^3, сохраняющих ориентацию и удовлетворяющих следующим условиям:

1) неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа неподвижных гиперболических точек, собственные значения которых положительны;

2) для различных седловых точек $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_f$ пересечение $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2}$ не пусто только в случае, когда $\dim\ W^s_{\sigma_1} = \dim\ W^u_{\sigma_2} = 2$, при этом оно является трансверсальным всюду, кроме, возможно, одной орбиты касания.

Пусть $f \in \Psi$. Для $i \in \{0,1,2,3\}$ обозначим через Ω_i подмножество Ω_f, состоящее из точек p таких, что $\dim\ W^u_p = i$. Положим $A_f = W^u_{\Omega_0 \cup \Omega_1}$, $R_f = W^s_{\Omega_2 \cup \Omega_3}$, $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$ и $\hat{V}_f = V_f / f$. Из результатов книги [3] следует, что множества A_f, R_f, V_f и $\hat{V}_f$ являются связными, $\hat{V}_f$ является гладким замкнутым 3-многообразием и естественная проекция $p_f : V_f \to \hat{V}_f$ является накрытием, индуцирующим эпиморфизм $\eta_f : \pi_1(\hat{V}_f) \to \mathbb{Z}$. Положим $\hat{\mathbb{W}}^s_f = \bigcup\limits_{p \in \Omega_1} \hat{W}^s_p$ и $\hat{\mathbb{W}}^u_f = \bigcup\limits_{p \in \Omega_2} \hat{W}^u_i$. Каждая компонента связности $\hat{T}$ множеств $\hat{\mathbb{W}}^s_f$ и $\hat{\mathbb{W}}^u_f$ является η_f-существенным двумерным тором на многообразии $(\hat{V}_f, \eta_f)$, то есть $\eta_f(j_{\hat{T}*}(\pi_1(\hat{T}))) \neq \{0\}$ для включения $j : \hat{T} \to \hat{V}_f$. Компоненты связности $\hat{T}^s \subset \hat{\mathbb{W}}^u_f$ и

$\hat{T}^u \subset \hat{\mathbb{W}}^u_f$ либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально, либо пересекаются нетрансверсально с нарушением условия трансверсальности пересечения в точности в одной точке.

Пусть σ – седловая точка диффеоморфизма $f \in \Psi$. Обозначим через $J_\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ линейный диффеоморфизм, определяемый жордановой формой линейной части диффеоморфизма f в окрестности точки σ. Точка $O(0,0,0)$ является седловой точкой диффеоморфизма J_σ и имеет J_σ-инвариантную окрестность U_{J_σ}.

Определение 1.1. *f-инвариантную окрестность U_σ седловой точки σ назовем C^1-линеаризующей, если существует C^1-диффеоморфизм $\psi_\sigma : U_\sigma \to U_{J_\sigma}$, сопрягающий диффеоморфизм $f\Big|_{U_\sigma}$ с диффеоморфизмом $J_\sigma\Big|_{U_{J_\sigma}}$.*

Согласно работе [4] у любой седловой точки σ диффеоморфизма $f \in \Psi$ существует линеаризующая окрестность.

Для диффеоморфизма f обозначим через $\mathcal{A}$ множество таких точек гетероклинического касания, которые образованы в результате касания двумерных инвариантных многообразий. Для любой точки $a \in \mathcal{A}$ обозначим через σ^s_a и σ^u_a седловые точки такие, что a принадлежит пересечению инвариантных многообразий $W^s_{\sigma^s_a}$ и $W^u_{\sigma^u_a}$ диффеоморфизма $f \in \Psi$. Важным является то, что у σ^s_a обязательно есть одномерное неустойчивое многообразие, равно как у σ^u_a есть одномерное устойчивое многообразие. Обозначим через μ_a и λ_a собственное число, соответствующее одномерному собственному направлению для $J_{\sigma^s_a}$ и $J_{\sigma^u_a}$ соответственно.

Для произвольной точки $a \in \mathcal{A}$ определим параметр Θ_a, где $\Theta_a = \frac{\ln \mu_a}{\ln \lambda_a}$. Доказательство следующего факта можно найти, например, в статьях [9] и [4].

Предложение 1.1. *Если диффеоморфизмы $f, f' \in \Psi$ топологически сопряжены посредством гомеоморфизма h такого, что $h(a) = a'$ для точки $a \in \mathcal{A}$, $h(\sigma^s_a) = \sigma^s_{a'}$, $h(\sigma^u_a) = \sigma^u_{a'}$, то $\Theta_a = \Theta_{a'}$.*

Положим $\hat{\mathcal{A}} = p_{_f}(\mathcal{A})$. Для $\hat{a} \in \hat{\mathcal{A}}$ выберем любую точку $a \in p^{-1}_{_f}(\hat{a})$ и положим $\Theta_{\hat{a}} = \Theta_a$. Заметим, что $\Theta_{\hat{a}}$ не зависит от выбора точки в множестве $p^{-1}_{_f}(\hat{a})$. Положим $\hat{C}_f = \{\Theta_{\hat{a}}, \hat{a} \in \hat{\mathcal{A}}\}$.

Определение 1.2. *Набор $S_f = (\hat{V}_f, \eta_{_f}, \hat{\mathbb{W}}^s_f, \hat{\mathbb{W}}^u_f, \hat{C}_f)$ назовем схемой диффеоморфизма $f \in \Psi$.*

Определение 1.3. *Схемы S_f и $S_{f'}$ диффеоморфизмов $f, f' \in \Psi$ назовем эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\hat{\varphi} : \hat{V}_f \to \hat{V}_{f'}$ со следующими свойствами:*

1) $\eta_{_f}([c]) = \eta_{_{f'}}\hat{\varphi}_*$;

2) $\hat{\varphi}(\hat{\mathbb{W}}^s_f) = \hat{\mathbb{W}}^s_{f'}$ и $\hat{\varphi}(\hat{\mathbb{W}}^u_f) = \hat{\mathbb{W}}^u_{f'}$;

3) $\Theta_{\hat{a}} = \Theta_{\hat{\varphi}(\hat{a})}$ для $\Theta_{\hat{a}} \in \hat{C}_f$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Диффеоморфизмы $f, f' \in \Psi$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда схемы S_f и $S_{f'}$ эквивалентны.*

Список литературы

1. А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, "Грубые системы", *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 247–250.

2. Д. В. Аносов, "Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны", *Докл. АН СССР*, **145**:4 (1962), 707–709.

3. В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, Институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 438 с.

4. E. A. Grines, O. V. Pochinka, "Necessary conditions of topological conjugacy for three-dimensional diffeomorphisms with heteroclinic tangencies", *Dinamicheskie Sistemy*, **3(31)**:3-4 (2013), 185–200.

5. W. De Melo, J. Palis, "Moduli of stability for diffeomorphisms", *Lecture Notes in Mathematics*, **819** (1980), 318–339.

6. W. De Melo, S. J. Strien, "Diffeomorphisms on surfaces with a finite number of moduli", *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, **7** (1987), 415–462.

7. Т. М. Митрякова, О. В. Починка, "К вопросу о классификации диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей топологической сопряженности", *Нелинейная динам.*, **6**:1 (2010), 91-105.

8. Т. М. Митрякова, О. В. Починка, "Реализация каскадов с конечным числом модулей топологической сопряженности на поверхностях", *Мат. зам.*, **93**:6 (2013), 902-919.

9. S. Newhouse, J. Palis, F. Takens, "Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms", *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, **57**:1 (1983), 5–71.

10. J. Palis, "A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability", *Asterisque*, **51** (1978), 335–346.

11. С. Смейл, "Структурно устойчивый дифференцируемый гомеоморфизм с бесконечным числом периодических точек", *Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям*, **2** (1963), 365–366.

On topological conjugacy of 3-manifolds diffeomorphisms with one orbit of heteroclinic tangency

© T. M. Mitryakova[3], O. V. Pochinka[4]

Abstract. In present paper we consider a class of 3-manifolds' diffeomorphisms lying on the border of a set of gradient-like systems and different from the last not more than one tangencies' orbits of two-dimensional separatrices. It is proved that for studying diffeomorphisms necessary and sufficient condition for topological conjugacy of two diffeomorphisms from this class is a coincidence of classes of equivalence of their schemes and moduli of stability corresponding tangencies' orbits.
Key Words: Topological conjugacy, heteroclinic tangencies, moduli of stability.

[3] Docent of theory function chair of Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky; tatiana.mitryakova@yandex.ru

[4] Professor of Information Systems and Technology chair of National Research University Higher School of Economics; olga-pochinka@yandex.ru