УДК 517.9

Отношение порядка в системах авторепродукции

© **О. А. Кузенков[1], Е. А. Рябова[2]**

Аннотация. Вводится порядок предпочтения на системе измеримых множеств, исходя из некоторого заданного процесса динамики положительной меры. Определяются ограничения на ресурс управления, при которых в исследуемой системе авторепродукции можно получить порядок, удовлетворяющий заранее заданным требованиям. Рассматривается решение задачи для управляемой обобщенной репликаторной системы с распределенными параметрами.
Ключевые слова: самовоспроизводящиеся системы, динамика меры, отношение строгого порядка, оптимальное управление

1. Введение

Работа посвящена изучению предельного поведения решения в управляемых системах авторепродукции (наследования). Процессы авторепродукции широко распространены в окружающей действительности, наблюдаются в физических, информационных [1], биологических системах [2], [**??**], [4], [5].

В [6] исследовалось поведение систем авторепродукции в общем виде. В работе [7] была предложена обобщенная модель таких систем в виде уравнения с наследованием, являющегося частным случаем уравнения динамики меры. Правая часть уравнения с наследованием определяется как произведение непрерывной функции и меры. В случае, когда мера является абсолютно непрерывной, это уравнение сводится к интегро-дифференциальному. В работах [8], [9] был рассмотрен ряд интегро-дифференциальных уравнений и уравнений в банаховом пространстве, которые могут описывать модели авторепродукции. Эти уравнения являются обобщением репликаторных систем на случай распределенных параметров [10], [11], [12]. Указанные уравнения представляют основу для создания современной общей математической теории отбора [13], [14], [15].

Исследование уравнений с наследованием показывает, что их решения обладают важным свойством сужения носителя меры или, что то же самое, локализации меры с течением времени на некоторых измеримых подмножествах [16], [17]. Таким образом, имеет место неравноценность в системе измеримых подмножеств с точки зрения предельного поведения решения. Это свойство получило название теоремы об отборе, оно имеет ключевое значение для моделирования процессов отбора в самых разных предметных областях. Благодаря ему создается возможность с помощью предельных характеристик решения устанавливать порядок предпочтительности для измеримых подмножеств в соответствующем измеримом пространстве. Такой способ установления порядка обобщает подход, использованный в [18], [19] для установления порядка предпочтительности в сосредоточенной системе с помощью предельных соотношений между фазовыми координатами.

Если на систему осуществляется внешнее управление, то при определенных условиях можно подобрать его так, чтобы полученный в результате порядок удовлетворял заранее

[1] Доцент кафедры численного и функционального анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; kuzenkov_o@mail.ru

[2] Старший преподаватель кафедры численного и функционального анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; riabova-ea@rambler.ru

заданным требованиям. В статье определяются условия на ресурс управления, при котором выбор такого управления возможен для одного класса уравнений с наследованием. Рассмотрен ряд примеров. Реализуемая в статье методика являются обобщением методики работы, успешно примененной для сосредоточенных систем [18].

2. Отношение строгого порядка на системе измеримых множеств

Пусть X – компактное топологическое пространство, Σ – борелевская σ-алгебра в нем; $\mathrm{frm}(X)$ – банахово пространство мер Радона (конечных регулярных борелевских мер на X с нормой меры μ, равной ее вариации на множестве X: $\|\mu\| = |\mu|(X)$ [20]); $\mathrm{frm}_+(X)$ – семейство положительных мер на X из $\mathrm{frm}(X)$; $\mathrm{frm}(X, \mu_0)$ – семейство мер из $\mathrm{frm}(X)$, абсолютно непрерывных относительно некоторой меры $\mu_0 \in \mathrm{frm}_+(X)$, $\mathbf{L}_1(X, \mu_0)$ – банахово пространство всех суммируемых по Лебегу функций по мере μ_0 с нормой $\|w\| = \int_X w\,\mu_0\,(dx)$, $\mathbf{L}_\infty(X)$ – пространство ограниченных измеримых функций; $\mathbf{C}(X)$ – пространство непрерывных функций; $\mathbb{R}_+$ – множество неотрицательных действительных чисел.

Рассмотрим задачу Коши в банаховом пространстве $\mathrm{frm}(X)$: найти непрерывную по t при $t \geq 0$, дифференцируемую по t при $t > 0$ функцию $\mu[t]$, удовлетворяющую уравнению и начальному условию

$$\mu'_t = F[\mu], \quad \mu[0] = \mu_0, \tag{2.1}$$

где $\mu[t] : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{frm}(X)$, $\mu_0 \in \mathrm{frm}(X)$, оператор $F[\mu] : \mathrm{frm}(X) \to \mathrm{frm}(X)$ удовлетворяет в некоторой окрестности меры μ_0 условию Липшица.

Введем следующие обозначения: $\mu[t](A)$ – мера μ множества A в момент времени t, $F[\mu](A)$ – значение на множестве A результата действия оператора F на меру μ.

Известно [21], что, если для фиксированного измеримого множества A оператор F подчиняется условию

$$F[\mu]\,(A) \geq 0 \quad \text{при} \quad \mu\,(A) = 0,$$

то при $\mu_0\,(A) \geq 0$ решение задачи Коши (2.1) удовлетворяет неравенству $\mu\,[t]\,(A) \geq 0$ во все моменты времени $t > 0$. Если это условие и неравенство $\mu_0\,(A) \geq 0$ выполняются для любого измеримого множества A, то решение задачи Коши (2.1) остается в семействе $\mathrm{frm}_+(X)$. Если же для фиксированного измеримого множества A выполняется равенство

$$F[\mu]\,(A) = 0 \quad \text{при} \quad \mu\,(A) = 0, \tag{2.2}$$

то при $\mu_0\,(A) > 0$ решение задачи Коши (2.1) удовлетворяет неравенству $\mu\,[t]\,(A) > 0$ для всех $t > 0$. Кроме того, если $\mu_0(A) = 0$, то $\mu[t](A) = 0$ для любого $t > 0$.

Следовательно, в случае (2.2) меры μ_0 и $\mu[t]$ взаимно абсолютно непрерывны. Тогда ограниченные измеримые функции $b(x)$ и $g(x)$, эквивалентные в мере μ_0, будут эквивалентны в любой мере $\mu[t]$, и существенная точная верхняя грань функции $b(x)$ на некотором измеримом множестве $A \subset X$ относительно меры μ_0 [22]:

$$\operatorname*{vraisup}_{x \in A} b(x) \triangleq \inf_{\forall g \sim b} \left(\sup_{x \in A} g(x) \right)$$

не изменится при переходе от меры μ_0 к любой мере $\mu[t]$. То же справедливо и для существенной точной нижней грани функции $b(x)$ на множестве A.

Известно [20], что пространство $\mathrm{frm}(X)$ является сопряженным к $\mathbf{C}(X)$: $\mathrm{frm}\,(X) = \mathbf{C}^*(X)$, то есть представляет собой совокупность линейных непрерывных функционалов над множеством непрерывных функций. Пусть $k(x) \in \mathbf{L}_\infty(X)$ – измеримая ограниченная функция на X, $\mu \in \mathrm{frm}(X)$, тогда для любой непрерывной функции $v(x) \in \mathbf{C}(X)$ определен интеграл Лебега $\int_X k(x)v(x)\mu(dx)$, который каждому элементу $v(x) \in \mathbf{C}(X)$ ставит в соответствие действительное число, тем самым этот интеграл задает линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathbf{C}(X)$. Следовательно, существует элемент из $\mathrm{frm}(X)$, который соответствует этому функционалу. Будем обозначать этот элемент $k\mu$ и называть его произведением функции $k(x)$ на меру μ [7]. Очевидно, для любого измеримого множества имеет место тождество

$$\int_A v(x)[k\mu](dx) \equiv \int_A k(x)v(x)\mu(dx).$$

Пусть оператор задается в виде

$$F\,[\mu] = k\,[\mu]\,\mu, \tag{2.3}$$

где оператор $k\,[\mu]\ :\ \mathrm{frm}\,(X) \to \mathbf{L}_\infty\,(X)$, $k\,[\mu]\,\mu$ – произведение меры μ на функцию k. Уравнение (2.1), (2.3) называется уравнением с наследованием. Нетрудно видеть, что оператор (2.3) удовлетворяет условию (2.2).

В частности оператор $k\,[\mu]$ может иметь следующий вид:

$$k\,[\mu]\,(x) = Q\,[\mu]\,b\,(x) + P\,[\mu]\,, \tag{2.4}$$

где $Q[\mu]\,, P[\mu]$ – ограниченные непрерывные функционалы, определенные на $\mathrm{frm}_+(X)$, $b\,(x)$ – ограниченная измеримая функция.

Пусть поставлена задача Коши (2.1), где μ_0 – положительная мера, и решение этой задачи на некоторых измеримых подмножествах A, B множества X не обращается в ноль: $\mu[t](A)>0$, $\mu[t](B) > 0$. Введем на парах (A, B) элементов множества Σ отношение строгого порядка следующим образом.

Определение 2.1. *Будем считать, что подмножество A находится в отношении строгого предпочтения с подмножеством B:*

$$A \succ B, \quad \textit{если} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\mu[t](B)}{\mu[t](A)} = 0 \tag{2.5}$$

вдоль решения $\mu[t]$ задачи (2.1)*; и будем считать, что подмножество A находится в отношении нестрогого предпочтения с подмножеством B :*

$$A \succcurlyeq B, \quad \textit{если} \quad A \succ B \quad \textit{или} \quad A = B.$$

Нетрудно убедиться, что введенное отношение нестрогого предпочтения удовлетворяет аксиомам частичного порядка: 1) рефлексивности $A \succcurlyeq A$; 2) транзитивности: $A \succcurlyeq B$ и $B \succcurlyeq C$, то $A \succcurlyeq C$; 3) антисимметричности: если $A \succcurlyeq B$ и $B \succcurlyeq A$, то $A = B$.

Заметим, что если в задаче (2.1) изменить начальные условия μ_0, то порядок, введенный отношением нестрогого предпочтения, вообще говоря, изменится.

Лемма 2.1. *Если для измеримого множества $\Omega \subset X$, $0 < \mu_0(\Omega) < \mu_0(X)$, найдется подмножество $\omega \subset \Omega$, $\mu_0(\omega) > 0$, для которого выполняется неравенство*

$$\operatorname*{vraiinf}_{x\in\omega} b(x) > \operatorname*{vraisup}_{x\in\overline{\Omega}} b(x), \tag{2.6}$$

то $\omega \succ \overline{\Omega}$ и множество Ω находится в отношении строгого предпочтения со своим дополнением $\left(\Omega \succ \overline{\Omega}\right)$ относительно уравнения динамики меры (2.1),(2.3),(2.4)*, в котором функционал $Q[\mu]$ ограничен снизу положительной константой q.*

3. Система динамики положительной меры: предельные возможности управления

Введенный порядок предпочтения в системе измеримых подмножеств целиком зависит от системы динамики меры. Он может быть изменен, если на систему оказывается какое-либо внешнее воздействие – управление. Можно поставить задачу изменения порядка с помощью допустимого управления.

В качестве примера рассмотрим уравнение с наследованием вида (2.1),(2.3),(2.4), описывающее управляемую динамику положительной меры Радона:

$$\mu'_t = (Q[\mu, u](b+u) + P[\mu, u])\,\mu \tag{3.1}$$

с начальным условием

$$\mu\,[0] = \mu_0, \quad \mu_0 \geq 0. \tag{3.2}$$

Здесь управляющая функция $u = u(t,x)$ – измеримая, удовлетворяющая ограничению

$$|u(t,x)| \leq c, \tag{3.3}$$

в котором c – некоторая константа; функционалы Q, P определенные на декартовом произведении $\mathrm{frm}_+(X) \times \mathbf{L}_\infty(X)$ ограничены и непрерывны, $Q[\mu,u] \geq q > 0$, где q – положительная константа; $b = b(x)$ принадлежит пространству $\mathbf{L}_\infty(X)$.

Для конечномерного случая уравнение в форме (3.1) рассматривалось в [18].

Предполагается, что задача (3.1), (3.2) имеет единственное решение $\mu[t]$, бесконечно продолжаемое по переменной t для любого допустимого управления u.

Пусть решение задачи Коши $\mu\,[t]\,(X)$ является равномерно ограниченной мерой на множестве X: $0 < w_0 \leq \mu[t](X) \leq W$, где w_0, W – некоторые константы; Ω – некоторое подмножество множества X, $\overline{\Omega}$ – дополнение множества Ω до X, $\mu_0(\Omega) > 0$, $\mu_0(\overline{\Omega}) > 0$.

Сформулируем условия, при которых в задаче (3.1)–(3.3) возможно управление такое, что измеримое множество Ω было бы лучше своего дополнения $\overline{\Omega}$.

Теорема 3.1. *Для того чтобы в задаче* (3.1), (3.2) *существовало управление, удовлетворяющее ограничению* (3.3), *при котором* $\Omega \succ \overline{\Omega}$, *достаточно выполнения неравенства*

$$c > \frac{1}{2}\left(\operatorname*{vraisup}_{x\in\overline{\Omega}} b(x) - \operatorname*{vraisup}_{x\in\Omega} b(x)\right). \tag{3.4}$$

Нестрогое неравенство (3.4) *является необходимым для этого.*

Теорема 3.2. *Для того чтобы в задаче* (3.1), (3.2) *существовало управление, удовлетворяющее ограничению* (3.3), *при котором любое подмножество* ω *множества* Ω *с мерой* $\mu_0(\omega) > 0$ *удовлетворяло отношению* $\omega \succ \overline{\Omega}$, *достаточно выполнение неравенства*

$$c > \frac{1}{2}\left(\operatorname*{vraisup}_{x\in\overline{\Omega}} b(x) - \operatorname*{vraiinf}_{x\in\Omega} b(x)\right). \tag{3.5}$$

Нестрогое неравенство (3.5) *является необходимым для этого.*

4. Примеры

Приведем примеры уравнений вида (3.1) динамики меры с управлением. Из [17] известно, что уравнение

$$\mu'_t = (b(x) + u(t,x))\,\mu - [(b(x) + u(t,x))\,\mu]\,(X)\,\mu \tag{4.1}$$

с начальными условиями (3.2), где μ_0 является вероятностной мерой, описывает динамику вероятностной меры, следовательно, для его решения выполняется равенство $\mu[t](X) = 1$. Нетрудно видеть, что уравнение (4.1) представляет собой частный случай уравнения (3.1), где функционалы P и Q имеют вид: $Q[\mu,u] = 1$, $P[\mu,u] = [(b+u)\mu](X)$.

Согласно теоремам 2.1, 2.2, если константа c, ограничивающая управление u будет удовлетворять неравенству (3.4), то можно найти допустимое управление, при котором некоторое измеримое подмножество Ω множества X находится в отношении строгого предпочтения со своим дополнением $\overline{\Omega}$, в частности таким управлением будет $u(x) = c$, если $x \in \Omega$, и $u(x) = -c$, если $x \in \overline{\Omega}$.

Если же константа c удовлетворяет условию (3.5), то найдется управление, при котором любое измеримое подмножество $\omega \subset \Omega$ удовлетворяет соотношению $\omega \succ \overline{\Omega}$.

Уравнение (4.1) допускает интерпретацию как уравнение динамики распределения численности особей по пространству генотипов. Следуя гипотезам [10], можно считать, что X — множество генотипов некоторой популяции, x — отдельный генотип из этого множества, μ — распределение численности особей, $\mu\,(A)$ — численность особей с генотипами из множества $A \subset X$, $b(x)$ — коэффициент размножения особей генотипа x в благоприятных условиях, $u(x)$ — внешнее влияние на коэффициент размножения. Слагаемое $(b(x) + u(x))\,\mu$ в (4.1) в этом случае будет описывать скорость экспоненциального (мальтузианского) роста популяции при отсутствии лимитирующих факторов и при выполнении предположения строгого наследования, $[(b(x) + u(t,x))\,\mu]\,(X)$ — коэффициент дополнительной смертности, возникающей в результате внутрипопуляционного лимитирования, пропорциональный скорости совокупного прироста популяции. В рамках данной модели соотношение $\Omega \succ \overline{\Omega}$ имеет смысл вымирания особей с генотипами из множества $\overline{\Omega}$, а именно: вытеснение их особями с генотипами из множества Ω.

Второй пример представляет уравнение

$$\mu'_t = (b(x) + u(t,x))\,\mu - [\varphi(x)\mu]\,(X)\,\mu,$$

где $\varphi(x)$ – измеримая ограниченная положительная функция. Здесь $Q[\mu,u] = 1$, $P[\mu,u] = [\varphi(x)\mu](X)$. Это уравнение является обобщением уравнения Ферхюльста и описывает динамику распределения численности популяции по пространству генотипов X с учетом внутрипопуляционного лимитирования, где коэффициент лимитирования имеет вид $[\varphi(x)\mu](X)$. При этом функция $\varphi(x)$ описывает вклад особей генотипа x в общее лимитирование численности популяции. Для данного уравнения справедливы те же выводы, что и для предыдущего примера.

Третий пример представляет обобщенная система Вольтерра

$$\begin{cases} \xi' = (b(x) + u(t,x))\,\xi - py\xi, \\ y' = hy\xi(X) - sy, \end{cases}$$

в которой p, h, s — некоторые положительные константы, $y = y(t)$ — скалярная функция времени, описывающая динамику численности хищника, $\xi = \xi[t]$ — мера, описывающая распределение численности жертв по пространству генотипов. С помощью замены переменных $\mu = \xi/\xi\,(X)$ уравнение динамики меры $\xi[t]$ сводится к уравнению (4.1). При этом сохраняются в силе все выводы, установленные для уравнения (4.1).

5. Заключение

Статья посвящена исследованию предельного поведения решения в управляемых системах авторепродукции. Обобщенной моделью таких систем является уравнение с наследованием, являющееся частным случаем уравнения динамики меры. Благодаря свойству сужения носителя меры установлено отношение порядка на системе измеримых множеств, исходя из заданного процесса динамики положительной меры. Определны ограничения на ресурс управления, при которых в исследуемой системе авторепродукции можно получить порядок, удовлетворяющий заранее заданным требованиям. Приведены примеры, демонстрирующие разнообразие систем, к которым может быть применена изложенная теория.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 13-01-12452 офи_м2.

Список литературы

1. Дж. фон Нейман, *Теория самовоспроизводящихся автоматов*, М.: Мир, 1971, 326 с.
2. J.B.S. Haldane, *The Causes of Evolution*, Princeton: Princeton University Press, 1990, 220 c.
3. R.A. Fisher, *The Genetical Theory of Natural Selection: A Complete Variorum Edition*, Oxford: Oxford University Press, 1999, 318 c.
4. S. Wright, *Evolution: Selected Papers*, Chicago: University of Chicago Press, 1986.
5. Г.Ю. Ризниченко, *Лекции по математическим моделям в биологии*, М-Ижевск: РХД, 2011, 560 с.
6. Л.И. Розоноэр, Е.И. Седых, "О механизмах эволюции самовоспроизводящихся систем", *Автоматика и телемеханика*, 1979, № 5, 137-148.
7. А.Н. Горбань, *Обход равновесия*, Новосибирск: Наука, 1984, 224 с.
8. О.А. Кузенков, "О свойствах одного класса интегро-дифференциальных уравнений в пространстве Лебега", *Нелинейная динамика и управление*, **1**, М.: Физматлит, 2001, 347-355.
9. О.А. Кузенков, "Задача Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве", *Дифференц. уравнения*, **40**:1 (2004), 23-32.
10. I.M. Bomze, "Lotka-Volterra equations and replicator dynamics: a two dimentional classification", *Biol. Cybernetics*, 1983, № 48, 201-211.
11. A.S. Bratus, V.P. Posvyanskii, A.S. Novozhilov, "A note on the replicator equation with explicit space and global regulation Mathematical Biosciences and Engineering (MBE).", **8**:3 (2011), 659-676.
12. А.С. Братусь, А.С. Новожилов, А.П. Платонов, *Динамические системы и модели биологии*, М: ФИЗМАТЛИТ, 2010, 400 с.
13. G.P. Karev, "On mathematical theory of selection: continuous time population dynamics", *J. Math. Biol.*, **60**:1 (2010), 107-129.

14. G.P. Karev, “Replicator equations and the principle of minimal production of information”, *Bull Math Biol.*, **72**:5 (2010), 1124-1142.

15. A. Y. Klimenko, “Entropy and equilibria in competitive systems”, *Entropy.*, 2014, № 16, 1-22.

16. A.N. Gorban, “Selection Theorem for Systems with Inheritance”, *Math. Model. Nat. Phenom.*, **2**:4 (2007), 1-45.

17. О.А. Кузенков, “Исследование динамической системы вероятностных мер Радона”, *Дифференц. уравнения*, **31**:4 (1995), 591-596.

18. О.А. Кузенков, Г.В. Кузенкова, “Оптимальное управление системами авторепродукции”, *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2012, № 4, 26-37.

19. О.А. Кузенков, “Уравнения динамики меры как язык для описания оптимизационных процессов”, *Вестник ННГУ Математическое моделирование и оптимальное управление*, **1**:30, Н. Новгород: Изд-во ННГУ (2006), 51-62.

20. Д. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, М.: Наука, 1977, 624 с.

21. О.А. Кузенков, А.В. Новоженин, *Уравнения динамики меры: Учебн. пособие*, Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2010, 100 с.

22. В.И. Богачев, *Основы теории меры*, 2003, 543 с.

Order of preference in self-replicating systems

© O. A. Kuzenkov[3], E. A. Ryabova[4]

Abstract. Order of preference for the system of measurable sets is introduced based on some given process of positive measure dynamics. Control resource limits are determined to get the order in the observed self-replicating system that satisfies given requirements. Solution to the problem for controlled generalized replication system with distributed parameters is considered.

Key Words: self-replicating systems, dynamics of measure, strict preference relation, optimal control

[3] Associate Professor of numerical and functional analysis, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod; kuzenkov_o@mail.ru

[4] Senior teacher of chair numerical and functional analysis, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod; riabova-ea@rambler.ru