УДК 517.938

О структуре неблуждающего множества эндоморфизмов одномерных ветвленных многообразий

© Н. В. Исаенкова[1], Е. В. Жужома[2], А. Е. Шишенкова[3]

Аннотация. В статье рассматриваются эндоморфизмы одномерных ветвленных многообразий с двумя точками ветвления. Главный результат состоит в изучении неблуждающего множества таких эндоморфизмов

Ключевые слова: Неблуждающее множество, неособый эндоморфизм, одномерное ветвленное многообразие

1. Введение

Каноническим примером эндоморфизма окружности является линейное отображение $E_d(x) = dx(\text{mod } 1)$, $d \geq 2$, где S^1 наделена циклической координатой $x(\text{mod } 1)$. Напомним, сюрьективное C^1 отображение $g : S^1 \to S^1$ называется *эндоморфизмом* [8]. Эндоморфизм g называется *неособым*, если его производная $Dg \neq 0$ [6]. Поскольку $d \geq 2$, то E_d является растягивающим эндоморфизмом ($g : S^1 \to S^1$ - *растягивающий* эндоморфизм, если $Dg > 1$). Шуб [8] классифицировал растягивающиеся эндоморфизмы, показав, что степень является полным инвариантом сопряженности в классе растягивающих эндоморфизмов.

Якобсон [4] рассматривал C^r-эндоморфизмы ($r \geq 1$), которые могут иметь точки, в которых производная обращается в нуль. В [4] выделялось инвариантное множество Σ канторовского типа, принадлежащее неблуждающему множеству Ω, и вводилось понятие Σ-устойчивости, аналогичное понятию Ω-устойчивости. Обозначим через $Diff^1(M)$ пространство C^1 диффеоморфизмов многообразия M, наделенное равномерной C^1 топологией. Диффеоморфизм $f \in Diff^1(M)$ называется *Ω-устойчивым*, если существует его окрестность $U(f) \subset Diff^1(M)$ такая, что любой $g \in U(f)$ Ω-сопряжен f. Диффеоморфизм $f \in Diff^1(M)$ называется *структурно устойчивым*, если существует его окрестность $U(f) \subset Diff^1(M)$ такая, что любой диффеоморфизм $g \in U(f)$ сопряжен f. Было показано, что ограничения $f|_\Sigma$ и $f|_\Omega$ эндоморфизма f на Σ и Ω соответственно сопряжены односторонним марковским цепям с конечным числом состояний.

Нитецки [6] описал неблуждающее множество структурно устойчивых неособых C^r-эндоморфизмов окружности (отметим что растягивающие эндоморфизмы структурно устойчивы, но существуют отличные от растягивающих структурно устойчивые эндоморфизмы).

Неособые эндоморфизмы образуют важный класс d-накрытий окружности. *d-накрытием* окружности S^1 называется сюрьективный локальный гомеоморфизм $S^1 \to S^1$ степени $|d| \geq 2$, при этом прообраз каждой точки состоит из $|d| \in \mathbb{N}$ точек. В статье [3] сделана классификация d-накрытий окружности S^1 с точностью до сопряженности с помощью сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов (основные понятия и определения

[1] Доцент Нижегородской академии МВД России, Нижний Новгород; nisaenkova@mail.ru
[2] Профессор кафедры Теории управления и динамики машин ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru.
[3] Доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

теории динамических систем см. в [1], [2]). В [3] рассматриваются сохраняющие ориентацию d-накрытия, когда $d > 0$ и показано, что полным классификационным инвариантом с точностью до d-эквивалентности является наделенное схемой инвариантное счетное множество (отмеченное множество) линейного растягивающего эндоморфизма степени d. Как следствие получена классификация неособых эндоморфизмов, включая важный класс структурно устойчивых эндоморфизмов. Также в статье [3] изучено неблуждающее множество d-накрытий окружности, а именно, показано, что оно содержит канторовское множество плюс периодические точки из открытых смежных интервалов.

Благодарности. Авторы благодарят В. З. Гринеса, О. В. Починку, С. В. Гонченко за плодотворные обсуждения. Исследования проводились при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, а именно, грантов 12-01-00672-а и 13-01-12452-офи-м.

Важным обобщением эндоморфизмов окружности S^1 являются эндоморфизмы одномерных ветвленных многообразий, введенных Вильямсом в статье [9] для изучения одномерных растягивающихся аттракторов. В данной статье мы будем рассматривать неособые эноморфизмы одномерных ветвленных многообразий, с одним только отличаем, что эндоморфизмы не обязательно должны быть растягивающимися.

Основной целью данной статьи является изучение неблуждающего множества неособых эндоморфизмов одномерных ветвленных многообразий следующего вида:

$$A \longrightarrow -B + A + B$$

$$B \longrightarrow C - B + A$$

$$C \longrightarrow B + C - B$$

Рассмотрим одномерное ветвленное многообразие $\mathbb{K}$, и пусть $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ – неособый эндоморфизм. Обозначим буквой Υ - класс неособых эндоморфизмов одномерного ветвленного многообразия, см. рис. 1.1).

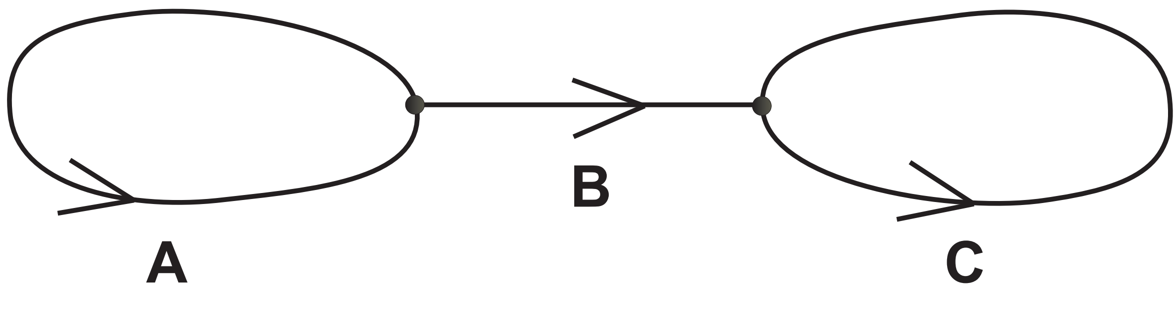


Рисунок **1.1**

Отображение Вильямса

Перейдем к необходимым определениям и формулировки основного результата. Напомним, неблуждающее множество $NW(f)$ определяется как множество неблуждающих точек и является f-инвариантным и замкнутым. Точка $x \in M$ является *неблуждающей*, если для любой ее окрестности U пересечение $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ для бесконечного множества положительных n.

Будем говорить, что отображение $f_1 : S^1 \to S^1$ *полусопряжено* $f_2 : S^1 \to S^1$, если существует сохраняющее ориентацию непрерывное отображение $h : S^1 \to S^1$ такое, что

$h \circ f_1 = f_2 \circ h$, то есть имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f_1} & S^1 \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ S^1 & \xrightarrow{f_2} & S^1. \end{array}$$

Если h - гомеоморфизм, то f_1, f_2 называются *сопряженными* отображениями.

Как будет показано далее, для изучения неблуждающего множества эндоморфизмов из класса Υ необходимо знать структуру неблуждающего множества неособых эндоморфизмов окружности, которая подробно описана в статье [3].

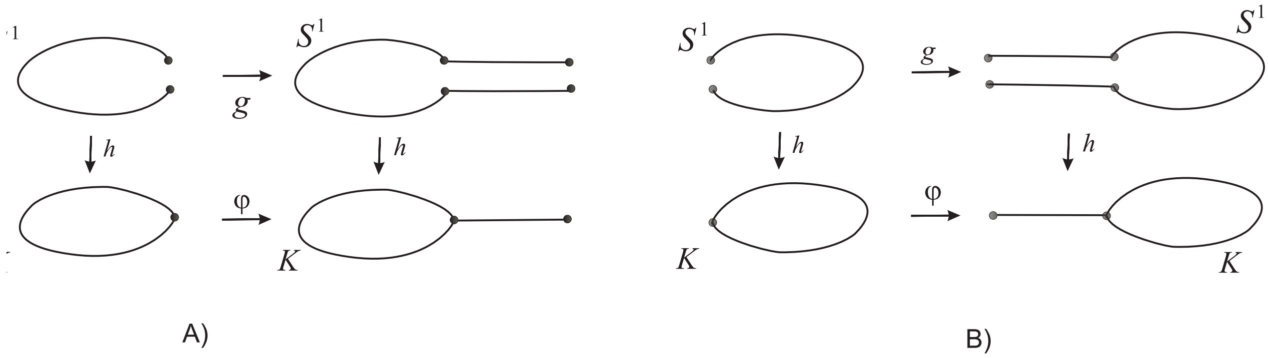
Итак, пусть $g : S^1 \to S^1$ – неособый эндоморфизм окружности степени $d \geq 2$. Рассмотрим непрерывное и сохраняющее ориентацию отображение $h : S^1 \to h(S^1) = S^1$. Обозначим через Σ° подмножество таких $x \in S^1$, что $h^{-1}(h(x))$ – одна точка. Множество $S^1 \setminus \Sigma^\circ$ представляет собой объединение попарно непересекающихся замкнутых интервалов. $S^1 \setminus \Sigma^\circ = \cup_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i]$, причем можно считать, что $h^{-1}(h[a_i, b_i]) = [a_i, b_i]$ для всех $i \in \mathbb{N}$, и $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] = \emptyset$, при $i \neq j$. Интервалы $[a_i, b_i]$ называются *смежными*. Соответствующие открытые интервалы (a_i, b_i) - *открытыми смежными*. Смежный интервал $[a, b]$ называется *периодическим*, если $g^k([a, b]) = [a, b]$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, концевые точки периодического смежного интервала являются периодическими точками. Обозначим через Σ_g объединение Σ° со всеми концевыми точками a_i, b_i смежных интервалов множества $S^1 \setminus \Sigma^\circ$, $\Sigma_g = \Sigma^\circ \bigcup_{i\geq 1}(\{a_i\} \cup \{b_i\})$.

Если g – транзитивный эндоморфизм, то $NW(g) = S^1$. В статье [3] показано, что если $g : S^1 \to S^1$ – неособый и нетранзитивный эндоморфизм степени $d \geq 2$, тогда его неблуждающее множество $NW(g)$ есть объединение Σ_g со всеми периодическими точками из открытых смежных интервалов.

2. Доказательство основных результатов

Теорема 2.1. *Пусть $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ – неособый эндоморфизм из класса Υ. Тогда его неблуждающее множество $NW(\varphi)$ есть объединение канторовского множества со всеми периодическими промежутками из открытых смежных интервалов.*

Ключевым утверждением для доказательство теоремы 2.1. является тот факт, что любой эндоморфизм из класса Υ полусопряжен с некоторым неособым эндоморфизмом окружности.

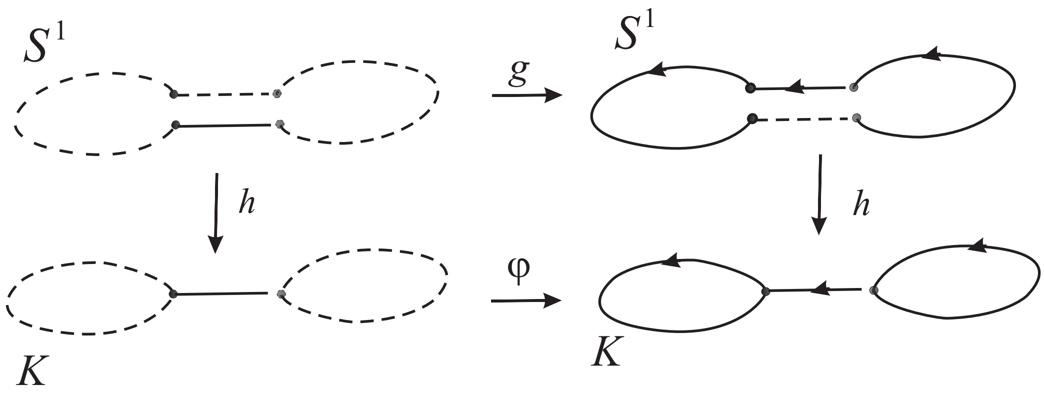


Р и с у н о к **2.1**

Л е м м а 2.1. *Пусть $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ - неособый эндоморфизм из класса Υ, тогда существует неособый эндоморфизм окружности S^1 $g : S^1 \to S^1$ и непрерывное отображение $h : S^1 \to \mathbb{K}$, полусопрягающее φ с g, то есть имеет место равенство $h \circ g = \varphi \circ h$ и верна следующая коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{g} & S^1 \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \mathbb{K} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{K}. \end{array}$$

Доказательство. Рисунки 2.1), 2.2), 2.3) демонстрируют геометрическое построение полусопрягающего отображения.



Р и с у н о к **2.2**

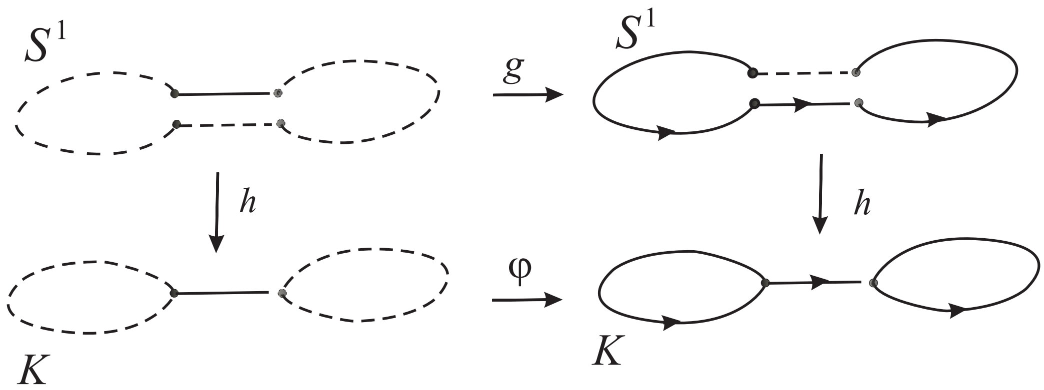


Рисунок **2.3**

□

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия леммы 2.1. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $h \circ g^n = \varphi^n \circ h$.*

Осталось показать, что полусопрягающее отображение переводит неблуждающее множество неособого эндоморфизма окружности g в неблуждающее множество эндоморфизма одномерного ветвленного многообразия φ.

Лемма 2.2. *Пусть $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ - неособый эндоморфизм из класса Υ, $g : S^1 \to S^1$ неособый эндоморфизм окружности S^1, тогда имеет место следующее включение*

$$h(NW(g)) \subset NW(\varphi).$$

Доказательство. Для $x \in h(NW(g))$, покажем, что $h(x) \in NW(\varphi)$.

Возьмем любую ε-окрестность точки $h(x)$ - $U_\varepsilon(h(x))$, тогда $h^{-1}[U_\varepsilon(h(x))] = V(x)$ – окрестность точки x, $x \in S^1$. Так как точка $x \in NW(g)$, существует $n_0 \geq 0$ такое, что $g^{n_0}[V(x)] \cap V(x) \neq \emptyset$, следовательно $h[g^{n_0}[V(x)] \cap V(x)] \neq \emptyset$. Поскольку h - непрерывное отображение, верно следующее включение $h[g^{n_0}[V(x)] \cap V(x)] \subset h \circ g^{n_0}[V(x)] \cap h[V(x)]$. Значит, $h \circ g^{n_0}[V(x)] \cap h[V(x)] \neq \emptyset$. В силу следствия 2.1., $\varphi^{n_0} \circ h[V(x)] \cap h[V(x)] \neq \emptyset$. Таким образом, $h[V(x)] = U_\varepsilon(h(x))$, и тогда $\varphi^{n_0}[U_\varepsilon(h(x)))] \cap U_\varepsilon(h(x)) \neq \emptyset$, что означает $h(x) \in NW(\varphi)$. □

Используя результаты [3] и лемму 2.1., можно показать и обратное включение $h^{-1}(NW(\varphi)) \subset NW(g)$. Отсюда и леммы 2.2. вытекает равенство $NW(g) = NW(\varphi)$. Теперь утверждение теоремы 2.1. следует из [3].

Список литературы

1. Аносов Д.В., “Исходные понятия. В сб. серии "Современные проблемы математики Фундаментальные направления (Итоги науки и техники).”, *Динамические системы - 1 (под ред. Д. В. Аносова)*, **1** (1985), 156-178.

2. Аносов Д.В., Солодов В.В., “Гиперболические множества.”, *Динамические системы - 9 (под ред. Д. В. Аносова)*, **66** (1991), 12-99.

3. Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., “Классификация накрытий окружности.”, *Труды МИАН. Российская академия наук*, **3** (2012), 96-101.

4. Якобсон М.В., “О гладких отображениях окружности в себя”, *Матем. сборник*, 1971, 163-188.

5. Куратовский Л., *Топология*, **3**, Москва, Мир, 1966.

6. Nitecki Z., “Nonsingular endomorphisms of the circle”, *Proc. Symp. Pure Math.*, 1970, 203-220.

7. Robinson C., *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. Studies in Adv. Math., Sec. edition*, CRC Press, 1999.

8. Shub M., “Endomorphisms of compact differentiable manifolds”, *Amer. Journ. Math.*, **91** (1969), 175-199.

9. Williams R.F., “One-dimensional non-wandering sets”, *Topology*, **6** (1967), 473-487.

10. Williams R., “Expanding attractors”, *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 169-203.

Solenoidal basic sets of Smale-Vietoris A-diffeomorphisms

© N. Isaenkova[4], E. Zhuzhoma[5], A. Shishenkova[6]

Abstract. In the article, one considers the endomorphisms of the class Υ of branched 1-manifolds with two branch points. The main result is a description of non-wandering set the endomorphisms of the class Υ.

Key Words: Non-wandering set, nonsingular endomorphism, branched 1-manifold.

[4] Associated professor of MIA academy of Nizhnii Novgorod; math-ngaa@yandex.ru, nisaenkova@mail.ru

[5] Professor of Chair of Theory of Control and Dynamics of Machines, Lobachevskii State University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

[6] Assistant professor of department of higher mathematic, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru