УДК 517.929

Необходимые и достаточные условия устойчивости и неустойчивости одного класса матриц линейных операторов

© А.В. Зубов [1], О.А. Пустовалова [2], И.С. Стрекопытов [3]

Аннотация. В этой статье найдены необходимые и достаточные условия устойчивости и неустойчивости одного класса матриц линейных операторов в терминах отрицательной определенности в первом случае и значений положительного и отрицательного индексов во втором случае квадратичной формы эрмитовой составляющей их аддитивного представления.
Ключевые слова: линейные операторы, эрмитова квадратичная форма, характеристический полином

Как известно из отрицательной определенности эрмитовой квадратичной формы с матрицей $B = \frac{A+A^\star}{2}$, где A вообще говоря комплексная квадратная матрица из аддитивного разложения

$$A = \frac{A + A^\star}{2} + \frac{A - A^\star}{2} = B + C \tag{1.1}$$

следует устойчивость матрицы A. Обратное неверно, более того, даже для сверх устойчивой вещественной матрицы, т. е. матрицы с диагональным отрицательным преобладанием по строке, не следует отрицательная определенность ее квадратичной формы. Нужны дополнительные условия.

Теорема 1.1. *Если матрица A нормальная ($AA^\star = A^\star A$), то для того, чтобы она была устойчивой необходимо и достаточно, чтобы ее эрмитова квадратичная форма была отрицательно определенной.*

Это следует из представления матрицы A как суммы эрмитовой матрицы H_1 и косоэрмитовой jH_2 в разложении

$$A = \frac{A + A^\star}{2} + \frac{A - A^\star}{2} = H_1 + jH_2 \tag{1.2}$$

и того, что для нормальных матриц спектры матриц H_1 и H_2 совпадают с наборами реальных и мнимых частей чисел спектра матрицы A (и обе являются эрмитовыми).

Определение 1.1. *Назовем квадратную вещественную матрицу A симметрично сверхустойчивой, если она имеет отрицательное диагональное преобладание по строке и по столбцу.*

[1] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Доцент кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] Аспирант кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Т е о р е м а 1.2. *Пусть вещественная матрица A симметрично сверхустойчива. Тогда для ее устойчивости необходимо и достаточно, чтобы ее квадратичная форма была отрицательно определенной.*

Аналогичная теорема верна и для квадратных комплексных матриц с отрицательным диагональным преобладанием по реальной части по строке и столбцу, т. е.

$$-Rea_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \; Rea_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ji}|. \tag{1.3}$$

О п р е д е л е н и е 1.2. *Назовем $n \times n$ матрицу A из класса (n, k) - эквивалентности, если ее характеристический полином имеет k корней справа и $n - k$ слева от мнимой оси с учетом кратностей.*

Принадлежность эрмитовой составляющей H_1 из (1.2) классу (n, k) - эквивалентности не дает информации о принадлежности матрицы A этому же классу. Исключением является случай, когда $k = 0$, т. е. H_1 - устойчивая эрмитова матрица, а ее эрмитова квадратичная форма отрицательно определенная. Действительно, для $k = 1, \ldots, n-1$ из неравенства Гирша для спектров матриц A, H_1:

$$\min \lambda(H_1) \leq Re\lambda(A) \leq \max \lambda H_1 \tag{1.4}$$

не следует никакой связи локализации спектра матрицы A из того, что k чисел спектра матрицы H_1 находятся справа от нуля на вещественной оси, а $n - k$ - слева от нуля.

Анализ показал, что методы исследования знакоопределенности квадратичной формы удобны только тогда, когда нужно определить крайние случаи: отрицательную и положительную определенность. Если же нужно найти индекс и сигнатуру квадратичной формы, то для больших n аналитические методы не эффективны, а численные методы требуют не менее $\frac{n^3}{3}$ арифметических операций для матриц квадратичной формы порядка n. Однако, даже если найдется эффективный алгоритм типа ММП для определения принадлежности классу (n, k) - эквивалентности характеристического полинома ее матрицы H_1 из (1.2), это, без дополнительных условий, ничего не даст для определения принадлежности классу (n, k) самой матрицы A. Исключением являются нормальные матрицы. Действительно, справедливо утверждение.

Т е о р е м а 1.3. *Для того, чтобы нормальная $n \times n$ матрица A принадлежала классу (n, k) - эквивалентности необходимо и достаточно, чтобы этому же классу принадлежала ее эрмитова составляющая $A + A^\star$ из* (1.2).

Из теоремы (1.3) следует, что для нормальной матрицы A эрмитова квадратичная форма с матрицей $A + A^{\star}$ имеет положительный индекс равный k и отрицательный индекс равный $n-k$.

О п р е д е л е н и е 1.3. *Назовем вещественную $n \times n$ матрицу A симметрично $k-$ диагональной, если она имеет положительное $k-$ диагональное преобладание по строке и по столбцу, т.е. для k элементов на главной диагонали выполняются неравенства:*

$$a_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|,\ a_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ji}|; \tag{1.5}$$

а для остальных $n-k$ элементов выполняются неравенства:

$$-a_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|,\ -a_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ji}|. \tag{1.6}$$

Опираясь на теорему Гершгорина и неравенство (1.4) получим следующий критерий.

Т е о р е м а 1.4. *Если вещественная квадратная матрица A симметрично $k-$ диагональная, то для ее принадлежности классу $(n, k)-$ эквивалентности необходимо и достаточно, чтобы матрица ее квадратичной формы была тоже из этого класса или, что то же самое, ее квадратичная форма имела положительный индекс k и отрицательный индекс $n-k$.*

Нетрудно сформулировать и доказать критерий аналогичный теореме 4 для комплексных матриц с $k-$ диагональным преобладанием для реальных частей элементов главной диагонали, по строке и столбцу.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. ℵ 10-08-00624).

Список литературы

1. Л.Д. Блистанова И.В. Зубов Н.В. Зубов Н.А. Северцев, *Конструктивные методы теории устойчивости и их применение к задачам численного анализа*, ООП НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2002, 119 с.

2. М. Маркус Х. Минк, *Обзор по теории матриц и матричных неравенств*, Наука, М, 1972.

3. Б.Т. Поляк П.С. Щербаков, *Робастная устойчивость и управление*, Наука, М, 2002.

4. Р. Хорн Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, М, 1989.

The necessary and sufficient conditions of stability and in stability one class of matrixes linear operators

© **A. V. Zubov [4], O. A. Pustovalova [5], I. S. Strecopitov [6]**

Abstract. In this article is find sufficiently and necessary conditions of stability and un stability one class of matrixes linear operators in terms deny definite in first case and meanings plus and deny indexes in second case quadrat form emit compound they additive representation.

Key Words: linear operators, Hermitian quadratic form, the characteristic polynomial

[4] Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[5] Lecture chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[6] Post-graduate chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru