Краткие сообщения

УДК 517.956.2

Топологическая классификации диффеоморфизмов поверхностей с одномерными инвариантными транзитивными множествами

© А. Н. Сахаров[1], Е. В. Трегубова[2]

Аннотация. Рассматриваются диффеоморфизмы поверхностей, имеющих в качестве неблуждающего множества объединение конечного числа нормально гиперболических окружностей. Описана взаимосвязь между динамикой таких диффеоморфизмов и топологией несущего многообразия. Получена топологическая классификация диффеоморфизмов из расматриваемого класса.

Ключевые слова: диффеоморфизм, аттрактор, репеллер, топологическая сопряженность, транзитивные инвариантные множества

В настоящей работе рассматривается задача топологической классификации диффеоморфизмов замкнутых поверхностей из класса G таких, что для каждого $f \in G$ выполняются следующие условия:

1. неблуждающее множество $NW(f)$ представляет собой дизъюнктное объединение конечного числа простых замкнутых кривых;

2. $NW(f)$ – нормально гиперболическое инвариантное многообразие[3] диффеоморфизма f.

[1] Доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; ansakharov2008@yandex.ru

[2] Доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru

[3] Пусть $f : M \to M$ – диффеоморфизм компактного гладкого многообразия, $Df : TM \to TM$ – дифференциал f. f-инвариантное подмногообразие $N \subset M$ называется нормально гиперболическим, если ограничение на N касательного расслоения TM допускает разложение в сумму инвариантных подрасслоений, одно из которых – TN, а два других – устойчивое и неустойчивое расслоения, обозначаемые E^s и E^u, соответственно. Относительно некоторой римановой метрики на M ограничения Df на E^s должно быть сжатием, ограничение Df на E^u должно быть расширением, а ограничение на TN должно быть относительно нейтральным. Следовательно, существуют постоянные $0 < \mu^{-1} < \lambda < 1$ и $c > 0$ такие, что

$$T_N M = TN \oplus E^s \oplus E^u,$$

$$(Df)_x E^s_x = E^s_{f(x)} \text{ и } (Df)_x E^u_x = E^u_{f(x)} \text{ для всех } x \in N,$$

$$\|Df^n v\| \le c\lambda^n \|v\| \text{ для всех } v \in E^s \text{ и } n > 0,$$

$$\|Df^{-n} v\| \le c\lambda^n \|v\| \text{ для всех } v \in E^u \text{ и } n > 0,$$

и

$$\|Df^n v\| \le c\mu^{|n|} \|v\| \text{ для всех } v \in TN \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

3. сужение некоторой степени диффеоморфизма f на любую кривую из $NW(f)$ является транзитивным гомеоморфизмом окружности с одним и тем же иррациональным числом вращения.

Условие нормальной гиперболичности гарантирует, что неблуждающее множество сохраняется при малых возмущениях f [1], [2]. Однако возмущенный диффеоморфизм не обязательно принадлежит классу G, так как условие 3 для него может не выполняться.

Решение задачи классификации основано на методах работы [3], посвященной решению аналогичной задачи для А-диффеоморфизмов 3-многообразий с двумерными базисными множествами. При этом удается показать, что классификация диффеоморфизмов из класса G сводится к классификации транзитивных диффеоморфизмов окружности.

Напомним, классификацию гомеоморфизмов окружности с иррациональным числом вращения. Пусть $\chi : S^1 \to S^1$ – диффеоморфизм окружности с иррациональным числом вращения α. Согласно теореме А. Пуанкаре существует непрерывное отображение $p : S^1 \to S^1$, переводящее χ в поворот на угол α[4]. Если диффеоморфизм χ минимален, то отображение p – гомеоморфизм и число вращения является полным топологическим инвариантом. В противном случае минимальным множеством χ будет канторово множество C, а полным топологическим инвариантом является число вращения и множество $T = p(I)$, где I – множество достижимых точек C [4].

Пусть $f : M \to M$ – диффеоморфизм из класса G на замкнутой поверхности M. Существование такого диффеоморфизма позволяет уточнить топологию многообразия M.

Предложение 1.1. *Для любого $f \in G$ верно следующее: замыкание каждой компоненты связности множества $V_f = M \setminus NW(f)$ гомеоморфно $S^1 \times [0,1]$.*

В силу этого утверждения многообразие M гомеоморфно фактор-пространству M_τ, полученному из $S^1 \times [0,1]$ отождествлением точек $(z,1)$ и $(\tau(z),0)$, где $\tau : S^1 \to S^1$ – некоторый гомеоморфизм.

Лемма 1.1. *Фактор-пространство M_τ гомеоморфно $\mathbb{T}^2$, если гомеоморфизм τ сохраняет ориентацию; бутылке Клейна $\mathbb{K}^2$, если τ меняет ориентацию.*

В итоге получаем следующую теорему, описывающую топологию несущего многообразия диффеоморфизма $f \in G$.

---

[4] Отображение p называется канторовской функцией.

Т е о р е м а 1.2. *Пусть многобразие M допускает диффеоморфизм из класса G. Тогда M гомеоморфно двумерному тору $\mathbb{T}^2$.*

Построим модельные диффеоморфизмы из класса G на торе $\mathbb{T}^2$. Для этого сначала построим модели грубых преобразований окружности S^1, представляя её как факторпространство $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ с естественной проекцией $\pi : \mathbb{R} \to S^1$.

Для $n, k \in \mathbb{N}$ и целого l, такого что для $k = 1$, $l = 0$ и для $k > 1$, $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ взаимно просто с k, построим стандартного представителя φ_+ с параметрами n, k, l в множестве грубых сохраняющих ориентацию преобразований окружности. Для $q \in \mathbb{N}$ построим стандартного представителя φ_- с параметром q в множестве грубых меняющих ориентацию преобразований окружности.

Для этого введем следующие отображения:
$\tilde{\psi}_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — сдвиг на единицу времени потока $\dot{r} = \sin(2\pi m r)$ для $m \in \mathbb{N}$;
$\tilde{\eta}_{k,l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\tilde{\eta}_{k,l}(r) = r - \frac{l}{k}$;
$\tilde{\eta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\tilde{\eta}(r) = -r$;
$\tilde{\varphi}_+ = \tilde{\eta}_{k,l}\tilde{\psi}_{n\cdot k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\tilde{\varphi}_- = \tilde{\eta}\tilde{\psi}_q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Таким образом,
$\tilde{\varphi}_+(r) = \tilde{\psi}_{n\cdot k}(r) - \frac{l}{k}$ и $\tilde{\varphi}_+(r + \nu) = \tilde{\varphi}_+(r) + \nu$;
$\tilde{\varphi}_-(r) = -\tilde{\psi}_q(r)$ и $\tilde{\varphi}_-(r + \nu) = \tilde{\varphi}_-(r) - \nu$.

Следовательно следующие диффеоморфизмы корректно определены: $\varphi_\sigma = \pi\tilde{\varphi}_\sigma\pi^{-1} : S^1 \to S^1, \sigma \in \{+, -\}$.

Представим теперь S^1 как множество точек $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Для иррационального числа $\alpha \in (0, 1)$ обозначим через $\varphi_\alpha : S^1 \to S^1$ диффеоморфизм, заданный формулой $\varphi_\alpha(z) = e^{2\pi\alpha}z$.

Определим диффеоморфизм $\psi_\sigma : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ формулой $\varphi_\sigma(z_1, z_2) = (\varphi_\alpha(z_1), \varphi_\sigma(z_2))$, где $(z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Обозначим Ψ_+ (Ψ_-) множество диффеоморфизмов ψ_+ (ψ_-). Положим $\Psi = \Psi_+ \cup \Psi_-$.

Каждый диффеоморфизм из класса Ψ_+ характеризуется набором параметров $\{\alpha, n, k, l\}$, каждый диффеоморфизм из класса Ψ_- характеризуется набором параметров $\{\alpha, q\}$.

Следующий результат дает топологическую классификацию модельных диффеоморфизмов.

Т е о р е м а 1.3.

1. Два диффеоморфизма $\psi_+; \psi'_+ \in \Psi_+$ с параметрами $\{\alpha, n, k, l\}; \{\alpha', n', k', l'\}$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $\alpha = \alpha', n = n', k = k'$, и либо $l = l'$, либо $l = k' - l'$.

2. Два диффеоморфизма $\psi_-; \psi'_- \in \Psi_-$ с параметрами $\{\alpha, q\}; \{\alpha', q'\}$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $\alpha = \alpha'$ и $q = q'$.

3. Не существует топологически сопряженных диффеоморфизмов $\psi_+ \in \Psi_+$ и $\psi_- \in \Psi_-$.

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Т е о р е м а 1.4. *Каждый диффеоморфизм из класса G топологически сопряжен некоторому модельному диффеоморфизму из класса Ψ.*

Авторы благодарят В.З. Гринеса за постановку задачи и О.В. Починку за внимательное прочтение рукописи. Работа была поддержана грантом РФФИ № 12-01-00672а.

Список литературы

1. J. Palis, F. Takens, “Topological equivalence of normally hyperbolic dynamical systems”, *Topology*, **16** (1977), 335-345.

2. R. Mané, “Persistens manifolds are normally hyperbolic”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **246** (1978), 261–283.

3. В.З. Гринес, Ю.А. Левченко, О.В, Починка, “О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами”, *Нелинейная динамика*, **10**:1 (2014), 17–33.

4. N. Markley, “Homeomorphisms of the circle without periodic points”, *Proc. London Math. Soc.*, **20**:3 (1970), 688–69.

Topological classification of surface diffeomorphisms with one-dimensional invariant transitive sets

© **A. N. Sakharov**[5], **E. V. Tregubova**[6]

Abstract. We consider diffeomorphisms of surfaces having as non-wandering set $NW(f)$ finite number of normally hyperbolic circles. Describe the relationship between the dynamics of such diffeomorphisms and supporting manifold topology. The topological classification is obtained for the considered class of diffeomorphisms

Key Words: diffeomorphism, attractor, repeller, topological conjugacy, transitive invariant sets

[5] Assistant professor of department of higher mathematic, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; ansakharov2008@yandex.ru

[6] Assistant professor of department of higher mathematic, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru