УДК 517.9

# Об оптимальной стабилизации программного движения при абсолютно равномерно устойчивых решениях

© Т. Ф. Мамедова [1], Д. К. Егорова [2], Е. В. Десяев [3]

**Аннотация.** В работе рассматривается задача об оптимальной стабилизации программного движения в смысле абсолютно равномерной устойчивости, что отличает постановку этой задачи от классической, когда программное движение асимптотически устойчиво.

**Ключевые слова:** оптимальная стабилизация программного движения, абсолютно равномерно устойчивые решения

Исследования в области стабилизации программного движения при абсолютно равномерно устойчивых решениях были впервые рассмотрены в работах Е. В. Воскресенского. Известно, что программное движение стабилизировано, если оно является устойчивым решением уравнения движения, в заранее определенном смысле [1],[2].

Рассмотрим постановку задачи оптимальной стабилизации программного движения $x = 0$. К такой постановке при подходящей замене переменных сводится задача об оптимальной стабилизации произвольного программного движения $x = \varphi(t)$.

Рассмотрим уравнение движения

$$\frac{dx}{dt} = G(t, x, u), \tag{1.1}$$

где функция

$$G : [T, +\infty) \times R^n \times R^m \to R^n$$

при любом допустимом управлении $u \in K$ удовлетворяет требованиям теоремы существования и единственности решения Каратеодори при любых начальных данных $(t_0, x_0), T \leq t_0 < +\infty, x_0 \in R^n$; $K$ – класс допустимых управлений, $u : [T, +\infty) \times R^n \to R^m$ – функции типа Каратеодори и $u(t, 0) \equiv 0$, функционал качества $I$ вида

$$I = \int\limits_T^{+\infty} G_0(t, x(t), u(t, x))dt, \tag{1.2}$$

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск;mamedovatf@yandex.ru

[2] Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева,г. Саранск; egorovadk@mail.ru.

[3] Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; desyaev@rambler.ru.

рассматривается на решениях уравнения (1.1). Здесь

$$G_0 : [T, +\infty) \times R^n \times R^m \to [0, +\infty)$$

– типа Каратеодори, $x(t) = x(t : t_0, x_0, u)$ – решение уравнения (1.1) с начальными данными $(t_0, x_0)$ при любом управлении $u \in K, \|x_0\| \leq \delta$.

В задаче (1.1)-(1.2) предполагается стабилизация по асимптотической устойчивости. Однако при решения прикладных задач возникают случаи, когда тривиальное решение уравнения движения (1.1) не может быть асимптотически устойчивым, а, следовательно, стабилизировать движение $x = 0$ в классическом смысле не удастся [3],[4].

В работах [1],[5] приводится понятие стабилизации программных движений для абсолютно равномерно устойчивых решений, т.е. для таких решений $x(t : t_0, x_0)$ уравнения (1.1) для которых выполняется неравенство

$$\|x(t : +\infty, x_0, u)\| < \varepsilon$$

при всех $T \leq t \leq +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что $\|x_0\| < \delta$.

Пусть в сформулированной постановке задачи (1.1)-(1.2) решение $x = 0$ является абсолютно равномерно устойчивым, тогда необходимо уточнить понятие минимума функционала (1.2). Для этого мы потребуем глобальную выпрямляемость поля направлений [6], определяемого уравнением (1.1), в классе допустимых управлений. В этом случае минимум функционала $I$ определяется так: существует управление $u_0(t, x)$ такое, что

$$\int_T^{+\infty} G_0(t, x(t) - x_0, u_0(t, x(t) - x_0))dt \leq \int_T^{+\infty} G_0(t, x(t) - x_0, u(t, x(t) - x_0))dt,$$

при всех $u \in K, x(t) = x(t : +\infty, x_0, u), \|x_0\| \leq \delta.$ и функционал качества (1.2) можно записать в виде

$$I = \int_T^{+\infty} G_0(t, x(t) - x_0, u(t, x(t) - x_0))dt, \tag{1.3}$$

где $x(t) = x(t : +\infty, x_0, u)$, $\|x_0\| \leq \delta.$

Тогда $u_0 = u_0(t, x)$ оптимально стабилизирует решение $x = 0$ в классе допустимых управлений $K$.

В общем случае вид устойчивости каждый раз в конкретной задаче требует уточнения. Заметим, что здесь асимптотической устойчивости решения $x = 0$ нет, и поэтому, потребовалось новое определение оптимальной стабилизации программного движения.

Возвращаясь к решению практических задач, отметим, что точные аналитические задания функций из формулировки задачи чаще всего неизвестны, указываются лишь свойства уравнений вида (1.1), области их определения и области значений. Однако, исходя из результатов измерений, можно задать их мажоранты, которые будут являться носителями функциональных свойств.

Итак потребуем существования мажоранты для функции $G_0(t, x, u)$ :

$$\|G_0(t, x, u)\| \leq \lambda_0(t, \|x\|, \|u\|), \lambda_0 \in C([T, +\infty) \times \mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^1_+, \mathbb{R}^1_+),$$

$$\lambda_0(t, \alpha_1, \|u\|) \leq \lambda_0(t, \alpha_2, \|u\|), \alpha_1 \leq \alpha_2.$$

Уточним класс допустимых управлений $K$. В формулировке задачи (1.1),(1.3) рассматриваются лишь только управления с обратной связью, более общие классы требуют уточнения формулировки. Еще потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$\|u(t, x)\| \leq \mu\|x\|,$$

где $\mu$ – минимальное неотрицательное число, обеспечивающее это неравенство для данного управления при любом $T \leq t < +\infty$.

Приведем условия при которых основная задача имеет решение.

Пусть $\lambda_0(t, z, \mu) \leq \lambda_0(t, z, \mu_0)$, $0 \leq \mu, \mu \neq \mu_0$. Тогда для любого $x_0$, $||x_0|| \leq \delta_0$ , $||x(t : +\infty, x_0, u) - x_0|| \leq M(\delta_0, \mu_0)$ и при $\mu = \mu_0$ справедлива оценка

$$I \leq \int\limits_T^{+\infty} \lambda_0(t, M(\delta_0, \mu), \mu)dt,$$

существование функции $M$ вытекает из абсолютно равномерной ограниченности решений уравнения (1.1).

Будем считать, что управление $u \in K$ удовлетворяет условию Липшица: $||u(t_1, x_1) - u(t_2, x_2)|| \leq L_1|t_1 - t_2| + L_2||x_1 - x_2||$; $L_1$, $L_2 - const$. В этом случае множество

$$S(t) = \{(x(t : +\infty, x_0, u), u) : ||x_0|| \leq \delta_0,\ u \in K,\ T \leq t < +\infty\}$$

равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Поэтому непрерывный функционал $I_r$ на $S_r(t) = S(t)$, $T \leq t \leq r$ имеет вид

$$I_r = \int\limits_T^r G_0(s, x(s : +\infty, x_0, u) - x_0, u(s, x(s : +\infty, x_0, u) - x_0))ds$$

и по теореме Вейерштрасса достигает минимума при любом $r \geq T$. Пусть он достигается в точке $(x_0(t : +\infty, x_0, u_0), u_0(t, x_0(t : +\infty, x_0, u_0)))$, $T \leq t \leq r$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует пара $(x(t : +\infty, x_0, u), u(t, x(t : +\infty, x_0, u)))$, $T \leq t \leq r$ такая, что справедливо

$$G_0(t, x(t : +\infty, x_0, u) - x_0, u(t, x(t : +\infty, x_0, u) - x_0)) <$$

$$< G_0(t, x_0(t : +\infty, x_0, u_0) - x_0, u(t, x(t : +\infty, x_0, u_0) - x_0)) + \varepsilon,\ T \leq t \leq r.$$

Поэтому существует последовательность

$$(x_n(t : +\infty, x_0, u_n), u_n(t, x_n(t : +\infty, x_0, u_n))), \tag{1.4}$$

равномерно сходящаяся при $n \to +\infty$ на сегменте $T \leq t \leq r$ к паре

$$(x_0(t : +\infty, x_0, u_0), u_0(t, x_0(t : +\infty, x_0, u_0))),\ T \leq t \leq r. \tag{1.5}$$

Рассматривая вложенную систему сегментов $[T, r] \subset [T, r_1] \subset ... \subset [T, r_n] \subset ...$, $r_n > r_{n-1}, r_0 = r$, получим: последовательность (1.4) при $n \to +\infty$ на полуоси $T \leq t < +\infty$ сходится к паре (1.5) равномерно на любом сегменте из $[T, +\infty)$. Поэтому существует минимум функционала $I$:

$$\int\limits_T^{+\infty} G_0(s, x_0(s : +\infty, x_0, u_0) - x_0, u_0(s, x_0(s : +\infty, x_0, u_0) - x_0))ds \leq$$

$$\leq \int\limits_T^{+\infty} G_0(s, x(s : +\infty, x_0, u) - x_0, u(s, x(s : +\infty, x_0, u) - x_0))ds$$

при всех $u \in K$.

Далее решение задачи оптимальной стабилизации программного движения при абсолютно равномерно устойчивых решениях вида (1.5) можно найти применяя принцип максимума Понтрягина [7].

## Список литературы


1. Воскресенский Е. В., “Оптимальная стабилизация программного движения”, *Труды Средневолжского математического общества*, **6**:1 (2004), 14–19.

2. Мамедова Т. Ф., Десяев Е. В., “О построении управления для нелинейных динамических систем”, *Научно-технический вестник Поволжья*, 2012, №1, 154.

3. Мамедова Т. Ф., Егорова Д. К., “Об асимптотическом равновесии некоторых экономических систем”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:2 (2013), 55–58.

4. Мамедова Т. Ф., Егорова Д. К., “О стабилизации экономической системы асимптотическими методами С”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **10**:2 (2008), 243–245.

5. Воскресенский Е. В., “О стабилизации программного движения”, *Укр.мат.журнал*, **55**:11 (2003), 1450–1458.

6. Воскресенский Е. В., *О полиномиальных аттракторах обыкновенных дифференциальных уравнений*, СВМО, Саранск, 1998, 22 с.

7. Воскресенский Е. В., *Методы сравнения в нелинейном анализе*, Из-во Саратовского университета, Саранск, 1990, 224 с.

## The optimal stabilization of programmed motion for the absolutely uniform stability solutions

**© T. F. Mamedova [4], D. K. Egorova [5] E. V. Desyaev [6]**

**Abstract.** In this article the problem of optimal stabilization of programmed motion in the sense of absolutely uniform stability that distinguishes this statement from the classic problem when software motion is asymptotically stable is investigated.

**Key Words:** optimal stabilization program movement, absolutely uniformly bounded solutions

[4] Professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; mamedovatf@yandex.ru.

[5] Associate professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; egorovadk@mail.ru.

[6] Associate professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; desyaev@rambler.ru