УДК 519.853:517.988

Версия непрерывного проекционного метода минимизации второго порядка с переменной метрикой

© В. Г. Малинов[1]

Аннотация. Предлагается новая версия непрерывного проекционного метода второго порядка с переменной метрикой для задач минимизации выпуклых дифференцируемых по Фреше функций на простом множестве в гильбертовом пространстве. Доказана сходимость для выпуклых функций; для сильно выпуклых функций получена оценка экспоненциальной скорости сходимости метода, которая выше, чем у других аналогичных методов.

Ключевые слова: минимизация, простое множество, непрерывный проекционный метод переменной метрики, сходимость, скорость сходимости

1. Постановка задачи

1.1. Рассмотрим задачу минимизации на простом множестве

$$f(\mathbf{x}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{x} \in Q \subset H, \tag{1.1}$$

где Q – выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства H, нормированного скалярным произведением, $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2} \ \forall \ \mathbf{x} \in H$; функция $f(\mathbf{x})$ определена и непрерывно дифференцируема по Фреше на H, её градиент удовлетворяет условию Липшица: $\exists \ L = const > 0$,

$$\|\nabla f(\mathbf{u}) - \nabla f(\mathbf{x})\| \ \leq \ L\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\| \ \mathbf{u}, \mathbf{x} \in H. \tag{1.2}$$

Предполагаем, что условия существования решения задачи выполнены,

$$\inf f(\mathbf{x}) = f_* > -\infty, \ \mathbf{x} \in Q; \quad Q_* = \{\mathbf{x} \in Q : \ f(\mathbf{x}) = f_*\} \neq \emptyset. \tag{1.3}$$

1.2. Для решения задачи (1.1)–(1.3) пользуемся непрерывным методом минимизации (НММ). Напомним, что НММ от первого до высоких порядков записываются в виде задачи Коши для ОДУ соответствующих порядков с постоянными или переменными коэффициентами. НММ исследовались во многих работах (см., [1]– [5]). Простейшим из них является непрерывный градиентный метод $\frac{dx}{dt} = -\alpha \nabla f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ без оператора проектирования [3]– [5].

Если в правой части ОДУ имеется оператор проектирования вектора или векторного выражения, то НММ называют проекционным (НПММ). Идея такого метода обоснована в работах [1]– [3]. Их подмножество — непрерывные

[1] Доцент кафедры ЭММиИТ, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; vgmalinov@mail.ru

методы проекции градиента (НМПГ), в которых проектируемое векторное выражение включает градиент минимизируемой функции $f(\mathbf{x}(\mathbf{t}))$ в точке $\mathbf{x}(t)$. НМПГ первого порядка записывается в форме задачи Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} + \mathbf{x}(\mathbf{t}) = P_Q[\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \alpha \nabla f(\mathbf{x}(\mathbf{t}))],\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \tag{1.1}$$

Итеративный аналог НМПГ первого порядка — МПГ $\mathbf{x}^{k+1} = P_Q[\mathbf{x}^k - \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}^k)]$, $\mathbf{x}^0 \in Q$, $k \geq 0$, изучался в работах [1] – [8].

В проекционных методах решения задачи (1.1) ограничения, образующие простое множество $Q \subset H$, учитываются в операторе проектирования; проекция легко вычисляется непосредственно, если эти множества — шар, положительный ортант, параллелепипед [1], [2].

Вычислительный процесс минимизации функции $f(\mathbf{x}(t))$ в НММ осуществляется на основе численного метода интегрирования систем ОДУ. Если в правой части ОДУ присутствует функция $f(\mathbf{x}(t))$ с "овражными"гиперповерхностями уровней, то предпочтительно применение численного метода интегрирования "жёстких"систем ОДУ.

НМПГ второго порядка вида

$$\begin{gathered} \mu \mathbf{x}''(t) + \beta \mathbf{x}'(t) + \mathbf{x} = P_Q[\mathbf{x} - \alpha \nabla f(\mathbf{x})], \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}^{'}(t_0) = \mathbf{x}^1,\ t \geq 0, \end{gathered} \tag{1.4}$$

где числа $\mu > 0$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$ – параметры метода, исследован в работах [2], [3]. Другие НМПГ второго порядка предложены в работах [9], [13]. Их итеративные аналоги — двухшаговые МПГ; например, это известный метод

$$\begin{gathered} \mathbf{x}^{k+1} = P_Q[\mathbf{x}^k - \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}^k) + \beta_k(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1})], \\ \mathbf{x}^0 \in Q,\ k = 0, 1, 2, ..., \end{gathered}$$

детально исследованный в работе [2].

В более общих НПММ проектируемое векторное выражение в правой части ОДУ образуется с помощью градиента $\nabla f(\mathbf{z}(t))$ в экстраполированной точке, например, вида $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + \alpha(t)\mathbf{x}'(t)$, где $\mathbf{x}'(t)$ – производная, а $\alpha(t)$ – параметр соответствующего метода (см., например, [8], [9]).

В работах [10], [12] исследован НПММ второго порядка

$$\begin{gathered} \sigma(t)\mathbf{x}^{''} + \mathbf{x}^{'} + \mathbf{x}(t) = P_Q\left(\mathbf{y}(t) + \beta(t)(\gamma_1(t)\mathbf{x}^{'}(t) - \gamma_2(t)\nabla f(\mathbf{y}(t)))\right), \\ t \geq 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}^{'}(0) = \mathbf{x}^1,\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \alpha(t)\mathbf{x}^{'}(t), \end{gathered} \tag{1.5}$$

Доказана сходимость метода и получена оценка экспоненциальной скорости сходимости. Для НПММ вида (1.5) различные итеративные аналоги — проекционные обобщенные двухшаговые методы (ПОДМ), исследованные в работах [9], [11], [14], [15] и других.

Ввиду не безупречности исследованных НМПГ и НПММ при минимизации функций с "овражными"гиперповерхностями уровней и явных преимуществ методов переменной метрики (МПМ) в локальной скорости сходимости, были предложены НМПГ с переменной метрикой (НМПГПМ) первого и второго порядков с оператором $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ *переменной метрики*, доказана сходимость методов. НМПГПМ второго порядка

$$\beta(t)\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{u})\mathbf{u}'' + \mathbf{u}' + \mathbf{u} = P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{u})}[\mathbf{u}(t) - \alpha(t)\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{u})\nabla f(\mathbf{u})],$$
$$t \geq 0,\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0,\ \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}^1,$$

где $\forall\ \mathbf{u}^0,\ \mathbf{u}^1 \in H$ – начальные точки; $P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{u})}$ – оператор проекции в метрике $\mathbf{G}(\mathbf{u})$; $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{G}(\mathbf{u})} = (\mathbf{G}(\mathbf{u})\mathbf{v}, \mathbf{v})$, изучался в работе [17]. При $\beta(t) = 0$ метод превращается в НМПГПМ первого порядка [16], а при $\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \mathbf{I}$ будет НМПГ второго порядка, тогда $\mathbf{G}$ – проекция $P_Q^{\mathbf{G}}(\mathbf{v})$ меняется на обычную проекцию $P_Q[\mathbf{v}]$.

НПММ с переменной метрикой (НПММПМ) исследованы в работах [18]–[19], а их итеративные аналоги, ПОДМПМ — в работах [20], [21] и других. В работах [22], [23] исследованы непрерывные методы линеаризации (МЛ) второго порядка, в том числе в [23] - МЛ с переменной метрикой.

Как видно на примерах, имеются по два вида проекционных МПМ и непрерывных, и итеративных, с операторами проектирования: а) P_Q — в исходной метрике; б) $P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{x})}$ — в переменной метрике $\mathbf{G}(\mathbf{x})$. Заметим, *первые МПМ* появились итеративные не проекционные, для решения задач *безусловной минимизации*; их краткие обзоры имеются в работах [4], [5], а прекрасный расширенный обзор — в работе [24].

В предлагаемой работе исследуется новая версия НПММПМ второго порядка с проектированием в исходной обычной метрике для решения задач вида (1.1), имеющий преимущества в скорости сходимости в сравнении с другими НПММПМ.

2. Метод решения задачи

Пусть функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in C^2[0, +\infty)$ является решением задачи Коши

$$\alpha(t)\mathbf{x}''(t) + \beta(t)\mathbf{x}'(t) + \mathbf{x}(t) = P_Q[\mathbf{y}(t) - \gamma(t)\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{y}(t))\nabla f(\mathbf{y}(t))],$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \sigma(t)\mathbf{x}'(t),\ t \geq 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}^1, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1 \in H$; параметры метода $\alpha(t) \in C^2[0;+\infty)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\sigma(t) \in C^1[0;+\infty)$ — заданные функции; оператор $\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{y}(t))$ в (2.1), обратный к оператору метрики в точке $\mathbf{y}(t)$, участвует в построении вектора направления движения к минимуму задачи; производные $\mathbf{x}'(t) = d\mathbf{x}(t)/dt$,

$\mathbf{x}^{''}(t) = d^2\mathbf{x}(t)/dt^2$, в смысле главы 4 книги [25]; в правой части (2.1) проектирование производится в исходной метрике. Предполагаем, что решение задачи Коши (2.1) существует и единственно на полуоси $[0, \infty)$.

Отметим, что при $\alpha(t) = 0$, $\sigma(t) = 0$, $\beta(t) = 1$ и использовании в (2.1) оператора проектирования в переменной метрике, метод (2.1) превращается в НМПГПМ первого порядка, исследованный в [16], а при $\mathbf{G}(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{I}$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t)$ из (2.1) получаем НМПГ второго порядка.

3. Исследование сходимости метода

В следующей теореме обосновываются достаточные условия сходимости метода (2.1) при $H = E^n$, где E^n – евклидово n- мерное пространство, нормированное тем же скалярным произведением, что и H. (Аргумент t у функции $\mathbf{x}(t)$, её производных и параметров метода для краткости часто опускаем.)

Теорема 1. *Пусть выполнены условия: 1) множество $Q \subset E^n$ выпукло и замкнуто; 2) функция $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$ выпукла; 3) существует выпуклая функция $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(E^n)$ такая, что градиент*

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}); \tag{3.1}$$

4) оператор $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ переменной метрики таков, что

$$m\|\mathbf{u}\|^2 \leq (\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq M\|\mathbf{u}\|^2 \; \forall \, \mathbf{u}, \mathbf{x} \in E^n, \; 0 < m \leq M; \tag{3.2}$$

5) функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\sigma(t)$ таковы, что

$$\begin{gathered} \alpha(t) \in C^2[0,\infty), \; \beta(t), \, \gamma(t), \sigma(t) \in C^1[0,\infty), \\ \alpha(t) \geq \alpha_0 > 0, \; \beta(t) \geq \beta_0 > 0, \; \beta(t) > \sigma(t) > 0, \\ \lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \alpha_0, \; \lim_{t\to\infty} \beta(t) = \beta_0, \; \gamma(0) \geq \gamma(t) \geq \lim_{t\to\infty} \gamma(t) = \gamma_0 > 0; \\ \alpha^{'}(t) \leq 0, \; \beta^{'}(t) < \sigma^{'}(t) \leq 0, \; \gamma^{'}(t) \leq 0, \; \alpha^{''}(t) \geq 0; \\ (\alpha(t)\gamma\sigma(t))' < (\alpha\beta(t)\gamma)', \; \alpha(t) \leq \beta^2(t), \; \alpha\beta + 2\beta^2 + \beta^3 > 2, \\ 0 < \gamma(t) < 4(\beta^2 - \alpha)/[L(\beta - \sigma)^2], \; \sigma(t) < (\alpha^2 + 2\beta^3(t))/(4\beta^2(t)), \; t \geq 0. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Тогда при любых начальных приближениях $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1 \in E^n$ существует такая точка $\mathbf{x}^* \in Q_*$, что

$$\int_0^\infty (\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x}^{'}(s)\|^2 + \|\mathbf{x}^{''}(s)\|^2) \, ds < +\infty,$$

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| + \|\mathbf{x}^{'}(t)\| + \|\mathbf{x}^{''}(t)\| \;\longrightarrow\; 0, \quad t \to \infty, \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, отметим, что: 1) третье условие теоремы существенно, классы функций и операторов, удовлетворяющих

(3.1), не пусты [20]; 2) четвёртое условие теоремы гарантирует существование обратного оператора $\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x})\ \forall\, \mathbf{x} \in Q$. Далее, пользуясь (2.1) и свойством

$$(\mathbf{w}-\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{w}) \geq 0,\ \mathbf{u} \in Q \tag{3.5}$$

оператора проекции [1] получим вариационное неравенство

$$(\alpha(t)\mathbf{x}''(t) + \beta(t)\mathbf{x}'(t) + \gamma(t)\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{y}(t))\nabla f(\mathbf{y}(t)), \mathbf{u}-\mathbf{w}) \geq 0,\ t \geq 0,\ \mathbf{u} \in Q, \tag{3.6}$$

где $\mathbf{w} = \alpha(t)\mathbf{x}''(t) + \beta(t)\mathbf{x}'(t) + \mathbf{x} \in Q$.

В исходной метрике пространства E^n для $\mathbf{x}^* \in Q_*$ имеет место равенство [1], [16]

$$\mathbf{x}^* = P_Q[\mathbf{x}^* - \gamma\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*)]. \tag{3.7}$$

Пользуясь (2.1) и свойством (3.5) оператора проекции $\mathbf{w} = P_Q(\mathbf{v}) \in Q$ в E^n, из (3.7) имеем

$$\gamma(\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u}-\mathbf{x}^*) \geq 0,\ \mathbf{u} \in Q. \tag{3.8}$$

Поскольку $\gamma > 0$, отсюда следует неравенство $(\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u}-\mathbf{x}^*) \geq 0$, $\mathbf{u} \in Q$. Положим в (3.8) $\mathbf{u} = \mathbf{w} \in Q$, а в (3.6) возьмём $\mathbf{u} = \mathbf{x}^*$ и полученные неравенства сложим:

$$(\alpha(t)\mathbf{x}'' + \beta\mathbf{x}' + \gamma(\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{y})\nabla f(\mathbf{y}) - \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*)), \mathbf{x}^*-\mathbf{w}) \geq 0,\ t \geq 0. \tag{3.9}$$

Воспользуемся соотношением (3.1) в (3.9):

$$\begin{gathered}\|\alpha(t)\mathbf{x}'' + \beta(t)\mathbf{x}'\|^2 + (\alpha\mathbf{x}'' + \beta(t)\mathbf{x}', \mathbf{x}-\mathbf{x}^*) \leq \\ \leq \gamma(\nabla\varphi(\mathbf{y}(t)) - \nabla\varphi(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^*-\mathbf{w}),\ t \geq 0,\ \mathbf{x}^* \in Q_*.\end{gathered} \tag{3.10}$$

Скалярное произведение в правой части (3.10) оценим с помощью неравенства ([26], гл. 1)

$$\begin{gathered}(\nabla\varphi(\mathbf{y}) - \nabla\varphi(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^*-\mathbf{w}) \leq L\|\mathbf{y}-\mathbf{w}\|^2/4, \\ \mathbf{y}, \mathbf{x}^*, \mathbf{w} \in Q,\ \varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)\end{gathered}$$

и при

$$\begin{gathered}\|\mathbf{y}-\mathbf{w}\|^2 = \|\sigma\mathbf{x}' - (\alpha\mathbf{x}'' + \beta\mathbf{x}')\|^2 = \\ = (\sigma^2 - 2\beta\sigma)\|\mathbf{x}'\|^2 - 2\alpha\sigma(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + \|\alpha\mathbf{x}'' + \beta\mathbf{x}'\|^2;\end{gathered}$$

имеем

$$\begin{gathered}a_1(t)\|\alpha\mathbf{x}'' + \beta\mathbf{x}'\|^2 + [2\alpha\sigma(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + (2\beta\sigma - \sigma^2)\|\mathbf{x}'\|^2]L\gamma/4 + \\ +\alpha(\mathbf{x}'', \mathbf{x}-\mathbf{x}^*) + \beta(\mathbf{x}', \mathbf{x}-\mathbf{x}^*) \leq 0,\ t \geq 0,\ \mathbf{x}^* \in Q_*;\end{gathered}$$

преобразуем его к виду

$$\begin{gathered}a_1(t)\alpha^2\|\mathbf{x}''\|^2 + 2a_2(t)(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + a_3(t)\|\mathbf{x}'\|^2 + \\ +\alpha(\mathbf{x}'', \mathbf{x}-\mathbf{x}^*) + \beta(\mathbf{x}', \mathbf{x}-\mathbf{x}^*) \leq 0,\ t \geq 0,\ \mathbf{x}^* \in Q_*,\end{gathered} \tag{3.11}$$

где $a_1(t) = 1 - L\gamma(t)/4 > 0$, $a_2(t) = a_1\alpha(t)\beta(t) + L\alpha\gamma\sigma(t)/4 > 0$, $a_3(t) = a_1(t)\beta^2 + (2\beta\sigma - \sigma^2)L\gamma/4 > 0$, при условиях (3.3).

Используя тождества

$$\begin{gathered} 2(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') = \tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}'\|^2,\ 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*, \mathbf{x}') = \tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2, \\ 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*, \mathbf{x}'') = \tfrac{d^2}{dt^2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 - 2\|\mathbf{x}'\|^2,\ t \geq 0, \end{gathered} \tag{3.12}$$

от (3.11) приходим к неравенству

$$\begin{gathered} a_1(t)\alpha^2\|\mathbf{x}''\|^2 + a_2(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}'\|^2 + [a_3(t) - \alpha(t)]\|\mathbf{x}'\|^2 + \\ +\alpha(t)\tfrac{d^2}{dt^2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2/2 + \beta(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2/2 \leq 0,\ t \geq 0. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Проинтегрируем (3.13) на отрезке $[\xi, t]$, $t > \xi \geq 0$:

$$\begin{gathered} \int_\xi^t \{a_1(s)\alpha^2\|\mathbf{x}''\|^2 + a_{31}(s)\|\mathbf{x}'\|^2 + [\alpha''(s) - \beta'(s)]\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2/2\,\}\,ds + \\ +a_2(t)\|\mathbf{x}'\|^2 + \alpha(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2/2 + [\beta - \alpha'(t)]\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2/2 \leq \\ \leq C_1(\xi, \mathbf{x}^*),\ t > \xi \geq 0,\ \mathbf{x}^* \in Q_*, \end{gathered} \tag{3.14}$$

где $C_1(\xi, \mathbf{x}^*) = a_2(\xi)\|\mathbf{x}'(\xi)\|^2 + \alpha(\xi)(\mathbf{x}'(\xi), \mathbf{x}(\xi) - \mathbf{x}^*) + [\beta(\xi) - \alpha'(\xi)]\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2/2$, $a_{31}(s) = a_3(s) - \alpha(s) - a_2'(s) > 0$, $\gamma(s) < 4(\beta^2 - \alpha)/[L(\beta - \sigma)^2] = \gamma^{11}$, $\alpha''(s) - \beta'(s) > 0$, $\beta(t) - \alpha'(t) \geq \beta(t) > 0\ \forall\ t \geq 0$ при условиях (3.3) и интеграл положителен. Из (3.14) без положительных слагаемых следует

$$\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}\frac{d}{dt}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq 2C_1(\xi, \mathbf{x}^*)/\beta(t),\ t > \xi \geq 0, \mathbf{x}^* \in Q_*.$$

Умножив это неравенство на $\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}e(t)$, где $e(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\beta(s)\,ds}{\alpha(s)}\right) > 0$, получим:

$$e(t)\frac{d}{dt}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 + \beta(t)e(t)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2/\alpha(t) \leq 2e(t)C_1(\xi, \mathbf{x}^*)/\alpha_0,\ t > \xi \geq 0.$$

Отсюда, учитывая, что $e'(t) = \beta(t)e(t)/\alpha(t)$, $\alpha(t) \geq \alpha_0 > 0$, имеем

$$\frac{d}{dt}[e(t)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2] \leq 2e(t)C_1(\xi, \mathbf{x}^*)/\alpha_0,\ t > \xi \geq 0. \tag{3.15}$$

Проинтегрируем (3.15) на отрезке $[\xi, t]$, умножим полученное неравенство на $e^{-1}(t)$, тогда придём к неравенству

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq 2\frac{C_1(\xi, \mathbf{x}^*)}{\alpha_0 e(t)}\int_\xi^t e(s)\,ds + \frac{e(\xi)\|\mathbf{x}(\xi) - \mathbf{x}^*\|^2}{e(t)},\ t > \xi \geq 0.$$

Отсюда следует:

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq 2C_1(\xi, \mathbf{x}^*)/\alpha_0,\ t > \xi \geq 0,\ \mathbf{x}^* \in Q_*. \tag{3.16}$$

Далее оценим второе и третье слагаемые во втором соотношении из (3.4), пользуясь (3.14) и (3.11). Существуют числа $r > 0$ и $\eta \geq 0$ такие, что для $s \geq \eta \geq \xi \geq 0$ имеют место оценки для коэффициентов подынтегральных слагаемых в (3.14): $a_3(s) - \alpha(s) - a_2'(s) \geq r > 0$, $(\alpha''(s) - \beta'(s))/2 \geq r > 0$, $a_1(s)\alpha^2 \geq r > 0$. Учитывая их, (3.3) и (3.12), из (3.14) получаем:

$$\begin{gathered} r\int_\xi^t \{\|\mathbf{x}''\|^2 + \|\mathbf{x}'\|^2 + \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2\}\, ds + 0.5\beta(t)\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2 + \\ +\alpha(t)(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*) + a_2(t)\|\mathbf{x}'(t)\|^2 \leq \\ \leq C_1(\xi, \mathbf{x}^*),\ t > \xi \geq \eta \geq 0. \end{gathered} \tag{3.17}$$

В (3.17) третье слагаемое оценим с помощью неравенства

$$2|ab| \leq \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2\ \forall\, a, b, \varepsilon > 0 \tag{3.18}$$

при $\varepsilon = 1/\beta$, $a(t) = \alpha \mathbf{x}'(t)$, $b = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$, то есть

$$(\alpha(t)\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*) \geq -\frac{\alpha^2}{2\beta}\|\mathbf{x}'(t)\|^2 - \frac{\beta}{2}\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*)\|^2.$$

Тогда

$$\begin{gathered} r\int_\xi^t \{\|\mathbf{x}''\|^2 + \|\mathbf{x}'\|^2 + \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2\}\, ds + \\ +[a_2(t) - \alpha^2/(2\beta)]\|\mathbf{x}'(t)\|^2 \leq C_1(\xi, \mathbf{x}^*),\ t > \eta \geq \xi \geq 0, \end{gathered} \tag{3.19}$$

где коэффициент при втором слагаемом неотрицателен при условиях (3.3). Кроме того, $\forall\, t \geq \eta$ имеем $2a_3\beta - \alpha^2 \geq \alpha_0 r > 0$. Тогда из (3.19) следует

$$\begin{gathered} \int_\xi^t \{\|\mathbf{x}''\|^2 + \|\mathbf{x}'\|^2 + \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2\}\, ds \leq C_1(\xi, \mathbf{x}^*)/r, \\ \|\mathbf{x}'(t)\|^2 \leq 2\beta(\alpha_0 r)^{-1} C_1(\xi, \mathbf{x}^*),\ t > \eta \geq \xi \geq 0. \end{gathered}$$

Отсюда с учетом условий (3.3) имеем:

$$\int_0^\infty \{\|\mathbf{x}''(s)\|^2 + \|\mathbf{x}'\|^2 + \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2\}\, ds < +\infty\ \forall\, \mathbf{x}^* \in Q_*, \tag{3.20}$$

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\|\mathbf{x}'\|^2 \leq 2\beta_0(\alpha_0 r)^{-1} C_1(\xi, \mathbf{x}^*),\ t > \eta \geq \xi \geq 0. \tag{3.21}$$

Далее оценим $\|\mathbf{x}''(t)\|$ с помощью (3.11) и (3.18). С учётом оценок

$$\begin{gathered} 2a_2(\mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'(t)) \geq -a_2\alpha\beta^2\|\mathbf{x}''(t)\|^2 - (a_1\beta + L\gamma\sigma/4)\beta^{-2}\|\mathbf{x}'\|^2, \\ \alpha(\mathbf{x}'', \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*) \geq -\alpha^2\beta^2\|\mathbf{x}''(t)\|^2/2 - 0.5\beta^{-2}\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2, \\ (\beta\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*) \geq -\beta\|\mathbf{x}'\|^2/2 - \beta\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2/2, \end{gathered}$$

получаемых из (3.18) соответственно при $\varepsilon = \alpha\beta^2$, $\varepsilon = \alpha\beta^2$, $\varepsilon = \beta^{-1}$, от (3.11) приходим к неравенству

$$a_4(t)\|\mathbf{x}''(t)\|^2 \leq a_5(t)\|\mathbf{x}'(t)\|^2 + a_6(t)\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2,\ t \geq 0,\ \mathbf{x}^* \in Q_*, \tag{3.22}$$

где выполняются неравенства: $a_4(t) = a_1\alpha^2 - a_2\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2/2 \geq \alpha_0^2\beta_0^2/2$, $a_5(t) = a_2\alpha^{-1}\beta^2 + \beta/2 - a_3 \leq (2+\beta_0^2 - 2\beta_0^3)\alpha_0 r/\beta_0$, $a_6(t) = (1+\beta^3)/(2\beta^2) \leq (1+\beta_0^3)/(2\beta_0^2)$; $0 < \sigma < \beta < 1$, $\gamma \leq 4(1-\beta^2-\beta^3)/[L(1+\beta^2\sigma-\beta^3)] = \gamma^{12} < 4/L$, $\gamma < \gamma^{11} < \gamma^{12}$ при $\alpha\beta + 2\beta^2 + \beta^3 > 2$. С учётом этих оценок и (3.16), (3.21), из (3.22) следует

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\|\mathbf{x}^{''}(t)\|^2 \leq C_2(\xi,\mathbf{x}^*),\ t > \eta \geq \xi \geq 0, \tag{3.23}$$

где $C_2(\xi,\mathbf{x}^*) = 4[(\alpha_0\beta_0)^{-2}(2+\beta_0^2-2\beta_0^3) + \alpha_0^{-3}\beta_0^{-4}(1+\beta_0^3)]C_1(\xi,\mathbf{x}^*)$.

Асимптотическую устойчивость траектории $\mathbf{x}(t)$ системы (2.1) и единственность предельной точки траектории можно показать способом, аналогичным использованным в работах [2], [3], [17].

Далее из (3.16) следует, что траектория $\mathbf{x}(t)$ ограничена, а в силу (3.20)

$$\underline{\lim}_{t\to\infty}[\|\mathbf{x}^{''}(t)\|^2 + \|\mathbf{x}^{'}\|^2 + \|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*\|^2] = 0\ \forall\ \mathbf{x}^* \in Q_*$$

и существует подпоследовательность $\{t_i\}$, что

$$\|\mathbf{x}^{''}(t_i)\| \to 0,\ \|\mathbf{x}^{'}(t_i)\| \to 0,\ \|\mathbf{x}(t_i)-\mathbf{x}^*\| \to 0,\ i\to\infty,\ \mathbf{x}^* \in Q_*. \tag{3.24}$$

Для $t = t_i$ в (3.17) обозначим при всех $t_i \geq t_1$

$$a_2(t_i)\|\mathbf{x}^{'}(t_i)\|^2 + \alpha(t_i)(\mathbf{x}^{'}(t_i),\mathbf{x}(t_i)-\mathbf{x}^*) + 0.5\beta(t_i)\|\mathbf{x}(t_i)-\mathbf{x}^*\|^2 = C_1(t_i,\mathbf{x}^*).$$

С учётом (3.16), (3.21) и (3.24), имеем

$$C_1(t_i,\mathbf{x}^*) \to 0,\ i\to\infty,\ \mathbf{x}^* \in Q_*. \tag{3.25}$$

Тогда из (3.20) следует первое соотношение (3.4), а из (3.16), (3.21), (3.23), (3.24), (3.25) следует второе соотношение из (3.4).

Теорема 1 доказана.

4. Оценка скорости сходимости

Для оценки скорости сходимости метода (2.1) предположим, что функция $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$ сильно выпуклая и воспользуемся результатами теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того: 1) функция $f(\mathbf{x})$ сильно выпукла с константой сильной выпуклости $\kappa_1 > 0$; 2) функция $\varphi(\mathbf{x})$ сильно выпукла с константой сильной выпуклости $\kappa > 0$ и имеет место равенство*

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x})\ \forall\ \mathbf{x} \in H;$$

3) функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\sigma(t)$ удовлетворяют условиям (3.3) и, кроме того,

$$\begin{gathered} 0<\alpha(t)<min\{0.5\beta^2(t),(1-\beta^2(t))/2\},\ 0<\sigma(t)<\beta(t)<1,\\ 0<\gamma(t)<2\beta(t)/[(L+2\kappa)(\beta(t)-\sigma(t))],\ 2\kappa=\mu,\\ 0<\sigma(t)<min\{\tfrac{(L+\mu)^2[4\alpha(t)-(\beta-\alpha')\beta^2]}{8L\mu(\beta^2-\alpha)};\tfrac{\beta(1-2\alpha-\beta^2)}{2-2\alpha-\beta^2}\},\ t\geq 0. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Тогда при любых начальных приближениях $\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\in E^n$ траектория метода (2.1) сходится к точке $\mathbf{x}^*\in Q_*$ и имеют место оценки $\forall\, t\geq 0$:

$$\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*\|\leq\{2C_5(t)[C_3g(t)+C_4]\}^{1/2}, \tag{4.2}$$

$$\|\mathbf{x}'(t)\|\leq\{[2b_{21}(t)C_5(t)C_6(t)+C_3b_{16}^{-1}](1-\beta_0)^{-1}\}^{1/2}, \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}''(t)\|\leq\{2\alpha_0^{-3}(2-\beta_0^2)\beta_0^{-1}(1-\beta_0)^{-1}(C_3\alpha^{-1}(t)+\\ +0.5\beta^{-2}(t)e^{-1}(t)C_6(t))+\alpha_0^{-4}(1+\alpha_0)C_5(t)C_6(t)\}^{1/2}, \end{gathered} \tag{4.4}$$

где $e(t)=e^{\alpha(t)}$; $C_3=0.5(b_{12}(0)-\alpha'(0))\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\|^2+\alpha(0)(\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*)+b_{16}(0)\|\mathbf{x}^1\|^2$; $C_4=0.5b_{16}^{-1}(0)\alpha(0)e(0)$; $C_5(t)=b_{16}(t)(e(t)\alpha(t))^{-1}$; $C_6(t)=C_3g(t)+C_4$; $b_{11}(t)=1-(L+\mu)\gamma(t)/4$; $g(t)=\int_0^t e(s)b_{16}^{-1}(s)\,ds$; $b_{12}(t)=\beta(t)+2L\mu\gamma\sigma/(L+\mu)$; $b_{13}(t)=(L+\mu)\alpha\gamma\sigma/2$; $b_{16}(t)=b_{11}\alpha\beta+b_{13}(t)/2$; $b_{21}(t)=b_{11}\alpha^2-0.5\alpha^3-b_{16}\alpha\beta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что при выполнении всех условий теоремы 2: 1) множество минимумов $Q_*=\{\mathbf{x}^*\}$ ввиду сильной выпуклости функции $f(\mathbf{x})$; 2) результаты теоремы 1 о сходимости метода (2.1) справедливы.

Из неравенства (3.10), где в условиях данной теоремы функция $\varphi(\mathbf{x})$ сильно выпукла с константой $\kappa>0$, следует:

$$\begin{gathered} \|\alpha(t)\mathbf{x}''+\beta(t)\mathbf{x}'\|^2+(\alpha\mathbf{x}'',\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)+\beta(\mathbf{x}',\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)\leq\\ \leq\gamma(\nabla\varphi(\mathbf{y})-\nabla\varphi(\mathbf{x}^*),\mathbf{x}^*-\mathbf{w}),\ t\geq 0,\ \mathbf{x}^*\in Q_*. \end{gathered} \tag{4.5}$$

В правой части (4.5) воспользуемся неравенством ([26], гл. 1)

$$(\nabla\varphi(\mathbf{y})-\nabla\varphi(\mathbf{x}^*),\mathbf{x}^*-\mathbf{w})\leq(L+\mu)\|\mathbf{y}-\mathbf{w}\|^2/4-\frac{L\mu}{L+\mu}\|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\|^2$$

$\mathbf{y}$, $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{w}\in Q$, равенством

$$\begin{gathered} \|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\|^2=\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*+\sigma(t)\mathbf{x}'\|^2=\\ =\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2+2\sigma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*,\mathbf{x}')+\sigma^2\|\mathbf{x}'\|^2 \end{gathered}$$

и выражением для $\|\mathbf{y}-\mathbf{w}\|^2$, приведённым при выводе (3.11). Тогда из (4.5) следует

$$\begin{gathered} b_{11}(t)\|\alpha\mathbf{x}''+\beta\mathbf{x}'\|^2+(\alpha\mathbf{x}'',\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)+b_{12}(t)(\mathbf{x}',\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)+\\ +b_{13}(t)(\mathbf{x}'',\mathbf{x}')+b_{14}(t)\|\mathbf{x}'\|^2+\\ +b_{15}(t)\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2\leq 0,\ t\geq 0,\ \mathbf{x}^*\in Q_*, \end{gathered} \tag{4.6}$$

где $b_{11}(t)=1-(L+\mu)\gamma(t)/4$, $b_{12}=\beta+2L\mu\gamma\sigma/(L+\mu)$, $b_{13}=(L+\mu)\alpha\gamma\sigma/2$, $b_{14}=(L+\mu)\gamma(t)(2\beta\sigma-\sigma^2)+L\mu\gamma\sigma^2/(L+\mu)$, $b_{15}=L\mu\gamma(t)/(L+\mu)$. В (4.6) распишем первый квадрат нормы и воспользуемся тождествами (3.12). Тогда

$$\begin{gathered} b_{11}(t)\alpha^2\|\mathbf{x}''\|^2+(b_{11}\beta^2+b_{14}-\alpha)\|\mathbf{x}'\|^2+b_{16}\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}'\|^2+ \\ +0.5\alpha\tfrac{d^2}{dt^2}\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2+0.5b_{12}(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2+ \\ +b_{15}(t)\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2\le 0,\ t\ge 0,\ \mathbf{x}^*\in Q_*, \end{gathered} \tag{4.7}$$

где $b_{16}=b_{11}\alpha\beta+b_{13}/2$, $b_{16}>0$ при $\gamma<4/(L+\mu)=\gamma^{20}<4\beta/[(L+\mu)(\beta-\sigma)]$.

Проинтегрируем (4.7) на отрезке $[0;t]$, тогда получим:

$$\begin{gathered} \int_0^t\left(b_{11}(s)\alpha^2(s)\|\mathbf{x}''(s)\|^2+b_{17}\|\mathbf{x}'\|^2+b_{18}\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2\right)ds+b_{16}(t)\|\mathbf{x}'\|^2+ \\ +0.5(b_{12}(t)-\alpha')\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2+0.5\alpha(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2\le C_3,\ t\ge 0, \end{gathered}$$

где $b_{17}(s)=b_{11}\beta^2(s)+b_{14}-\alpha(s)-b'_{16}(s)>0$, $b_{18}=b_{15}+0.5(\alpha''(s)-b'_{12}(s))>0$ при условиях (4.1); $C_3=0.5(b_{12}(0)-\alpha'(0))\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\|^2+\alpha(0)(\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*)+b_{16}(0)\|\mathbf{x}^1\|^2$ с учетом (2.1), (3.12); $\gamma<\gamma^{21}=4(\beta^2-\alpha)/[(L+\mu)\beta^2]<\gamma^{20}$. Отсюда, поскольку интеграл положителен ввиду положительности подынтегральных слагаемых, после умножения на $[b_{16}(t)]^{-1}$, следует неравенство

$$\begin{gathered} 0.5[b_{16}(t)]^{-1}[(b_{12}(t)-\alpha')\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2+\alpha(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2]+ \\ +\|\mathbf{x}'\|^2\le C_3b_{16}^{-1}(t),\ t\ge 0. \end{gathered} \tag{4.8}$$

Умножив (4.8) на функцию $e(t)=exp(\alpha(t))>0$, проинтегрируем полученное неравенство на отрезке $[0;t]$:

$$\begin{gathered} \int_0^t\left(e(s)\|\mathbf{x}'\|^2+b_{19}(s)\|\mathbf{x}(s)-\mathbf{x}^*\|^2\right)ds+ \\ +0.5b_{16}^{-1}(t)\alpha(t)e(t)\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*\|^2\le C_3\int_0^t b_{16}^{-1}(s)e(s)\,ds+C_4,\ t\ge 0, \end{gathered}$$

где $C_4=b_{16}^{-1}(0)\alpha(0)e(0)\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\|^2$; $b_{19}(s)=0.5[e(s)b_{16}^{-1}(s)(b_{12}-\alpha')-(\alpha(s)e(s)b_{16}^{-1}(s))']>0$ при $b_{12}(s)-\alpha'>0$, $b_{16}^{-1}>0$, $[b_{16}^{-1}(t)]'>0$, $\beta>\sigma>0$. Отсюда, поскольку интеграл в левой части неравенства положителен, имеем

$$\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*\|^2\le 2C_5(t)(C_3g(t)+C_4),\ t\ge 0, \tag{4.9}$$

где $C_5(t)=b_{16}(t)(\alpha(t)e(t))^{-1}$, $g(t)=\int_0^t e(s)b_{16}^{-1}(s)\,ds$.

Здесь, поскольку справедливы соотношения $e(t)\to\infty$, $[g(t)e^{-1}(t)]\to 0$ при $t\to\infty$, правая часть неравенства (4.9) стремится к нулю. В (4.9) имеет место сходимость порядка $e^{-1}(t)$. Из (4.9) следует (4.2).

Для доказательства (4.3) и (4.4) выкладки аналогичны проведённым при получении (4.9). Из неравенства (4.8), пользуясь (3.12), имеем

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}'\|^2+0.5b_{16}^{-1}(t)(b_{12}(t)-\alpha')\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2+ \\ +0.5\alpha(t)(\mathbf{x}',\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)\le b_{22}(t),\ t\ge 0. \end{gathered} \tag{4.10}$$

Здесь третье слагаемое преобразуем с помощью (3.18), при $\varepsilon = \frac{b_{16}(t)\beta(t)}{\alpha(t)}$, то есть

$$\alpha b_{16}^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq -\beta\|\mathbf{x}'\|^2 - \alpha^2\beta^{-1}b_{16}^{-2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2,$$

тогда

$$(1-\beta)\|\mathbf{x}'(t)\|^2 \leq b_{21}(t)\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2 + b_{22}(t),\ t \geq 0,$$

где $b_{21}(t) = \alpha^2 b_{16}^{-2}\beta^{-1} - 0.5b_{16}^{-1}(t)(b_{12} - \alpha')$, $b_{22}(t) = C_3 b_{16}^{-1}(t)$, $b_{12} > 0$ при выполнении неравенств: $b_{11}\beta + (L+\mu)\gamma\sigma/4 \geq \beta/2$, то есть $0 < \gamma < 2\beta/[(L+\mu)(\beta-\sigma)] = \gamma^{22}$; $4\alpha - [\beta - \alpha' + 2L\mu\gamma\sigma/(L+\mu)]\beta^2 > 0$, $0 < \gamma < \gamma^{22} < \gamma^{21} < (L+\mu)[4\alpha - (\beta-\alpha')]\beta^2/(2L\mu\beta^2\sigma)$, $0 < \sigma < \sigma^{21} = (L+\mu)^2[4\alpha - (\beta-\alpha')\beta^2]/[8L\mu(\beta^2 - \alpha)]$, $0 < \alpha < \beta^2/2 < [4L\mu\beta + (L+\mu)^2(\beta-\alpha')]\beta^2/[8L\mu\beta + (L+\mu)^2]$.

Отсюда, учитывая оценку (4.9) и $\beta < 1$, получим неравенство

$$\|\mathbf{x}'(t)\|^2 \leq [2b_{21}(t)C_5(t)C_6(t) + C_3 b_{16}^{-1}](1-\beta(t))^{-1},\ t \geq 0, \tag{4.11}$$

где $C_6(t) = C_3 g(t) + C_4$. Из (4.11) следует (4.3).

Для оценки $\|\mathbf{x}''(t)\|$ запишем (4.6) в форме

$$\begin{gathered} b_{11}(t)\alpha^2\|\mathbf{x}''\|^2 + (b_{11}\beta^2 + b_{14})\|\mathbf{x}'\|^2 + \alpha(\mathbf{x}'', \mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \\ + b_{12}(t)(\mathbf{x}', \mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + 2b_{16}(t)(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + b_{15}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq 0,\ t \geq 0, \end{gathered} \tag{4.12}$$

где скалярные произведения оценим с помощью (3.18) соответственно при $\varepsilon = \alpha^2$, $\varepsilon = \alpha\beta$, $\varepsilon = \beta$:

$$\begin{gathered} \alpha(\mathbf{x}'', \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^* \geq -0.5\alpha^3\|\mathbf{x}''(t)\|^2/2 - 0.5\alpha^{-1}\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2, \\ 2b_{16}(\mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'(t)) \geq -b_{16}\alpha\beta\|\mathbf{x}''(t)\|^2 - b_{16}(\alpha\beta)^{-1}\|\mathbf{x}'\|^2, \\ b_{12}(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*) \geq -0.5b_{12}\beta\|\mathbf{x}'\|^2 - 0.5b_{12}\beta^{-1}\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2. \end{gathered}$$

Тогда из (4.12) следует

$$b_{23}(t)\|\mathbf{x}''\|^2 \leq b_{24}(t)\|\mathbf{x}'\|^2 + b_{25}(t)\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2,\ t \geq 0, \tag{4.13}$$

где $b_{23} = b_{11}\alpha^2 - 0.5\alpha^3 - b_{16}\alpha\beta = \alpha^2[1 - \alpha/2 - \beta^2 - (L+\mu)\gamma(1 - \beta^2 + \beta\sigma)] \geq \alpha^3/2 \geq \alpha_0^3/2$ при $0 < \gamma < \gamma^{22} \leq 4(1 - \alpha - \beta^2)/[(L+\mu)(1 - \beta^2 + \beta\sigma)]$, $0 < \sigma < \beta < 1$, $\sigma < (1 - 2\alpha - \beta^2)/(2 - 2\alpha - \beta^2)$; $b_{24} = b_{16}(\alpha\beta)^{-1} + 0.5b_{12}\beta - b_{11}\beta^2 - b_{14} < 0.5(2-\beta^2) \leq 0.5(2-\beta_0^2)$; $b_{25}(t) = 1/(2\alpha) + b_{12}(t)/(2\beta) - b_{15}(t) < 0.5\alpha_0^{-1}(1+\alpha_0)$.

С учётом этих оценок коэффициентов, (4.9), (4.11), из (4.13) имеем

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}''(t)\|^2 \leq 2\alpha_0^{-3}(2 - \beta_0^2)\beta_0^{-1}(1 - \beta_0)^{-1} \times \\ \times (C_3\alpha^{-1}(t) + 0.5\beta^{-2}(t)e^{-1}(t)C_6(t)) + \\ + 2\alpha_0^{-4}(1 + \alpha_0)C_5(t)C_6(t). \end{gathered} \tag{4.14}$$

Из (4.14) следует оценка (4.4).

Теорема 2 доказана.

Примечания.

1. Скорость сходимости НПММПМ второго порядка (2.1) выше, чем у методов первого порядка, в следующем смысле, указанном в работах [2], [3]: для НПММ второго порядка показатель сходимости всегда можно сделать больше, чем в методах первого порядка, за счет выбора параметров метода.

2. НПММПМ сочетают преимущества НПММ второго порядка и методов переменной метрики, поэтому они имеют лучшую скорость сходимости при минимизации функций с "овражными"гиперповерхностями уровней.

Список литературы

1. Васильев Ф. П., *Методы оптимизации*, Факториал Пресс, М., 2002, 824 с.
2. Антипин А. С., “Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования”, *Вопросы кибернетики. Вычислительные вопросы анализа больших систем*, 1989, 5–43.
3. Антипин А. С., “Минимизация выпуклых функций на выпуклых множествах с помощью дифференциальных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **30**:11 (1994), 1475–1486.
4. Евтушенко Ю. Г., *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации*, Наука, М., 1982, 432 с.
5. Поляк Б. Т., *Введение в оптимизацию*, Наука, М., 1983, 384 с.
6. Антипин А. С., “Об оценках скорости сходимости метода проекции градиента”, *Автоматика и Телемеханика*, 1995, № 6, 16–24.
7. Бобылев Н. А., Кутузов А. А., “О методе проекции градиента в задачах бесконечномерной оптимизации”, *Автоматика и Телемеханика*, 1995, № 5, 19–33.
8. Нурминский Е. А., “О скорости сходимости метода проекции градиента”, *Кибернетика*, 1973, № 5, 84–87.
9. Амочкина Т. В., Недич А., “Об одном варианте непрерывного метода проекции градиента второго порядка и его дискретном аналоге”, *Вестник МГУ, Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернет.*, 1995, № 2, 5–11.

10. Малинов В. Г., “Непрерывный проекционный метод минимизации второго порядка”, *Дифференциальные уравнения и применения. Тезисы докладов первой международной научно-практической конференции. 3 - 5 декабря 1996 г. С.-Петербург*, 1996, 147.

11. Малинов В. Г., “О двухшаговом четырехпараметрическом методе минимизации и его непрерывном аналоге”, *Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. Математическое моделирование и оптимальное управление*, 2001, № 1(23), 270–283.

12. Малинов В. Г., “О непрерывном проекционном методе минимизации второго порядка”, *Методы оптимизации и их приложения. Труды 12 Байкальской международной конференции. Иркутск, Байкал, 24 июня– 1 июля 2001г. Иркутск: ИСЭМ СО РАН*, **1А. Математическое программирование** (2001), 21–26.

13. Рязанцева И. П., “Непрерывный метод решения задач минимизации”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **39**:5 (1999), 734–742.

14. Малинов В. Г., “Четырехпараметрические двухшаговые проекционные методы минимизации”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **36**:12 (1996), 48–56.

15. Малинов В. Г., “Проекционный двухшаговый обобщенный двухпараметрический метод минимизации”, *Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление*, 1999, № 1(20), 169–178.

16. Антипин А. С., Васильев Ф. П., “О непрерывном методе минимизации в пространствах с переменной метрикой”, *Известия вузов. Математика*, 1995, № 12(403), 3–9.

17. Амочкина Т. В., “Непрерывный метод проекции градиента второго порядка с переменной метрикой”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **37**:10 (1997), 1174–1182.

18. Malinov V. G., “On Continuous Projection Minimization Method of the Second Order with Variable Metric”, *The International Conference on Applied Mathematics Dedicated to the 65-th Anniversary of B.N. Pshenichnyi (1937-2000). Abstracts. June 25-28, 2002. Kiev. NTUU*, 2002, 48–49.

19. Малинов В. Г., “Непрерывный проекционный метод минимизации второго порядка с переменной метрикой”, *Функциональный анализ. Межвуз.сб. научных трудов. Ульяновск: УлПУ*, **39** (2006), 53–64.

20. Малинов В. Г., “О проекционном квазиньютоновском обобщённом двухшаговом методе минимизации и оптимизации траектории летательного аппарата”, *Журнал Средневолжского Математического Общества*, **12**:4 (2010), 37–48.

21. Malinov V. G., “Projection Two-step Variable Metric Methods”, *4th Moscow International Conference on Operations Research (ORM2004). Moscow. September 21-24, 2004. Proceedings. Moscow. MAKS Press*, 2004, 135–137.

22. Антипин А. С., Недич А., “Непрерывный метод линеаризации второго порядка для задач выпуклого программирования”, *Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, 1996, № 2, 3–15.

23. Амочкина Т.В., “Непрерывный метод линеаризации второго порядка с переменной метрикой”, *Вестник Московск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, 1997, № 3, 9–12.

24. Нестеров Ю. Е., Скоков В. А., “Методы первого порядка нелинейной безусловной оптимизации”, *Методы математического программирования: М.: ЦЭМИ АН СССР*, 1980, 6–60.

25. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К., *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1978, 336 с.

26. Антипин А. С., *Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа. Препринт.*, ВНИИ системных исследований, М., 1979, 73 с.

A version of continuous projection second order variable metric method

© V. G. Malinov[2]

Abstract. In the work a new version of continuous projection second order variable metric method for problems of minimization of convex Frechet differentiable functions in Hilbert space is proposed. The convergence examined and exponential rate of convergence of the method is derived.

Key Words: minimization, simple set, continuous variable metric method, convergence, rate of convergence

[2] Assistant Professor of Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; vgmalinov@mail.ru.