УДК 534.11

Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимтотического метода

© В. Л. Литвинов[1]

Аннотация. Разработана обобщенная методика использования асимптотического метода для исследования свободных колебаний механических объектов с движущимися границами. Асимптотический метод распространен на более широкий класс краевых задач, которые в случае неподвижных границ могут быть решены методом разделения переменных. В качестве примера исследованы свободные колебания балки переменной длины. Произведено сопоставление с результатами, полученными с помощью метода Канторовича-Галеркина.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, свободные колебания объектов с движущимися границами, законы движения границ

В работе А.А. Лежневой [1] предлагается использовать асимптотический метод для получения решения уравнения изгибных колебаний балки при несложных однородных граничных условиях, заданных на одной движущейся и одной неподвижной границах.

Рассмотрим применение данного метода в случаях, когда колебания описываются более сложными уравнениями.

Пусть требуется получить решение дифференциального уравнения в частных производных

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau) + L[V(\xi,\tau)] = 0, \tag{1.1}$$

при граничных условиях

$$Y_{\jmath\imath}[V(\ell_\jmath(\varepsilon\tau),\tau)] = 0; \imath = \overline{1,m}; \jmath = \overline{1,2}, \tag{1.2}$$

где L - линейный однородный дифференциальный оператор по переменной ξ порядка $2m$; $Y_{\jmath\imath}-$ линейные однородные дифференциальные операторы по ξ; $\varepsilon-$ малый параметр.

Запись законов движения границ в виде $\ell_\jmath(\varepsilon\tau)$ соответствует режиму медленного движения. Уравнение (1.1) и граничные условия (1.2) - самосопряженные, и в случае неподвижности границ ($\ell_\jmath(\varepsilon\tau) = \text{const}$) может быть получено точное решение методом разделения переменных. Для решения задачи используем асимптотический метод. Для этого предположим, что длина объекта изменяется незначительно в течение одного периода собственных колебаний, т.е. $\ell_\jmath(\varepsilon\tau)$ является функцией медленного времени. Тогда формы колебаний могут быть выражены через те же функции, что и для объекта

[1] Старший преподаватель кафедры общетеоретических дисциплин, Сызранский филиал Самарского государственного технического университета, г. Сызрань, vladlitvinov@rambler.ru.

постоянной длины. Решение в первом приближении будем искать в виде ряда по этим собственным функциям:

$$V(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(\xi,\varepsilon\tau)\alpha_n(\varepsilon\tau)\cos w_n(\tau), \tag{1.3}$$

где $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ - собственные функции следующей краевой задачи:

$$L[X_n(\xi,\varepsilon\tau)]=\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau); \tag{1.4}$$

$$Y_{\jmath\iota}[X_n(\ell_\jmath(\varepsilon\tau),\varepsilon\tau)]=0, \tag{1.5}$$

а функции $\alpha_n(\varepsilon\tau), w_n(\tau)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_n(\varepsilon\tau)}{d\tau}=\varepsilon A_n(\alpha,w,\tau); \\ \frac{dw_n(\tau)}{d\tau}=\omega_{0n}(\varepsilon\tau)+\varepsilon B_n(\alpha,w,\tau). \end{cases} \tag{1.6}$$

Здесь $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)-$ собственные частоты задачи. Оператор L не содержит производной по τ, поэтому величина $\varepsilon\tau$ рассматривается как параметр.

Введем новую функцию

$$\mu_n(\tau)=\alpha_n(\varepsilon\tau)\cos w_n(\tau), \tag{1.7}$$

подставим (1.3) в исходное уравнение (1.1), а затем полученное уравнение умножим на $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ и проинтегрируем от $\ell_1(\varepsilon\tau)$ до $\ell_2(\varepsilon\tau)$

$$\int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)}\sum_{n=1}^{\infty}\{[\mu_n(\tau)X_n(\xi,\tau)]_{\tau\tau}+\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)\mu_n(\tau)\}X_m(\xi,\varepsilon\tau)q(\xi)d(\xi)=0, \tag{1.8}$$

где $m=1,2,3\ldots.$

Решение системы (1.8) затруднительно. При резонансных явлениях, амплитуды всех динамических мод, за исключением резонансной, малы. Поэтому, в каждом уравнении системы, членами, не содержащими $X_m(\xi,\varepsilon\tau)$ в связи с их малостью, пренебрегают. В этом случае система (1.8) становится расщепленной и уравнение для нахождения $\mu_n(\tau)$ принимает вид:

$$\int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)}\{[\mu_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)]_{\tau\tau}+\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)\mu_n(\tau)\}X_n(\xi,\varepsilon\tau)q(\xi)d\xi=0. \tag{1.9}$$

Введем обозначения:

$$A_{1n}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi,\varepsilon\tau)q(\xi)d\xi; \varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_{n,\tau}(\xi,\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)q(\xi)d\xi;$$

$$\varepsilon^2 A_{3n}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_{n,\tau\tau}(\xi,\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)q(\xi)d\xi.$$

Тогда уравнение (1.9) примет вид:

$$A_{1n}(\varepsilon\tau)\mu_n^{\cdot\cdot}(\tau) + 2\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)\mu_n^{\cdot}(\tau) + \varepsilon^2 A_{3n}(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) + A_{1n}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) = 0. \tag{1.10}$$

В большинстве практических задач границы движутся в медленном режиме и параметр ξ мал, поэтому в дальнейшем величины порядка ε^2 учитываться не будут. Учитывая равенство (1.7), приравнивая в уравнении (1.10) нулю коэффициенты при ε в первой степени и получающемся при этом уравнении коэффициенты при одинаковых гармониках, получим систему уравнений для определения функций A_n, B_n :

$$\begin{cases} \frac{\partial A_n}{\partial w} = 2\alpha_n(\varepsilon\tau)B_n; \\ \frac{\partial B_n}{\partial w} = -\frac{2}{\alpha_n(\varepsilon\tau)}A_n - \frac{1}{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}\frac{d\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}{d\tau} - 2\frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)}. \end{cases}$$

Частное решение системы имеет вид

$$\begin{cases} B_n = 0; \\ A_n = -\frac{\alpha_n(\varepsilon\tau)}{2}[\frac{1}{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}\frac{d\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}{d\tau} + 2\frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)}]. \end{cases}$$

Подставляя найденные решения в уравнения (1.6), получим

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_n(\varepsilon\tau)}{d\tau} = -\frac{\alpha_n(\varepsilon\tau)}{2\omega_{0n}(\varepsilon\tau)} \cdot \frac{d\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}{d\tau}; \\ \frac{dw_n(\tau)}{d\tau} = \omega_{0n}(\varepsilon\tau). \end{cases}$$

Решая систему, имеем

$$w_n(\tau) = \int_0^\tau \omega_{0n}(\varepsilon\tau); \alpha_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}}. \tag{1.11}$$

В качестве примера рассмотрим свободные поперечные колебания балки переменной длины, концы которой закреплены. Дифференциальное уравнение колебаний имеет вид:

$$U_{\tau\tau}(x,t) + \alpha^2 U_{xxxx}(x,t) = 0; \tag{1.12}$$

$$U(0,t) = 0; U_x(0,t) = 0;$$

$$U(\ell_0(t),t)=0;U_x(\ell_0(t),t)=0,$$

где $\alpha^2 = EI/\rho$, E – модуль упругости материала балки, I – осевой момент инерции сечения балки, ρ – линейная плотность массы балки; $U(x,t)$ – поперечное смещение точки с координатой x балки в момент времени t; $\ell_0(t) = L_0 - v_0 t$ – закон движения правой границы, L_0 – начальная длина балки, v_0 – скорость движения границы.

Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{L_0}; \tau = \frac{\alpha}{L_0^2}t; V(\xi,\tau) = U(x,t)/L_0. \tag{1.13}$$

Исходная задача примет вид:

$$V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\tau) + V_{\tau\tau}(\xi,\tau) = 0 \tag{1.14}$$

$$V(0,\tau)=0;V_\xi(0,\tau)=0;$$

$$V(\ell(\varepsilon\tau),\tau)=0;V_\xi(\ell(\varepsilon\tau),\tau)=0,$$

где

$$\ell(\varepsilon\tau) = 1+\varepsilon\tau; \varepsilon = -v_0 L_0/\alpha.$$

Применим к задаче асимптотический метод. Величины $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ и $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ являются соответственно собственными функциями и собственными частотами следующей краевой задачи:

$$X_{n\xi\xi\xi\xi}(\xi,\varepsilon\tau) - \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau) = 0.$$

Решая данное уравнение, получим [2]:

$$X_n(\xi,\varepsilon\tau) = 0,62\{C_n(\varepsilon\tau)[\cos(r_n(\varepsilon\tau)\xi) - ch(r_n(\varepsilon\tau)\xi)] + \sin(r_n(\varepsilon\tau)\xi) - sh(r_n(\varepsilon\tau)\xi)\},$$

где

$$C_n(\varepsilon\tau) = \frac{\cos(r_n(\varepsilon\tau)\ell(\varepsilon\tau)) - ch(r_n(\varepsilon\tau)\ell(\varepsilon\tau))}{\sin(r_n(\varepsilon\tau)\ell(\varepsilon\tau)) + sh(r_n(\varepsilon\tau)\ell(\varepsilon\tau))}; r_n(\varepsilon\tau) = \sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)};$$

$$\omega_{0n}(\varepsilon\tau) = k_n^2/\ell^2(\varepsilon\tau); k_n \sim \pi n + \pi/2.$$

В данном случае динамические моды X_n определяются с точностью до постоянного множителя и выбраны таким образом, что $max[X_n(\xi,\varepsilon\tau)] = 1$

Уравнения (1.11) имеют вид

$$\alpha_n(\varepsilon\tau) = \ell(\varepsilon\tau)/k_n; w_n(\tau) = -k_n^2/(\varepsilon\ell(\varepsilon\tau)). \tag{1.15}$$

Тогда общее решение уравнения (1.14) выглядит следующим образом

$$V(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(\xi,\varepsilon\tau)\cdot\frac{\ell(\varepsilon\tau)}{k_n}\cdot C_n\cdot\cos(\frac{k_n^2}{\varepsilon\ell(\varepsilon\tau)}+\alpha_n), \qquad (1.16)$$

где постоянные C_n,α_n определяются из начальных условий.

Решение уравнения (1.14) методом Канторовича – Галеркина имеет аналогичный вид [3]:

$$V(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(\xi,\varepsilon\tau)\cdot A_{0n}(\varepsilon\tau)\cdot\frac{\ell(\varepsilon\tau)}{k_n}\cdot(D_n\cos(\frac{k_n^2}{\varepsilon\ell(\varepsilon\tau)})+E_n\sin(\frac{k_n^2}{\varepsilon\ell(\varepsilon\tau)})),$$

где $A_{0n}(\varepsilon\tau)\sim 1,62/\sqrt{\ell(\varepsilon\tau)}; D_n,E_n$ -константы.

Решение асимптотическим методом в более высоком приближении не повысит точности, но вскроет новую качественную сторону явления – слабую зависимость между отдельными тонами колебания, появляющуюся вследствие изменения длины объекта [1], [4].

Список литературы

1. Лежнева А.А., "Свободные изгибные колебания балки переменной длины", *Ученые записки. – Пермь*, 1966, № 156, 143-150.

2. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.-М.: Физматлит*, Физматлит, М, 1971, 576 с.

3. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., "Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича-Галеркина", *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. "физико-математические науки"*, **1**:18 (2009), 149-158.

4. Митропольский Ю.А., *Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний*, Наука, М, 1964, 432 с.

Study free vibrations of mechanical objects with moving boundaries using asymptotical method

© V. L. Litvinov[2]

Abstract. The generalized method of using the asymptotical method for the study of free oscillations of mechanical objects with moving boundaries is developed. Asymptotical method is extended to a wider class of boundary value problems, which in the case of fixed boundaries can be solved by separation of variables. As an example free vibrations of a beam of variable length are studied. The comparison with the results obtained using the Kantorovich-Galerkin are produced.

Key Words: differential equations in partial derivatives, the free vibrations of objects with moving boundaries, the laws of motion of the boundaries

[2] Senior lecturer of dept. of general – theoretical disciplines, Syzran Branch of Samara State Technical University, Syzran, vladlitvinov@rambler.ru.