УДК 517.938

О существовании магнитных линий соединяющих нулевые точки

© В. З. Гринес[1], Е. В. Жужома[2],В. С. Медведев[3], О.В. Починка[4]

Аннотация. В статье доказывается, что при выполнении определенных условий в слое плазмы существуют магнитные линии соединяющие нулевые точки

Ключевые слова: магнитные поля, плазма, сепаратор, особые точки, шипы и веерные поверхности, диффеоморфизмы Морса-Смейла

1. Введение

Имеется два традиционных подхода изучения плазмы. При первом, плазма рассматривается как совокупность отдельных частиц. При втором – как сплошная среда с высокой проводимостью. Здесь мы рассматриваем второй подход при условии нерелятивистского поля скоростей движения среды и при наличии магнитного поля. Взаимовлияние магнитного поля плазмы и ее движения является важным аспектом магнитной гидродинамики (МГД), которое отражено в одном из основных уравнений МГД

$$\frac{\partial \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t} = rot \ \left[\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\boldsymbol{H}}\right] + \eta \nabla^2 \vec{\boldsymbol{H}},$$

где $\vec{\boldsymbol{H}}$ – напряженность магнитного поля, $\vec{\boldsymbol{v}}$ – скорость движения плазмы, η – магнитная вязкость, обратная магнитному числу Рейнольдса (основные определения и понятия МГД см. в книгах [2], [4], [7] и обзоре [11]). Согласно Альвену [1], [2], движении плазмы силовые линии магнитного поля движутся так, как если бы они были "вморожены в плазму". Как следствие, при несложных движениях плазмы топологическая структура магнитного поля не меняется. Однако при достаточно сложных движениях возникают предпосылки к перестройке магнитной конфигурации. Ясно, что под действием задаваемого извне течения плазмы в ней возможны появления таких областей, что их границы в некоторых точках пространства близки, а магнитные поля областей вблизи этих границ имеют различные направления (так называемые x-точки). Согласно закону Ампера $\vec{\boldsymbol{j}} = \nu \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{H}}$, где $\vec{\boldsymbol{j}}$ – плотность электрического тока, вблизи x-точек возникает достаточно высокая плотность тока.

[1] Профессор кафедры ЧиФА ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru
[2] Профессор кафедры ТУиДМ, ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru
[3] Научный сотрудник НИИ ПМК, ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; medvedev@uic.nnov.ru
[4] Профессор кафедры информационных систем и технологий, НИУ ВШЭ, г. Нижний Новгород; olga-pochinka@yandex.ru

В такие моменты времени в магнитном поле могут появляться токовые образования различной конфигурации такие, как токовые линии и токовые слои. Токовые образования могут содержать точки, в которых магнитное поле обращается в нуль (нулевые точки). В типичном случае собственные числа λ_1, λ_2 и λ_3 в нулевой точке векторного поля $\vec{\boldsymbol{H}}$ не равны нулю и удовлетворяют соотношению $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$, в силу равенства $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{H}}=0$. Отсюда вытекает, что с точки зрения теории динамических систем нулевая точка является консервативным седлом с одномерной и двумерной сепаратрисами,[5] см. рис. 1.1 (a).

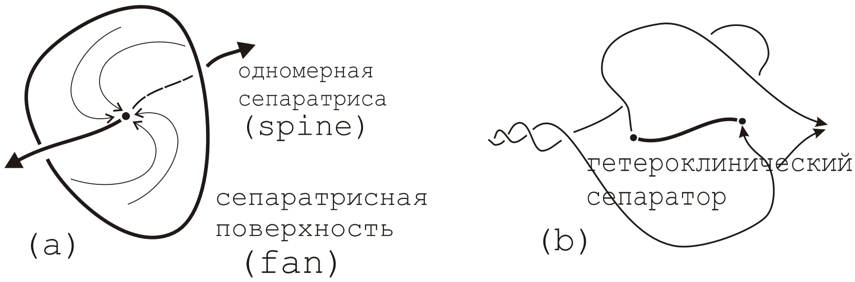

Рисунок **1.1**

Структура нулевой точки (a), и гетероклинический сепаратор (b)

Если силовая магнитная линия одномерной сепаратрисы направлена из нулевой точки, то все магнитные линии на сепаратрисной поверхности направлены к нулевой точке, и наоборот. Следуя [9], [10], будем называть магнитную линию, соединяющую две нулевые точки, *сепаратором* (separator). Сепаратор называется *гетероклиническим*, если он является трансверсальным пересечением сепаратрисных поверхностей, см. рис. 1.1 (b).

Топологическая структура магнитного поля определяется числом и типом нулевых точек, взаимным расположением шипов и веерных поверхностей, а также линиями трансверсального пересечения веерных поверхностей – гетероклиническими сепараторами. Эксперимент и наблюдения показывают, что эволюция структуры магнитного поля напоминает релаксационные процессы: сперва достаточно продолжительное время плазма эволюционирует спокойно, а затем быстро развивается перестройка магнитной конфигурации, сопровождаемая процессами перезамыкания [6][6].

Таким образом, представляет интерес решение проблемы существования особых точек и сепараторов, а также количества сепараторов при заданном расположении особенностей магнитного поля. Объединение особенностей, шипов, веерных поверхностей и сепараторов называется иногда *скелетом* магнитного поля, так как их конфигурация определяет топологическую

[5] Иногда одномерную сепаратрису называют шипом (spine), а двумерную – веерной поверхностью (fan) [9], [10]

[6] Иногда вместо термина перезамыкание используют термин пересоединение [9], [10].

структуру поля. Ясно, что указанная проблема сперва должна рассматриваться при движении плазмы, когда число особенностей и сепараторов не меняется (то есть, до пересоединения).

В работе предложен подход к решению данной проблемы, состоящий в том, что в плазме (мысленно) выделяется трехмерное тело специального вида, и рассматривается движение, при котором все граничные компоненты тела сдвигаются внутрь или наружу так, что после окончания движения все граничные компоненты параллельны исходным граничным компонентам (см. ниже точные определения). Поскольку в процессе движения топологическая структура магнитного поля, в силу постановки задачи, не меняется (токовые образования, включая шипы, веерные поверхности и сепараторы, только слегка деформируются), то для простоты естественно предположить, что внутри выделенного тела скелет магнитного поля инвариантен относительно движения плазмы. Отметим, что мы не требуем чтобы все точки скелета были неподвижны, но их движение внутри тела должно оставлять точки скелета на скелете. Мы также предполагаем (и это единственное содержательное ограничение), что нулевые точки являются гиперболическими точками не только поля, но и для движения плазмы. Заметим однако, что согласно теореме Купки-Смейла из теории динамических систем у любого типичного движения все периодические точки, включая неподвижные, являются гиперболическими [8]. Таким образом, можно считать, что мы рассматриваем только класс типичных движений плазмы. Предложенный подход позволяет применить методы и результаты теории динамических систем, поскольку можно доопределить движение плазмы на некоторое трехмерное многообразие так, чтобы в результате получить динамическую систему классического типа. С одной стороны, мы теряем информацию о структуре магнитного поля вне трехмерного тела, но с другой стороны мы получаем инструмент для исследования структуры в некоторой части пространства. Кроме этого, глобальная структура на полученном трехмерном многообразии дает представление о возможных реальных структурах магнитных полей.

Благодарности. Авторы благодарят РФФИ (гранты 12-01-00672-а, 13-01-12452-офи-м) за финансовую поддержку. Особая благодарность Константину Витальевичу Кирсенко (бизнесмену и музыканту) за финансовую поддержку.

2. Формулировка основных результатов

Пусть M_p^2 – гладко вложенная в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ ориентируемая замкнутая поверхность рода $p \geq 0$. В силу ориентируемости, M_p^2 разбивает $\mathbb{R}^3$ на ограниченную область (внутренность) и неограниченную область (внешность). Объединение внутренности с границей M_p^2 обозначается через M_p^3 и называется *телом рода* $p \geq 0$. Простейшим примером является замкнутый трехмерный шар $M_0^3 \overset{\text{def}}{=} D^3$, ограниченный двумерной сферой S^2. Тело $M_1^3 \overset{\text{def}}{=} P^3$ является полноторием, то есть множеством $D^2 \times S^1$, гомеоморфным произведению двумерного замкнутого диска D^2 на окружность S^1.

Две гладко вложенные поверхности $M_{p_1}^2$ и $M_{p_2}^2$ называются *параллельными*, если $p_1 = p_2 = p$ и эти поверхности ограничивают в $\mathbb{R}^3$ область гомеоморфную $M_p^2 \times (0;1)$. Как следствие, $M_{p_1}^2 \cap M_{p_2}^2 = \emptyset$.

Пусть тело M_p^3 содержит внутри себя попарно непересекающиеся тела $M_{p_1}^3, \ \ldots, \ M_{p_k}^3$. Положим

$$M_p^3 \setminus \left(int\ M_{p_1}^3 \cup \ldots \cup int\ M_{p_k}^3\right) \overset{\text{def}}{=} M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3.$$

В частности, $M_{0(0)}^3 = \mathcal{S}$ есть замкнутый шаровой слой, то есть множество $\mathcal{S} = S^2 \times [-1;+1]$, гомеоморфное произведению сферы S^2 на замкнутый промежуток $[-1;+1]$. Ясно, что топологический тип тела $M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3$ зависит от вложения $M_{p_1}^3, \ \ldots, \ M_{p_k}^3$ в M_p^3. Один из вариантов $M_{p(p)}^3$ является так называемая толстая поверхность, то есть тело, гомеоморфное произведению двумерной поверхности M_p^2 рода $p \geq 1$ на отрезок $[0;1]$. Тело $M_{p(p00)}^3 \overset{\text{def}}{=} \mathcal{M}^3$ есть толстая поверхность с двумя дырами.

В литературе по магнитной гидродинамике магнитное поле часто пишется в виде индукции магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}$, которая связана с $\vec{\boldsymbol{H}}$ соотношением $\vec{\boldsymbol{B}} = \mu \vec{\boldsymbol{H}}$, где μ – магнитная проницаемость среды.

Рассмотрим тело $M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3$, гладко вложенное в пространство $\mathbb{R}^3$. Тело $M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3$ представляет собой часть плазмы некоторого астрофизического объекта с магнитным полем $\vec{\boldsymbol{B}}$. Обозначим через $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ ограничение поля $\vec{\boldsymbol{B}}$ на $M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3$, то есть $\vec{\boldsymbol{B}}_0 = \vec{\boldsymbol{B}}|_{M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3}$, и будем считать, что все нулевые точки $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ являются типичными. Как следствие получаем, что $M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3$ содержит только конечное число нулевых точек. Под сепаратрисой нулевой точки ниже понимается одномерная сепаратриса или двумерная сепаратрисная поверхность. Мы будем предполагать далее, что 1) сепаратрисы нулевых точек пересекаются (если пересекаются) трансверсально; 2) каждая сепаратриса не имеет самопересечений; 3) сепаратрисы пересекаются трансверсально (если пересекаются) с граничными компонентами $M_{p_1}^2, \ \ldots, \ M_{p_k}^2$ тела $M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3$. Отображение

$$f_0 : M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3 \to f_0\left(M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3\right) \subset \mathbb{R}^3$$

называется (a-d)-*движением*, если оно удовлетворяет следующим условиям.

- a) f_0 является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом на свой образ, причем неблуждающее множество диффеоморфизма f_0 состоит из неподвижных гиперболических точек, которые совпадают с нулями магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}_0$;

- b) граничные компоненты тела $f_0\left(M^3_{p(p_1\cdots p_k)}\right)$ попарно не пересекаются с граничными компонентами тела $M^3_{p(p_1\cdots p_k)}$;

- c) имеется хотя бы одна граничная компонента $M^2_{p_i}$, которая отображается внутрь $M^3_{p(p_1\cdots p_k)}$, и имеется хотя бы одна граничная компонента $M^2_{p_j}$, которая отображается наружу $M^3_{p(p_1\cdots p_k)}$, то есть

$$f_0(M^2_{p_i}) \subset M^3_{p(p_1\cdots p_k)}, \quad f_0(M^2_{p_j}) \cap M^3_{p(p_1\cdots p_k)} = \emptyset;$$

- d) веерные поверхности и шипы инвариантны относительно f_0, а неподвижные точки диффеоморфизма f_0 имеют одинаковый тип с нулями поля $\vec{\boldsymbol{B}}_0$.

Отметим, что мы не требуем трансверсального пересечения силовых линий магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ с граничными компонентами. Поэтому веерные поверхности и шипы могут, вообще говоря, пересекать граничные компоненты тела $M^3_{p(p_1\cdots p_k)}$ по нескольким компонентам связности. Предложенная математическая модель с физической точки зрения означает, что мы рассматриваем движение плазмы за промежуток времени, в течение которого сохраняются особые точки с веерными поверхностями и шипами. Из приведенных свойств вытекает, что сепараторы (если они существуют) инвариантны относительно f_0 и их число (включая ноль) не меняется в течение наблюдаемого промежутка времени.

Толстая поверхность с двумя дырами $\mathcal{M}^3$ имеет четыре граничных компоненты: две 2-сферы S_1, S_2 и две двумерные поверхности T_1, T_2 рода $p \geq 1$. Для движения тела $\mathcal{M}^3$ конкретизируем условие d) следующим образом:

- d) одна сфера, скажем S_1, отображается внутрь тела $\mathcal{M}^3$, а другая S_2 – наружу; одна поверхность, скажем T_1, отображается внутрь $\mathcal{M}^3$, а другая T_2 – наружу. Более того, ограничение $f_0|_{T_i} : T_i \to f_0(T_i)$ гомотопически тривиально для каждого $i = 1, 2$.

Поясним понятие гомотопической тривиальности. В отличие от сферы, для которой с гомотопической точки зрения существует только один класс сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов, для поверхностей ненулевого рода существует счетное семейство таких классов. Поверхности T_i, $f_0(T_i)$ для каждого $i = 1, 2$ параллельны. Поэтому образующие их фундаментальных групп можно считать естественным образом изоморфными. Гомотопическая тривиальность означает, что ограничения $f_0|_{T_i}$ гомотопически тождественны.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть $f_0 : \mathcal{M}^3 \to f_0(\mathcal{M}^3) \subset \mathbb{R}^3$ есть (a-d)-движение толстой поверхности с двумя дырами $\mathcal{M}^3$, принадлежащего некоторой области плазмы с магнитным полем $\vec{\boldsymbol{B}}_0$. Тогда поле $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ в $\mathcal{M}^3$ имеет не менее двух нулевых точек таких, что их сепаратрисные поверхности пересекаются. Более того, если нет пересечений по замкнутым кривым, то в $\mathcal{M}^3$ имеется хотя бы один гетероклинический сепаратор.*

3. Сепараторы в толстой поверхности с двумя дырами

Ключевой для доказательства теоремы 2.1. является следующая лемма. Напомним, что через S^1 обозначается окружность, а через M_p^2 – двумерная замкнутая ориентируемая поверхность рода $p \geq 1$.

Л е м м а 3.1. *Существует вложение $\mathcal{M}^3 \subset M_p^2 \times S^1$ и продолжение f_0 до полярного диффеоморфизма $f : M_p^2 \times S^1 \to M_p^2 \times S^1$ Морса-Смейла такого, что неблуждающее множество $NW(f)$ есть объединение источника, стока и неподвижных точек диффеоморфизма f_0.*

Доказательство. Приклеим к граничным компонентам S_1, S_2 тела $\mathcal{M}^3$ шары B_1^3, B_2^3 соответственно. Тогда мы получим тело $\mathcal{M}^3 \cup B_1^3 \cup B_2^3$ и естественное вложение $\mathcal{M}^3 \subset \mathcal{M}^3 \cup B_1^3 \cup B_2^3$. В силу условия d), двумерная сфера S_1 отображается внутрь $\mathcal{M}^3$. Поэтому f_0 можно продолжить на шар B_1^3 так, чтобы внутри B_1^3 появился гиперболический источник. Аналогично, f_0 можно продолжить на шар B_2^3 так, чтобы внутри B_2^3 появился гиперболический сток. Тело $\mathcal{M}^3 \cup B_1^3 \cup B_2^3$ гомеоморфно прямому произведению $M_p^2 \times [0; 1]$ с граничными компонентами $T_1 = M_p^2 \times \{0\}$, $T_2 = M_p^2 \times \{1\}$, и мы далее будем отождествлять $\mathcal{M}^3 \cup B_1^3 \cup B_2^3$ с $M_p^2 \times [0; 1]$. Известно, что из гомотопической тривиальности ограничений $f_0|_{T_1}$, $f_0|_{T_2}$ вытекает, что каждое из этих ограничений изотопно тождественному отображению. Поэтому существует такое $\varepsilon > 0$ и продолжение f_0 на тело $M_p^2 \times [-\varepsilon; 1 + \varepsilon]$ такое, что ограничения $f_0|_{M_p^2 \times \{-\varepsilon\}}$ и $f_0|_{M_p^2 \times \{1+\varepsilon\}}$ тождественны по первой координате $M_p^2 \times \{\cdot\}$. Не уменьшая общности, можно рассматривать каждое из $f_0|_{M_p^2 \times \{-\varepsilon\}}$, $f_0|_{M_p^2 \times \{1+\varepsilon\}}$

как сдвиг вдоль второй координаты $\{\cdot\} \times \{-\varepsilon\} \to \{\cdot\} \times \{-\varepsilon + \delta\}$ и $\{\cdot\} \times \{1+\varepsilon\} \to \{\cdot\} \times \{1+\varepsilon+\delta\}$ соответственно.

Склеим граничные компоненты $M_p^2 \times \{-\varepsilon\}$, $M_p^2 \times \{1+\varepsilon\}$ с помощью тождественного отображения. Тогда из $M_p^2 \times [-\varepsilon; 1+\varepsilon]$ получаем многообразие $M_p^2 \times S^1$. Из предыдущей конструкции следует, что на $M_p^2 \times S^1$ существует требуемое продолжение диффеоморфизма f_0. $\square$

Доказательство теоремы 2.1.. Учитывая лемму 3.1., требуемое утверждение можно переформулировать следующим образом. Пусть $f : M_p^2 \times S^1 \to M_p^2 \times S^1$ – полярный диффеоморфизм Морса-Смейла 3-мерного многообразия $M_p^2 \times S^1$. Тогда f имеет по крайней мере две седловые неподвижные точки с разным индексом Морса такие, что их двумерные сепаратрисы пересекаются.

Сперва покажем, что f имеет хотя бы одну седловую точку. Предположим противное. Тогда f является диффеоморфизмом типа источник-сток. Согласно [5], несущее многообразие должно быть гомеоморфным трехмерной сфере. Полученное противоречие доказывает, что f имеет хотя бы одну седловую точку.

Перейдя к некоторой итерации диффеоморфизма f, мы можем считать, что f является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом всех сепаратрис седловых неподвижных точек (напомним, что в силу условия a), f сохраняет ориентацию всего несущего многообразия). Согласно условию d) для $f_0 : M_p^2 \times S^1 \to f_0(M_p^2 \times S^1)$, диффеоморфизм f гомотопически тривиален (то есть, индуцирует тождественное отображение фундаментальной группы тора). Поэтому его число Лефшеца равно нулю. Сумма индексов Морса стока и источника равна нулю, $(-1)^0 + (-1)^3 = 0$. Отсюда и формулы Лефшеца вытекает, что наличие одной седловой неподвижной точки влечет существование еще одной седловой неподвижной точки с другим индексом Морса.

В работе [3] показано, что если диффеоморфизм Морса-Смейла $f : M^3 \to M^3$ не имеет гетероклинических кривых, то M^3 есть либо 3-сфера S^3, либо связная сумма ручек $S^2 \times S^1$. Поскольку $M_p^2 \times S^1$ является неприводимым многообразием (это означает, что любая цилиндрически вложенная 2-сфера ограничивает шар), то $M_p^2 \times S^1$ нельзя представить в виде связной суммы ручек $S^2 \times S^1$. Отсюда следует, что любой диффеоморфизм Морса-Смейла $f : M_p^2 \times S^1 \to M_p^2 \times S^1$ имеет гетероклинические кривые. Если замкнутые гетероклинические кривые отсутствуют, то необходимо имеется хотя бы один гетероклинический сепаратор. $\square$

Список литературы

1. Alfven H., "On sunspots and the solar cycle.", *Arc. f. Mat. Ast. Fys.*, **29A** (1943), 1-17..
2. Альфвен Х., *Космическая электродинамика*, ИЛ, 1952.
3. Bonatti Ch., Grines V., V. Medvedev V., Pecou E., "Three-dimensional manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves.", *Topology and Applications*, **117** (2002), 335-344.
4. Каулинг Т., *Магнитная Гидродинамика*, ИЛ, 1959.
5. Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С., Починка О.В., "Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса-Смейла", *Труды МИАН им. Стеклова В.А.*, **271** (2010), 1-23.
6. Кадомцев Б.Б., "Перезамыкание магнитных силовых линий", *Успехи Физ. Наук*, **151**, вып. 1 (1987), 3-29.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Теоретическая физика в 10 томах, Т. VIII. Электродинамика сплошных сред*, Физматлит, М., 2005.
8. Нитецки З., *Введение в дифференциальную динамику*, Мир, М., 1975.
9. Прист Э.Р., *Солнечная Магнитогидродинамика*, Мир, М., 1985.
10. Прист Э.Р., Форбс Т., *Магнитное пересоединение: магнитогидродинамическая теория и приложения*, ФМЛ, М., 2005.
11. Сыроватский С.И., "Магнитная гидродинамика", *Успехи Физ. Наук*, **62**, вып. 3 (1957), 247-303.

On existence of magnetic lines joining zero points

© V. Z. Grines[7], B. S. Medvedev[8], O.V. Pochinka[9],E. V. Zhuzhoma[10]

Abstract. In the paper, one proves that there exist magnetic lines in a layer provided some conditions hold.
Key Words: Magnetic fields, plasma, separator, fun, spine, singular points, Morse-Smale difeomorphisms

[7] Professor, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; vgrines@yandex.ru.

[8] Senior Staff Scientist, Institute of Applied Mathematics and Cybernetics at Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; medvedev@unn.ac.ru

[9] Professor, High School Economy, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru

[10] Professor, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.