В Средневолжском математическом обществе

УДК 531.391.5

Вектор-функции Ляпунова в задачах о стабилизации движений управляемых систем

© А. С. Андреев[1], О. А. Перегудова[2]

Аннотация. В работе получены достаточные условия стабилизации систем, моделируемых дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. Доказательство основано на построении вектор-функций Ляпунова и систем сравнения и применении метода предельных уравнений.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, стабилизация, вектор-функция Ляпунова

1. Введение

В работе рассматриваются управляемые системы, моделируемые системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = X(t, x, u) \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)' \in \mathbb{R}^n$ – вектор n-мерного линейного действительного пространства $\mathbb{R}^n$, описывающий движение системы, $u = (u_1, u_2, ..., u_m)'$ – вектор управления, создаваемого приводами или иными воздействиями, $u \in \mathbb{R}^m$ – m-мерному линейному действительному пространству $\mathbb{R}^m$.

В соответствии с различными конструкционными назначениями исследуемых объектов могут быть поставлены различные задачи по отношению к управляемой системе (1.1). Для современных манипуляционных роботов актуальной представляется задача конструирования универсальной модели управления, обеспечивающей реализацию целого спектра программных его движений с заданными свойствами, на основе структуры обратной связи в виде измерительной и информационной подсистем, определяющих текущее состояние системы и задающих необходимое управляющее воздействие [1], [2].

[1] Заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; AndreevAS@ulsu.ru.

[2] Профессор кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; peregudovaoa@sv.ulsu.ru.

Одна из постановок такой задачи состоит в определении для программного закона движения $x = x(t)$ системы (1.1) управляющей функции $u = u(t, x)$, обеспечивающей стабилизацию этого движения.

В соответствии с подходами теории устойчивости эти задачи математически удобно сформулировать следующим образом.

Пусть $X(t, 0, 0) = 0$, X – вектор-функция, определенная и непрерывная в области $\mathbb{R}^+ \times \tilde{A} \times \mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $\tilde{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < H,\, H = const > 0$ или $H = +\infty\}$ (выше, здесь и далее $()'$ – операция транспонирования, $\|x\| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$, $\|u\| = (u_1^2 + ... + u_m^2)^{\frac{1}{2}}$.

Система (1.1) при $u = 0$ имеет решение $x = 0$, которое принимается за невозмущенное движение. Задача о стабилизации этого движения состоит в синтезе управляющего воздействия u, а именно, в построении u на основе мгновенной обратной связи в виде зависимости $u = u(t, x)$, из некоторого класса управлений $U = \{u : \mathbb{R}^+ \times \tilde{A} \to \mathbb{R}^m,\, u(t, 0) \equiv 0\}$, при котором движение $x = 0$ системы (1.1) является асимптотически устойчивым.

Более точным и удобным для прикладных задач является следующее определение.

Определение 1.1. *Управляющее воздействие* $u = u^0(t, x)$, $u^0(t, 0) \equiv 0$, *является стабилизирующим, если нулевое положение равновесия системы*

$$\dot{x} = X^0(t, x), \quad X^0(t, x) = X(t, x, u^0(t, x)) \tag{1.2}$$

является равномерно асимптотически устойчивым с некоторой областью равномерного притяжения $\tilde{A}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le H_0 < H\}$.

2. Постановка задачи

Исследуем задачу о стабилизации в классе управляющих воздействий $U = \{u : \mathbb{R}^+ \times \tilde{A} \to \mathbb{R}^m\}$ кусочно-непрерывного действия.

Для кусочно-непрерывного управления $u = u^0(t, x)$ правая часть уравнения (1.2), в общем случае, является разрывной. Исследование такого уравнения существенно отличается от непрерывного случая, и, соответственно, качественная теория таких уравнений являлась предметом изучения многочисленных работ [4]–[7], в значительной степени подытоженных в монографии [8].

Пусть для некоторого управляющего воздействия $u = u^0(t, x)$ правая часть (1.2) $X = X^0(t, x)$ при каждом $t \in \mathbb{R}^+$ является кусочно-непрерывной, $M \subset \tilde{A}$ — множество точек разрыва этой функции.

Для каждой точки $\mathbb{R}^+ \times \tilde{A}$ определяется многозначная функция $F(t,x)$, которая совпадает с $X^0(t,x)$ для каждой точки из $\mathbb{R}^+ \times (\tilde{A} \backslash M)$, и тем или иным образом доопределяется для каждой точки из $\mathbb{R}^+ \times M$.

Определение 2.1. [8] *Решением уравнения* (1.2) *с разрывной правой частью называется решение дифференциального включения*

$$\dot{x} \in F(t,x) \tag{2.1}$$

в виде абсолютно непрерывной функции $x(t)$, *определенной на некотором отрезке* (α, β), *для которой почти всюду для* $t \in [\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$ *выполнено включение* $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$.

Важным является способ доопределения функции $X_0(t,x)$, при котором включение (2.1) пригодно для приближенного описания системы (1.2).

Наиболее адекватным для задачи управления механическими системами является следующее доопределение.

Допустим, что функция $X = X(t, x, u_1, ..., u_r)$ непрерывна, а каждая из функций $u_j^0(t,x)$ разрывна на поверхности $M_j = \{(t,x) \in R \times \tilde{A} : \Psi_j(t,x) = 0 \quad (j = 1, ..., m)\}$, $F(t,x)$ есть наименьшее выпуклое множество, содержащее множество значений функции $F_1(t,x) = X^0(t, x, u_1^0(t,x), ..., u_m^0(t,x))$.

В дальнейших рассуждениях по исследованию задачи об устойчивости для системы (1.2) будем использовать указанное доопределение, автоматически перенося выводы относительно включения (2.1) на систему (1.2).

3. Решение задачи

В силу условия $X^0(t,0,0) \equiv 0$ включение (2.1) имеет нулевое решение, которое будем полагать единственным. Примем, что первая часть (1.1), а с ней (1.2) и (2.1) удовлетворяют следующему условию.

Предложение 3.1. *Для каждого* $u^0 \in U$ *и каждого* H_0, $0 < H_0 < H$, *существует* $m(H_0)$, $m = const > 0$, *такое, что*

$$||X^0(t,x)|| \leq m \tag{3.1}$$

При этом предположении согласно [8] имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. *При условии* (3.1) *включение* (2.1) *имеет свойства:*

1. *Для каждой точки* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \tilde{A}$ *существует его решение* $x = x(t)$, *удовлетворяющее условию* $x(t_0) = x_0$, *продолжимое для* $t_0 \leq t \leq \beta$, *при этом если* $\beta < +\infty$, *тогда* $\|x(t)\| \to H$ *при* $t \to \beta$;
2. *Решения* $x = x(t)$ *ограниченные при* $t \leq t_0$ *областью* $\tilde{A}_1 = \{x : \|x\| \leq H_1, 0 < H_1 < H\}$, *равностепенно непрерывны;*
3. *Предел равномерно сходящейся последовательности решений является решением.*

Важным свойством решений дифференциальных уравнений является непрерывная зависимость решений от начальных условий и правой части.

В предположении единственности решения $x = 0$ включения (2.1), из теоремы 3.1. имеет место следующее следствие.

При условии $\|X(t, x, u)\| \leq m(H_1)$ решение $x = 0$ системы (1.2) непрерывно зависит от $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \{\|x\| \leq \delta\}$ и $u \in \{u \in U : \left\|u - u^0\right\| \leq \delta\}$ на отрезке $[t_0, \beta], \beta > t_0$.

Для исследования предельного поведения решений (1.2) при $t \to +\infty$ примем также, что система (1.2) удовлетворяет следующему условию.

Предложение 3.2. *Для любого компакта* $K \subset \tilde{A} \backslash M$ *правая часть* (1.2) *удовлетворяет условию Липшица вида: существует постоянная* $L = L(K)$ *такая, что для всех* $(t, x_1), (t, x_2) \in K$

$$\left\|X^0(t, x_2) - X^0(t, x_1)\right\| \leq \|x_2 - x_1\|. \tag{3.2}$$

При этом предположении решение $x = x(t)$ ($x(t_0) = x_0$, $x_0 \in \tilde{A} \backslash M$) включения (2.1) является единственным для всех $t \in [t_0, \beta]$ при некотором $\beta \geq t_0$.

Для задач механики принято полагать, что решение (1.2) (и значит (2.1)) для каждой точки $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \tilde{A}$ является единственным [9]. Далее это предположение будем считать принятым.

В случае, когда правая часть системы (1.2) является непрерывной, условие (3.2) оказывается достаточным для построения топологической динамики системы (1.2) с целью выявления следующих предельных при $t \to +\infty$ свойств ее решения [10], [11].

Определение 3.1. *Точка* $p \in D_0$ *называется предельной точкой решения* $x = x(t)$, $x(t_0) = x_0$, *уравнения* (1.2), *определенного для всех* $t \leq t_0$, *если существует последовательность* $t_k \to +\infty$, *такая, что* $x(t_k) \to p$ *при* $k \to \infty$.

Множество всех таких точек p, определяемых в зависимости от выбора последовательностей $t_k \to +\infty$, образует положительное предельное множество $\omega^+(x(t))$.

Очевидно, что $x(t) \to \omega^+(x(t)) \cap \partial D_0$ при $t \to +\infty$. Если же решение $x = x(t)$, $x(t_0) = x_0$, ограничено некоторым компактом $K \subset D_0$, то $\omega^+(x(t))$ связно, компактно и обладает следующим свойством, которое, по аналогии со свойством инвариантности для автономного уравнения [10], называется свойством квазиинвариантности [12], [13].

Пусть $G_0 = \{g \in \Phi\}$ есть множество предельных функций для правой части уравнения (1.2), определяемых последовательностями $t_k \to +\infty$ и таким образом

$$g(t,x) = \frac{d}{dt} \lim_{t_k \to \infty} \int_0^t X^0(t_k + \tau, x) d\tau.$$

Введем семейство предельных уравнений

$$\dot{x} = X^*(t,x), \quad X^* \in G_0 \tag{3.3}$$

Т е о р е м а 3.2. [13] *Пусть $x = x(t)$, $x(t_0) = x_0$ есть решение непрерывной системы* (1.2)*, определенное и ограниченное компактом $K \subset D_0$ при всех $t \geq t_0$. Тогда для каждой предельной точки $p \in \omega^+(x(t))$ существует некоторая предельная система* (3.3) *с решением $x^*(t)$, $x^*(0) = p$, таким, что $\{x^*(t), t \in R\} \subset \omega^+(x(t))$ для всех $t \in \mathbb{R}$.*

Рассмотрим задачу о локализации положительного предельного множества решения системы (1.2) с разрывной правой частью на основе приведения этого уравнения к включению (2.1).

Для удобства будем полагать, что в представимости области $\tilde{A} = \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2 \cup ... \cup \tilde{A}_l \cup M$ граница M не зависит от $t \in \mathbb{R}$.

Допустим, что в каждой области $\tilde{A}_j \quad (j = \overline{1,l})$, правая часть (1.2) удовлетворяет условию вида (3.2). Построим для каждой области $\tilde{A}_j \quad (j = \overline{1,l})$, совокупность предельных уравнений (3.3) и определим общую совокупность предельных уравнений для области $\tilde{A}_0 = \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2 \cup ... \cup \tilde{A}_l$ согласно следующему определению.

О п р е д е л е н и е 3.2. *Уравнение* (3.3)*, определенное в области $\tilde{A}_0 = \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2 \cup ... \cup \tilde{A}_l$ называется предельным к* (1.2) *для последовательности $t_k \to +\infty$, если оно определяется как предельное к* (1.2) *для этой последовательности в каждой области $\tilde{A}_j \quad (j = \overline{1,l})$.*

Пусть какое-либо уравнение (3.3) является предельным для (1.2) в $\tilde{A}_0$. Доопределим его до предельного включения

$$\dot{x} \in F^*(t, x) \tag{3.4}$$

При этом включим в $F^*(t,x)$ значения $F(t_k+t,x)$, полученные предельным переходом при $t \to +\infty$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.3. [14] *Пусть некоторое решение уравнения* (2.1) $x = x(t)$, $x(t_0) = x_0$, *определено и ограничено компактом* $K \subset D$ *при всех* $t \geq t_0$, *некоторое предельное к* (2.1) *уравнение определяется последовательностью* $t_k \to +\infty$. *Тогда существует подпоследовательность* $t_k \to +\infty$, *такая, что последовательность функций* $x_j(t) = x(t_j + t)$ *сходится при* $t \to +\infty$ *к некоторому решению* $x = x^*(t)$ *уравнения* $\dot{x} = F^*(t,x)$, *при этом сходимость является равномерной по* $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Из теоремы 3.1. имеем следующую теорему о квазиинвариантности положительного предельного множества решения уравнения с разрывной правой частью [14].

Теорема 3.4. [14] *Пусть* $x = x(t)$, $x(t_0) = x_0$, *есть некоторое решение уравнения* (2.1), *определенное и ограниченное компактом* $K \subset \Gamma$ *при всех* $t \geq t_0$. *Тогда для каждой предельной точки* $p \in \omega^+(x(t))$ *этого решения существует некоторое предельное уравнение* $\dot{x} \in F^*(t,x)$ *и некоторое решение этого уравнения* $x = x^*(t)$, $x^*(0) = p$, *определенное при всех* $t \in \mathbb{R}$, *такое, что* $\{x^*(t), \quad t \in \mathbb{R}\} \subset \omega^+(x(t))$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$.

Полученные результаты могут быть также развиты на случай зависимости граничного множества от времени, т.е. когда $M = M(t)$. В этом случае построение проводится следующим образом. Из каждой подобласти $\Gamma_j(t)$ $(j = \overline{1,l})$ выделяют ее часть Γ_j, так, что $\bar{\Gamma}_j \subset \Gamma_j(t)$ для всех $t \in R$. В области $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup ... \cup \Gamma_l$ строится совокупность предельных уравнений $\{\dot{x} = X^*(t,x)\}$. Для каждой последовательности $t_k \to +\infty$, которой определяется соответствующее предельное уравнение $\dot{x} = X^*(t,x)$, находится область $\Gamma_j^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \Gamma(t_k + t), \quad x_k \to x, \quad k \to +\infty\}$, $M_j^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \Gamma(t_k + t), \quad x_k \to x, \quad k \to +\infty\}$ при этом полагаем, что множество $M^*(t)$ имеет меру, равную нулю. Далее, каждое предельное уравнение с областью определения доопределяется до $\Gamma^*(t) = \Gamma_1^*(t) \cup \Gamma_2^*(t) \cup ... \cup \Gamma_l^*(t) \cup M^*(t)$

Более просто это построение проводится в случае, когда граница M областей $\Gamma_j(t)$ задается в виде равенств $\psi_j(t,x) = 0, \quad j = \overline{1,k}$, при этом функции $\psi_j(t,x)$ являются ограниченными, равномерно непрерывными по (t,x).

Тогда граница M^* может быть определена равенствами $\psi_j^*(t,x)=0$, где ψ_j^* есть функции, предельные к $\psi_j(t,x)$ в смысле равномерной сходимости.

Основным методом решения задач об устойчивости и стабилизации нелинейных систем является прямой метод Ляпунова [9], [10], а его составной частью является метод векторной функции Ляпунова [15], [16].

Рассмотрим непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $V(t,x) = (V^1(t,x),...,V^k(t,x))'$, $V : \mathbb{R}^+ \times D_H \to \mathbb{R}^k$. Определим для нее верхнюю производную по времени в силу системы (2.1)

$$\dot{V}^* = (\frac{dV}{dt})^* = (\frac{dV_1^*}{dt},...,\frac{dV_k^*}{dt})' \tag{3.5}$$

где $\frac{dV_i^*}{dt} = \sup_{y\in F(t,x)}(\frac{\partial V_i^*}{\partial t} + \Sigma_{j=1}^n \frac{\partial V_i^*}{\partial x_j} y_j), \quad i=1,2,...,k$

Допустим, что эта производная удовлетворяет условию

$$\dot{V}^*(t,x) \le Y(t,V(t,x)), \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times$$

где $Y : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ есть непрерывная квазимонотонная вектор-функция: каждая из функций $Y_j(t,y)$ не убывает по переменным $y_1,y_2,...,y_{i-1},y_{i+1},...,y_{ll}$, т. к. из условий

$$y_1^1 \le y_1^2,...,y_{i-1}^1 \le y_i^2, y_{i+1}^1 \le y_{i+1}^2,...,y_k^1 \le y_k^2$$

следует, что $Y_j(t,y^2) \le Y_j(t,y^1)$.

Пусть K_1 – класс векторных функций $V=(V^1,V^2,...,V^k)', V : \Gamma \to \mathbb{R}^k$ ограниченных, равномерно непрерывных на каждом множестве $\mathbb{R}\times K$, где $K \subset D$ – компакт. Пусть также K_2 и K_3 – аналогичные классы векторных функций и $W : \mathbb{R}^+ \times \Gamma \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, ограниченных и равномерно непрерывных по $(t,y) \in \mathbb{R}\times K_2$ и $(t,x,y) \in \mathbb{R}\times K_1 \times K_2$ для любых компактных множеств $K_1 \subset \Gamma$ и $K_2 \subset \mathbb{R}^k$.

Для каждой функции $V \in K_1$ семейство сдвигов

$$\{V_\tau(t,x) = V(t+\tau,x), \quad \tau \in \mathbb{R}^+\}$$

будет предкомпактно в некотором функциональном метризуемом пространстве F_V непрерывных функций $V :\to R^k$ с открыто-компактной топологией. Отсюда следует, что для любой последовательности $t_l \to +\infty$ найдутся подпоследовательность $t_{l_j} \to +\infty$ и функция $V^* \in F_V$, такие, что последовательность сдвигов $\{V_j(t,x) = V(t_{l_j}+t,x)\}$ будет сходиться к предельной функции $V^*(t,x)$ в пространстве , а именно: сходимость будет равномерной по $(t,x) \in [-\beta,\beta]\times K$ для каждого числа $\beta > 0$ и каждого компактного множества $K \subset \Gamma$. Тем самым, для функции V можно определить семейство предельных функций $\{V^*\}$.

Аналогично, для функций $Y \in K_2$ и $W \in K_3$ можно построить соответственно семейства $\{Y^*\}$ и $\{W^*\}$ предельных функций.

Пусть существует непрерывно дифференцируемая функция $V \in K_1$, производная которой в силу включения (2.1) представима в виде

$$\dot{V}^*(t,x) = Y(t, V(t,x)) + W(t,x,V(t,x)) \tag{3.6}$$
$$Y(t,0) \equiv 0, \quad W(t,0,V(t,0)) \equiv 0$$

где функция $Y = Y(t,y)$ принадлежит классу K_2, $Y \in K_2$, и является квазимонотонной и непрерывно дифференцируемой по $y \in R^k$, $\frac{\partial Y}{\partial y} \in K_2$ функция $W = W(t,x,y)$ принадлежит классу $K_3, W \in K_3$, и имеет место неравенство $W(t,x,y) \leq 0$ для любых $(t,x,y) \in R \times D \times \mathbb{R}^k$.

Из представления (3.6) следует, что функция $V(t,x)$ является вектор-функцией сравнения, а система

$$\dot{y}(t,x) = Y(t,y) \tag{3.7}$$

— системой сравнения.

Если $V = V(t,x)$ есть функция, удовлетворяющая уравнению (3.6), при этом $V(t_0,x_0) = V_0$, а $y = y(t,t_0,V_0)$ есть решение (3.7), определенное на интервале $[t_0, t_0+\beta)$, $\quad \beta > 0$, то для всех $t \in [t_0, t_0+\beta)$ на решении $x = x(t)$, $\quad (x(t_0) = x_0)$, включения (2.1) выполняется неравенство

$$V(t,x(t)) \leq y(t,t_0,V_0).$$

Из условия $Y \in K_2$ следует, что система (3.7) предкомпактна и для нее можно определить семейство предельных систем сравнения

$$\dot{y} = Y^*(t,y), \quad Y^* \in F_y \tag{3.8}$$

Из условий относительно правой части $Y = Y(t,y)$ системы (3.8) следует, что решения этой системы $y = y(t,t_0,y_0)$ непрерывно дифференцируемы по $(t_0,y_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^k$. Из свойства неубывания зависимости $y = y(t,t_0,y_0)$ по y_0 следует, что матрица

$$\Phi(t,t_0,y_0) = \frac{\partial y(t,t_0,y_0)}{\partial y_0}$$

является неотрицательной, нормированной, $\Phi(t,t_{0,}y_0) = I$ $\;(I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – единичная матрица) фундаментальной матрицей для линейной системы в вариациях

$$\dot{z} = H(t,t_{0,}y_0)z, H = \left.\frac{\partial Y(t,y)}{\partial y}\right|_{y=y(t,t_0,y_0)}$$

Предположим, что для любого компакта $K \in \mathbb{R}^k$ существуют числа $M(K)$ и $\alpha(K) > 0$, такие, что матрица Φ для любых $(t, t_0, y_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times K$ удовлетворяет условиям

$$\|\Phi(t, t_0, y_0)\| \leq M(K), \det \Phi(t, t_0, y_0) \geq \alpha(K) \tag{3.9}$$

Имеет место следующая теорема о локализации положительного предельного множества $\omega^+(x(t))$ решения включения (2.1).

Теорема 3.5. *Предположим, что:*

1. *существует вектор-функция Ляпунова $V = V(t, x), V \in K_1$, удовлетворяющая дифференциальному равенству* (3.6)*;*
2. *решения системы сравнения* (3.7) *удовлетворяют условию* (3.9)*;*
3. *решение $x(t), x(t_0) = x_0$ включения* (2.1) *ограничено некоторым компактом $K \subset \Gamma$ для всех $t \geq t_0$;*
4. *решение $y(t) = y(t, t_0, y_0)$ системы сравнения* (3.7)*, где $V_0 = V(t_0, x_0)$, ограничено при всех $t \geq t_0$.*

Тогда для любой предельной точки $p \in \omega^+(x(t))$ найдётся набор предельных функций (F^*, V^*, Y^*, W^*), такой, что решение $x = x^*(t)$ предельного включения (3.4) *с начальным условием $x^*(0) = p$ удовлетворяет соотношениям*

$$x^*(t) \in \omega^+(x(t)), x^*(t) \in \{V^*(t, x) = y^*(t)\} \cap \{W^*(t, x, y^*(t)) = 0\}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, где $y^*(t)$ есть решение предельной системы сравнения (3.4) *с начальным условием $y^*(0) = V^*(0, p)$.*

Теорема 3.5. позволяет вывести новые формы о достаточных условиях существования стабилизирующего управления $u = u^0(t, x)$. Из равномерной асимптотической устойчивости следует важное свойство устойчивости при постоянно действующих возмущениях, а из предельного поведения движений можно судить о глобальном поведении движений, что очень важно для управляемых систем с периодическими фазовыми координатами.

Теорема 3.6. *Предположим, что существует вектор-функция Ляпунова $V = V(t, x), V \in K_1$, такая, что:*

1. *соответствующая скалярная функция $\overline{V}(t, x)$, определяемая в виде*

$$\bar{V}(t, x) = \sum_{i=1}^{k} V^i(t, x) \wedge \bar{V}(t, x) = \max V^i(t, x)$$

является определённо-положительной;

1. *нулевое решение $y = 0$ системы сравнения (3.7) равномерно устойчиво;*

2. *для любой предельной совокупности (F^*, V^*, Y^*, W^*) и каждого ограниченного решения $y = y^*(t) \neq 0$ n редельной системы сравнения (3.8) множество $\{V^*(t,x) = y^*(t)\} \cap \{W^*(t,x,y^*(t)) = 0\}$ не содержит решений предельного включения (3.4).*

Тогда управление $u = u^0(t,x)$ является стабилизирующим для системы (1.1).

Для применения знакопостоянных вектор-функций Ляпунова в поставленной задаче стабилизации введём следующие определения из [13].

Определение 3.3. *Нулевое решение $x = 0$ устойчиво относительно множества $\{\bar{V}^*(t,x) = 0\}$ и выбранной предельной совокупности (F^*, V^*, Y^*, W^*), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любого решения $x = x^*(t)$ системы (3.7), такого, что*

$$x^*(0) = x_0, x_0 \in \{\|x\| < \delta\} \cap \{W^*(0,x,0) = 0\}$$

для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство $\|x^*(t,x_0)\| < \varepsilon$.

Определение 3.4. *Нулевое решение $x = 0$ асимптотически устойчиво относительно множества $\{\bar{V}^*(t,x) = 0\}$ и выбранной предельной совокупности (F^*, V^*, Y^*, W^*), если оно устойчиво, а также существует число $\Delta > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $T = T(\varepsilon) > 0$, такие, что для любого решения $x = x^*(t)$ системы (3.7), такого, что*

$$x^*(0) = x_0, \quad x_0 \in \{\|x\| < \delta\} \cap \{W^*(0,x,0) = 0\}$$

для всех $t \geq T$ выполняется неравенство $\|x^*(t)\| < \varepsilon$.

Определение 3.5. *Нулевое решение $x = 0$ равномерно устойчиво относительно множества $\{\bar{V}^*(t,x) = 0\}$ и семейства предельных совокупностей $\{(F^*, V^*, Y^*, W^*)\}$, если число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ в определении 3.3. не зависит от выбора (F^*, V^*, Y^*, W^*).*

Определение 3.6. *Нулевое решение $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво относительно множества $\{\bar{V}^*(t,x) = 0\}$ и семейства предельных совокупностей $\{(F^*, V^*, Y^*, W^*)\}$, если числа $\Delta > 0$ и $T = T(\varepsilon) > 0$ в определении 3.4. не зависят от выбора (F^*, V^*, Y^*, W^*).*

Т е о р е м а 3.7. *Предположим, что существует вектор-функция Ляпунова* $V = V(t,x) \geq 0, V \in K_1$ *такая, что выполнены условия 1-3 теоремы 3.6., а также условия:*

1. *Нулевое решение* $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* $\{\bar{V}^*(t,x) = 0\}$ *и семейства предельных совокупностей* $\{(F^*, V^*, Y^*, W^*)\}$.
2. *Множество* $\{V^*(t,x) = y^*(t)\} \cap \{W^*(t,x,y^*(t)) = 0\}$ *не содержит решений предельного включения* (3.7). *(Здесь* $y^*(t) \neq 0$ *– произвольное ограниченное решение предельной системы сравнения* (3.8)*).*

Тогда управление $u = u^0(t,x)$ *является стабилизирующим для системы* (1.1).

В решении конкретных задач представляются важными следующие достаточные условия обеспечения заданного программного движения $x = 0$ системы (1.2).

Пусть управление $u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_m(t,x))'$ является кусочно-непрерывным, при этом функции $u_j(t,x)$ $(j = \overline{1,m})$ терпят разрыв на поверхности $\{\psi_j(t,x) = 0\}$, где $\psi_j : \mathbb{R}^+ \times \tilde{A} \to \mathbb{R}$ $(j = \overline{1,l})$ есть функции ограниченные и равномерно непрерывные по $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times K, \quad K \subset \tilde{A}$.

Т е о р е м а 3.8. *Допустим, что можно найти вектор-функцию Ляпунова* $V = V(t,x) \geq 0, \quad V \in K_1$ *такую, что:* $\bar{V}(t,x) \geq a_1(|\psi(t,x)|)$, *выполнены условия 1-3 теоремы 3.6., а также условия:*

1. *нулевое решение* $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* $\{\psi^*(t,x) = 0\}$ *и семейства предельных совокупностей* $\{(F^*, V^*, Y^*, W^*)\}$.
2. *множество* $\{V^*(t,x) = y^*(t)\} \cap \{W^*(t,x,y^*(t)) = 0\}$ *не содержит решений предельного включения* (3.4). *(Здесь* $y^*(t) \neq 0$ *– произвольное ограниченное решение предельной системы сравнения* (3.8)*).*

Тогда управление $u = u^0(t,x)$ *является стабилизирующим для системы* (1.1).

Следствием изложенных результатов являются следующие теоремы об управлении системой с мгновенной обратной связью.

Т е о р е м а 3.9. *Допустим, что для системы* (1.1) *можно найти управляющее воздействие* $u = u^0(t,x)$ *и вектор функцию Ляпунова* $V = V(t,x)$, *такие, что:*

1. $a_1(|\psi(t,x)|) \le \bar{V}(t,x), V_i(t,x) \le a_2(|\psi(t,x)|), i = 1, 2, ..., k$;
2. *производная вектор-функции Ляпунова в силу* (1.2) *удовлетворяет неравенству*

$$\dot{V}^*(t,x) \le -a_3(|\psi(t,x)|);$$

3. *невозмущенное движение* $x = 0$ *системы* (1.2) *равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* $\{\psi(t,x) = 0\}$.

Тогда управляющее воздействие $u = u^0(t,x)$ *решает поставленную задачу о стабилизации.*

Полученные результаты позволяют обосновать новые подходы к построению нелинейных моделей управления нелинейными механическими системами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-33082мол_а_вед) и Минобрнауки России в рамках базовой части (код проекта 2097).

Список литературы

1. Вукобратович М. К., Стокич Д. М., *Управление манипуляционными роботами: Теория и применение*, Наука, М., 1985, 384 с.
2. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г., *Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация*, Наука, М., 1989, 368 с.
3. Андреев А. С., *Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений*, УлГУ, Ульяновск, 2005.
4. Барбашин Е. А., Алимов Ю. И., “К теории релейных дифференциальных уравнений”, *Изв. вузов. Математика*, 1965, № 1.
5. Алимов Ю. И., “О применении прямого метода Ляпунова к дифференциальным уравнениям с неоднозначными правыми частями”, *Автоматика и телемеханика*, 1961, № 7, 817–830.
6. Айзерман М. А., Пятницкий Е. С., “Основы теории разрывных систем I,II”, *Автоматика и телемеханика*, 1974, № 8, 39–61.
7. Филиппов А. Ф., “Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью”, *Матем. сборник*, **51(93)**:1 (1960), 99–128.

8. Филиппов А. Ф., *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Наука, М., 1985, 224 с.

9. Малкин И. Г., *Теория устойчивости движения*, Наука, М., 1966, 530 с.

10. Руш Н., Абетс П., Лалуа М., *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости*, Мир, М., 1980, 300 с.

11. Андреев А. С., "Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы", *ПММ*, **48**:2 (1984), 225–232.

12. Sell G. R., "Nonautonomous differential equations and topological dynamics", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **22** (1967), 254–269.

13. Андреев А. С., Перегудова О. А., "К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости", *Доклады Академии наук*, **400**:5 (2005), 621–624.

14. Андреев А. С., Дмитриева О. Г., Петровичева Ю. В., "Об устойчивости нулевого решения системы с разрывной правой частью", *Научно-технический вестник Поволжья*, 2011, № 1, 15–21.

15. Матросов В. М., "Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова", *Дифференц. уравнения*, **4**:8 (1968), 1374–1386.

16. Васильев С. Н., "Метод сравнения в анализе систем", *Дифференц. уравнения*, **17**:9 (1981), 1562–1573.

Lyapunov vector-functions in the problem of stabilization of motion controlled systems.

© A. S. Andreev[3], O. A. Peregudova[4]

Abstract. In the work we obtain sufficient conditions for the stabilization of systems differential equations with discontinuous right-hand side. The proof is based on the construction of the Lyapunov vector functions and comparison systems and application of method of limiting equations.

Key Words: systems of differential equations with discontinuous right side, stabilization, Lyapunov vector-functions.

[3] Head of Information Security and Control Theory Chair, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; AndreevAS@ulsu.ru.

[4] Professor of Information Security and Control Theory Chair, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; peregudovaoa@sv.ulsu.ru.