УДК 517.9

Необходимые условия топологической сопряжённости трёхмерных диффеоморфизмов с гетероклиническими касаниями

© **Е. А. Гринес**[1], **О. В. Починка**[2]

Аннотация. В настоящей работе рассматривается класс трёхмерных диффеоморфизмов с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством и конечным числом орбит гетероклинического касания. Доказывается, что для изучаемых диффеоморфизмов необходимые условия топологической сопряжённости являются обобщением модулей топологической сопряженности аналогичных двумерных динамических систем.

Ключевые слова: топологическая сопряжённость, гетероклинические касания, модули устойчивости.

Введение

Согласно работе Ш. Ньюхауса и Ж. Палиса [10], существует открытое множество дуг, которые начинаются в диффеоморфизме Морса-Смейла и имеют первую бифуркационную точку в диффеоморфизме с гетероклиническим касанием. В обзоре [1] описаны бифуркации систем, принадлежащих границе множества систем Морса-Смейла, в которую входят системы с конечным множеством неблуждающих траекторий, содержащим неподвижные точки, инвариантные многообразия которых имеют нетрансверсальное пересечение. Очевидно, что нарушение условия трансверсальности гетероклинических пересечений седловых точек диффеоморфизма приводит к его негрубости. Более того, это приводит к возникновению непрерывных топологических инвариантов — *модулей топологической сопряженности* — и, следовательно, к существованию континуума несопряженных диффеоморфизмов с изоморфными графами и одинаковой геометрией гетероклинического пересечения.

Первым, кто обратил внимание на существование модулей топологической сопряженности, был Ж. Палис [12]. Он обнаружил, что такими модулями обладают уже двумерные диффеоморфизмы с негрубой гетероклинической траекторией, в точках которой инвариантные многообразия двух разных седловых неподвижных точек имеют одностороннее касание. Существенным продвижением в этом направлении явилась работа В. ди Мелу, С. Ж. ван Стрина [7], в которой были найдены необходимые и достаточные условия того, что диффеоморфизм ориентируемой поверхности имеет конечное число модулей топологической сопряженности, описывающих все классы топологической сопряженности, принадлежащие некоторой окрестности такого диффеоморфизма.

В 2010 г. в работе [8] Т.М. Митряковой и О.В. Починки была получена топологическая классификация содержательного класса диффеоморфизмов ориентируемой поверхности с конечным числом модулей топологической сопряжённости. Радикальное отличие от уже упомянутой работы [7] заключается в приведении условий топологической сопряжённости систем не только для некоторой окрестности диффеоморфизмов данного класса, но и для "далёких" систем.

[1] Магистрант кафедры численного и функционального анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского; grineseugene@mail.ru

[2] Доцент кафедры теории функций ННГУ им. Н.И. Лобачевского; olga-pochinka@yandex.ru

В случае многообразий размерности большей двух известно лишь несколько результатов. В работе Ш. Ньюхауса, Ж. Пэлиса и Ф. Такенса [11] приведено и доказано необходимое условие топологической сопряжённости двух диффеоморфизмов n-мерных многообразий, содержащих одну орбиту одностороннего гетероклинического касания. В работе Ж. Пэлиса и В. ди Мелу [6] рассмотрены диффеоморфизмы n-мерных многообразий с одной орбитой одностороннего гетероклинического касания и приведена классификация диффеоморфизмов в окрестности.

В настоящей работе мы изучаем необходимые условия топологической сопряжённости диффеоморфизмов трёхмерных многообразий с несколькими орбитами одностороннего гетероклинического касания.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м) и гранта Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

1. Формулировка результатов

В данной работе рассматривается класс $\Psi \subset \mathrm{Diff}^4(M^3)$ диффеоморфизмов f, заданных на гладком трёхмерном замкнутом ориентируемом многообразии M^3, сохраняющих ориентацию и удовлетворяющих следующим условиям:

1) Цепно рекуррентное множество $\mathcal{R}_f$ конечно и состоит из конечного числа неподвижных гиперболических точек, собственные значения которых положительны и удовлетворяют условию отсутствия резонансов[3] вплоть до третьего порядка;

2) блуждающее множество диффеоморфизма f содержит конечное число орбит гетероклинического касания;

Пусть p, q — различные гиперболические седловые точки диффеоморфизма f такие, что пересечение $W^s_p \cap W^u_q$ непусто. Тогда произвольная точка $x \in W^s_p \cap W^u_q$ называется *точкой гетероклинического пересечения.* Она может быть точкой *трансверсального* или *нетрансверсального* пересечения в следующем смысле. Два гладких подмногообразия N_1, N_2 многообразия M^3 *пересекаются трансверсально в точке* $x \in (N_1 \cap N_2)$, если $T_xN_1 + T_xN_2 = T_xM^3$. В противном случае, пересечение в точке x называется *нетрансверсальным пересечением (касанием).* Изолированная точка касания x гладких двумерных подмногообразий N_1 и N_2 многообразия M^3 называется *точкой одностороннего касания*, если существует окрестность V_x точки x такая, что N_2 пересекается не более, чем с одной компонентой связности множества $V_x \setminus N_1$. Например любая изолированная точка касания двумерных инвариантных многообразий диффеоморфизма $f \in \Psi$ является точкой одностороннего касания.

Пусть σ – седловая точка диффеоморфизма $f \in \Psi$. Обозначим через $J_\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ линейный диффеоморфизм, определяемый жордановой формой линейной части диффеоморфизма f в окрестности точки σ. Точка $O(0,0,0)$ является седловой точкой диффеоморфизма J_σ. В разделе 2. для каждого типа жордановой формы построена J_σ-инвариантная окрестность U_{J_σ} точки O.

[3] Напомним, что для набора собственных чисел $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$ некоторой матрицы A *резонансом* называют соотношение $\rho_i = \rho_1^{m_1} \cdot \rho_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot \rho_n^{m_n}$, где $i \in \{1, \ldots, n\}$, m_j $(j = 1, \ldots, n)$ – целые неотрицательные числа такие, что $|m| = \sum\limits_{j=1}^{n} m_j \geqslant 2$. Число $|m|$ называют *порядком резонанса.*

Определение 1.1. *f-инвариантную окрестность U_σ седловой точки σ назовем C^1-линеаризующей, если существует C^1-диффеоморфизм $\psi_\sigma : U_\sigma \to U_{J_\sigma}$, сопрягающий диффеоморфизм $f\Big|_{U_\sigma}$ с диффеоморфизмом $J_\sigma\Big|_{U_{J_\sigma}}$.*

Следующая лемма доказана в разделе 2.

Лемма 1.1. *У любой седловой точки σ диффеоморфизма $f \in \Psi$ существует линеаризующая окрестность.*

Для диффеоморфизма f обозначим через $\mathcal{A}$ множество таких точек гетероклинического касания, которые образованы в результате касания двумерных инвариантных многообразий. Для любой точки $a \in \mathcal{A}$ обозначим через σ_a^s и σ_a^u седловые точки такие, что a принадлежит пересечению инвариантных многообразий $W^s_{\sigma_a^s}$ и $W^u_{\sigma_a^u}$ диффеоморфизма $f \in \Psi$. Важным является то, что у σ_a^s обязательно есть одномерное неустойчивое многообразие, равно как у σ_a^u есть одномерное устойчивое многообразие. Обозначим через μ_a и λ_a собственное число, соответствующее одномерному собственному направлению для $J_{\sigma_a^s}$ и $J_{\sigma_a^u}$ соответственно.

Для произвольной точки $a \in \mathcal{A}$ определим параметр Θ_a, где $\Theta_a = \frac{\ln \mu_a}{\ln \lambda_a}$. Доказательство следующего факта можно найти, например, в статье [11].

Предложение 1.1. *Если диффеоморфизмы $f, f' \in \Psi$ топологически сопряжены посредством гомеоморфизма h такого, что $h(a) = a'$ для точки $a \in \mathcal{A}$, $h(\sigma_a^s) = \sigma_{a'}^s$, $h(\sigma_a^u) = \sigma_{a'}^u$, то $\Theta_a = \Theta_{a'}$.*

Согласно ранее введённым обозначениям, $U_{\sigma_a^s} = \psi^{-1}_{\sigma_a^s}(U_{J_{\sigma_a^s}})$, $U_{\sigma_a^u} = \psi^{-1}_{\sigma_a^u}(U_{J_{\sigma_a^u}})$ — линеаризующие окрестности. Обозначим за U_a компоненту связности множества $U_{\sigma_a^s} \cap U_{\sigma_a^u}$, содержащую точку a. Для любой точки $p \in U_a$ запишем координаты её образов:

$$p^s = \psi_{\sigma_a^s}(p) = ([p]^s_x, [p]^s_y, [p]^s_z),$$

$$p^u = \psi_{\sigma_a^u}(p) = ([p]^u_x, [p]^u_y, [p]^u_z)$$

и положим

$$g_a = \psi_{\sigma_a^u} \circ \left(\psi_{\sigma_a^s}\Big|_{U_a}\right)^{-1} : \psi_{\sigma_a^s}(U_a) \to \psi_{\sigma_a^u}(U_a).$$

Отображение g_a можно так же записать в координатном виде как

$$g_a(x, y, z) = (\xi_a(x, y, z), \eta_a(x, y, z), \chi_a(x, y, z)).$$

Рассмотрим теперь подкласс диффеоморфизмов $\Psi^* \subset \Psi$ с дополнительным условием: Θ_a иррационально для любой $a \in \mathcal{A}$. Будем рассматривать такие точки касания a, $d \in \mathcal{A}$, что $\sigma_d^s = \sigma_a^s$, $\sigma_d^u = \sigma_a^u$ и знаки производных $\beta_a = \frac{\partial \chi_a}{\partial z}(a^s)$ и $\beta_d = \frac{\partial \chi_d}{\partial z}(d^s)$ совпадают. Для таких точек введём параметр $\tau_d^a = \left|\frac{\beta_a}{\beta_d}\right|^{\frac{1}{\ln \mu_a}}$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если диффеоморфизмы $f, f' \in \Psi^*$ топологически сопряжены посредством гомеоморфизма h такого, что $h(a) = a'$, $h(d) = d'$, $h(\sigma_a^s) = \sigma_{a'}^s$ и $h(\sigma_a^u) = \sigma_{a'}^u$, то $\tau_d^a = \tau_{d'}^{a'}$.*

2. Линеаризующая окрестность

Напомним, что для седловой точки σ диффеоморфизма $f\in\Psi$ мы обозначили через $J_\sigma:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ линейный диффеоморфизм, определяемый жордановой формой линейной части диффеоморфизма f в окрестности точки σ. Если седловая точка σ имеет двумерное устойчивое многообразие, то диффеоморфизм $J_\sigma:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ и J_σ- инвариантная окрестность U_{J_σ} седловой точки $O(0,0,0)$ диффеоморфизма J_σ имеют один из следующих трёх видов:

1. $J_\sigma(x,y,z)=(\lambda_1x,\lambda_2y,\mu z)$, где $0<\lambda_1,\lambda_2<1$ и $\mu>1$;
$U_{J_\sigma}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\left(x|z|^{-\log_\mu\lambda_1}\right)^2+\left(y|z|^{-\log_\mu\lambda_2}\right)^2\leqslant 1\right\}$.

2. $J_\sigma(x,y,z)=(\lambda x+y,\lambda y,\mu z)$, где $0<\lambda<1$ и $\mu>1$;
$U_{J_\sigma}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\left(y|z|^{-\log_\mu\lambda}\right)^2+\left(x|z|^{-\log_\mu\lambda}-\frac{y}{\lambda\ln\mu}\cdot\ln|z|\cdot|z|^{-\log_\mu\lambda}\right)^2\leqslant 1\right\}\bigcup\{z=0\}$.

3. $J_\sigma(x,y,z)=\big(\rho\cdot(x\cdot\cos\varphi-y\cdot\sin\varphi),\rho\cdot(x\cdot\sin\varphi+y\cdot\cos\varphi),\mu z\big)$, где $0<\rho<1$ и $\mu>1$;
$U_{J_\sigma}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x^2+y^2)\cdot|z|^{-\log_\mu\rho}\leqslant 1\right\}$.

Аналогичным образом записываются отображение J_σ и окрестность U_{J_σ} в случае, когда седловая точка σ имеет двумерное неустойчивое многообразие.

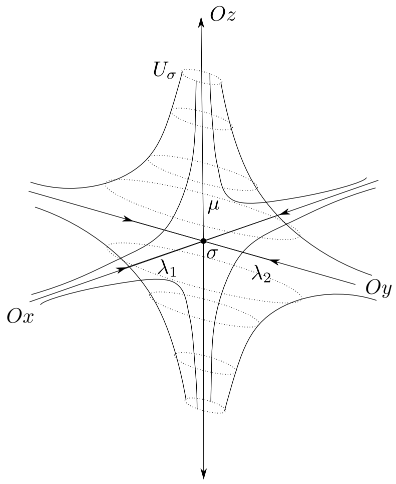

Рисунок **2.1**

Линеаризующая окрестность U_{J_σ} для $J_\sigma(x,y,z)=(\lambda_1x,\lambda_2y,\mu z)$

Лемма 2.1. *У любой седловой точки σ диффеоморфизма $f\in\Psi$ существует линеаризующая окрестность.*

Доказательство. Поскольку $f\in\mathrm{Diff}^4(M^3)$ и удовлетворяет условию отсутствия резонансов вплоть до третьего порядка, то, согласно теореме Белицкого (см. [2], глава 6, §5 или [15], теорема 3.20), в окрестности точки σ диффеоморфизм f приводится к линейному виду C^1-гладкой заменой переменных. Таким образом, для диффеоморфизма $f\in\Psi$ существуют окрестности V_σ седловой точки σ диффеоморфизма f, V_O — начала координат $O(0,0,0)$ и C^1- диффеоморфизм $\bar\psi_\sigma:V_\sigma\to V_O$, сопрягающий ограничение диффеоморфизма f на V_σ с ограничением диффеоморфизма $\mathrm{D}f_\sigma$ на V_O. Определим множества $\tilde{V}_\sigma = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} f^n(V_\sigma)$ и $\tilde{V}_O = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{D}f^n_\sigma(V_O)$. Так как W^s_σ и W^u_σ являются подмногообразиями M^3 (доказательство проводится аналогично работе [9], пункт 2 теоремы 1), то диффеоморфизм $\bar{\psi}_\sigma$ можно продолжить до диффеоморфизма $\tilde{\psi}_\sigma : \tilde{V}_\sigma \to \tilde{V}_O$, определенного на f-инвариантном множестве $\tilde{V}_\sigma$, положив его равным $\tilde{\psi}_\sigma(x) = \mathrm{D}f^{-m}_\sigma(\bar{\psi}_\sigma(f^m(x)))$, где m — целое число такое, что $f^m(x) \in V_\sigma$. Линейной заменой координат S в $\mathbb{R}^3$ можно сопрячь ограничение диффеоморфизма $\mathrm{D}f_\sigma$ на инвариантном множестве $\tilde{V}_O$ с его жордановой формой J_σ на инвариантном множестве $\tilde{V}_O$.

Для любого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$U^k_{J_\sigma} = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{k}x, \sqrt{k}y, z) \in U_{J_\sigma}\Big\}.$$

Выберем $k \in \mathbb{N}$ такое, что $U^k_{J_\sigma} \subset \tilde{V}_O$. Заметим, что линейный диффеоморфизм $J_\sigma\Big|_{U^k_{J_\sigma}}$ сопряжен с диффеоморфизмом $J_\sigma\Big|_{U_{J_\sigma}}$ посредством диффеоморфизма $h(x,y,z) = (\sqrt{k}x, \sqrt{k}y, z)$. Тогда $U_\sigma = \tilde{\psi}^{-1}_\sigma \circ S^{-1}(U^k_{J_\sigma})$ — искомая линеаризующая окрестность с сопрягающим диффеоморфизмом

$$\psi_\sigma = h \circ S \circ \tilde{\psi}_\sigma : U_\sigma \to U_{J_\sigma}.$$

Доказательство закончено.

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 3.1. *Для отображения линеаризующих окрестностей*

$$g_a(x,y,z) = (\xi_a(x,y,z), \eta_a(x,y,z), \chi_a(x,y,z))$$

справедливы следующие соотношения: $\frac{\partial \chi_a}{\partial x}(a^s) = 0$, $\frac{\partial \chi_a}{\partial y}(a^s) = 0$, $\frac{\partial \chi_a}{\partial z}(a^s) \neq 0$.

Доказательство. Между инвариантными многообразиями $W^s_{\sigma^s_a}$, $W^u_{\sigma^u_a}$ и их образами в линеаризующих окрестностях $U_{J_{\sigma^s_a}}$, $U_{J_{\sigma^u_a}}$ есть следующая связь:

- плоскость Oxy в $U_{J_{\sigma^s_a}}$ соответствует $W^s_{\sigma^s_a}$;
- поверхность $\psi_{\sigma^s_a}(W^u_{\sigma^u_a})$ в $U_{J_{\sigma^s_a}}$ соответствует $W^u_{\sigma^u_a}$;
- плоскость Oxy в $U_{J_{\sigma^u_a}}$ соответствует $W^u_{\sigma^s_u}$;
- поверхность $\psi_{\sigma^u_a}(W^s_{\sigma^s_a})$ в $U_{J_{\sigma^u_a}}$ соответствует $W^s_{\sigma^s_a}$.

Пусть a – точка касания $W^s_{\sigma^s_a}$ и $W^u_{\sigma^u_a}$. В силу того, что $\psi_{\sigma^s_a}$ и $\psi_{\sigma^u_a}$ – диффеоморфизмы, то $\psi_{\sigma^s_a}(a)$ и $\psi_{\sigma^u_a}(a)$ так же будут точками касания для образов $W^s_{\sigma^s_a}$ и $W^u_{\sigma^u_a}$ в соответствующих окрестностях $U_{J_{\sigma^s_a}}$ и $U_{J_{\sigma^u_a}}$ (см. [13]).

Рассмотрим теперь пару гладких кривых на плоскости $Oxy \subset U_{J_{\sigma^s_a}}$, проходящих через точку a^s. Пусть касательные векторы к этим кривым в точке a^s равны $(1,0,0)$ и $(0,1,0)$ соответственно. При действии отображения $g_a(x,y,z)$ на эти кривые они перейдут в кривые, принадлежащие поверхности $\psi_{\sigma^u_a}(W^s_{\sigma^s_a}) \subset U_{J_{\sigma^u_a}}$ и касающиеся плоскости $Oxy \subset U_{J_{\sigma^u_a}}$. По условию, касательные векторы к образам кривых в точке a^u должны лежать в плоскости $Oxy \subset U_{J_{\sigma_a^u}}$. Воспользуемся теоремой о композиции дифференцируемых отображений, считая, что исходные кривые были параметризованы некоторым параметром t:

$$\begin{pmatrix} \xi'_t \\ \eta'_t \\ \chi'_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\xi_a}{\partial x} & \frac{\partial\xi_a}{\partial y} & \frac{\partial\xi_a}{\partial z} \\ \frac{\partial\eta_a}{\partial x} & \frac{\partial\eta_a}{\partial y} & \frac{\partial\eta_a}{\partial z} \\ \frac{\partial\chi_a}{\partial x} & \frac{\partial\chi_a}{\partial y} & \frac{\partial\chi_a}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \\ z'_t \end{pmatrix},$$

где матрица частных в производных есть в точности матрица Якоби для отображения $g_a(x,y,z)$. Подставим в правую часть известные касательные векторы и получим, что касательные векторы к образам равны $(\frac{\partial\xi_a}{\partial x}, \frac{\partial\eta_a}{\partial x}, \frac{\partial\chi_a}{\partial x})$ и $(\frac{\partial\xi_a}{\partial y}, \frac{\partial\eta_a}{\partial y}, \frac{\partial\chi_a}{\partial y})$. Из условия касания плоскости $Oxy \subset U_{J_{\sigma_a^u}}$ делаем вывод, что $\frac{\partial\chi_a}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\chi_a}{\partial y} = 0$. Однако, так как $g_a(x,y,z)$ – диффеоморфизм, то его якобиан не обращается в ноль, следовательно, необходимо чтобы $\frac{\partial\chi_a}{\partial z} \neq 0$.

Доказательство закончено.

В дальнейшем при доказательстве некоторых утверждений мы будем ссылаться на

Предложение 3.1. *Пусть σ – седловая точка и J_σ – одна из перечисленных ранее жордановых форм. Для любой последовательности точек $\{r_n\}$ из $U_{J_\sigma} \setminus Oz$, сходящейся к точке $r \in (Oz \setminus O)$, существует подпоследовательность $\{r_{n_j}\}$, последовательность целых чисел $k_j \to +\infty$ и точка q в $Oxy \setminus O$ такие, что последовательность точек $\{f^{k_j}(r_{n_j})\}$ сходится к точке q (доказательство аналогично лемме 2.1.1 в* [3]*).*

Пусть $\{a_\nu\} \subset (U_a \setminus W^u_{\sigma_a^u})$ — последовательность точек, сходящаяся к точке одностороннего касания $a \in W^s_{\sigma_a^s} \cap W^u_{\sigma_a^u}$ и удовлетворяющая при некоторых положительных константах C_1 и C_2 условиям $\left|\frac{[a_\nu]^s_x - [a]^s_x}{[a_\nu]^s_z}\right| < C_1$ и $\left|\frac{[a_\nu]^s_y - [a]^s_y}{[a_\nu]^s_z}\right| < C_2$. Заметим, что последняя пара ограничений также запрещает выбор точек на $W^s_{\sigma_a^s}$, то есть, $\{a_\nu\} \subset U_a \setminus (W^u_{\sigma_a^u} \cup W^s_{\sigma_a^s})$ Из предложения 3.1. следует, что существует подпоследовательность $\{a_{\nu_n}\}$, последовательности натуральных чисел $\{k_n\}$, $\{m_n\}$, точка $b \in (W^u_{\sigma_a^s} \setminus \sigma_a^s)$ и точка $c \in (W^s_{\sigma_a^u} \setminus \sigma_a^u)$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = +\infty$ и последовательности точек $\{b_n = f^{k_n}(a_{\nu_n})\}$, $\{c_n = f^{-m_n}(a_{\nu_n})\}$ сходятся к точкам b и c, соответственно (см. рис. 3.1). Здесь и далее последовательность $\{a_{\nu_n}\}$ для краткости будем обозначать как $\{a_n\}$.

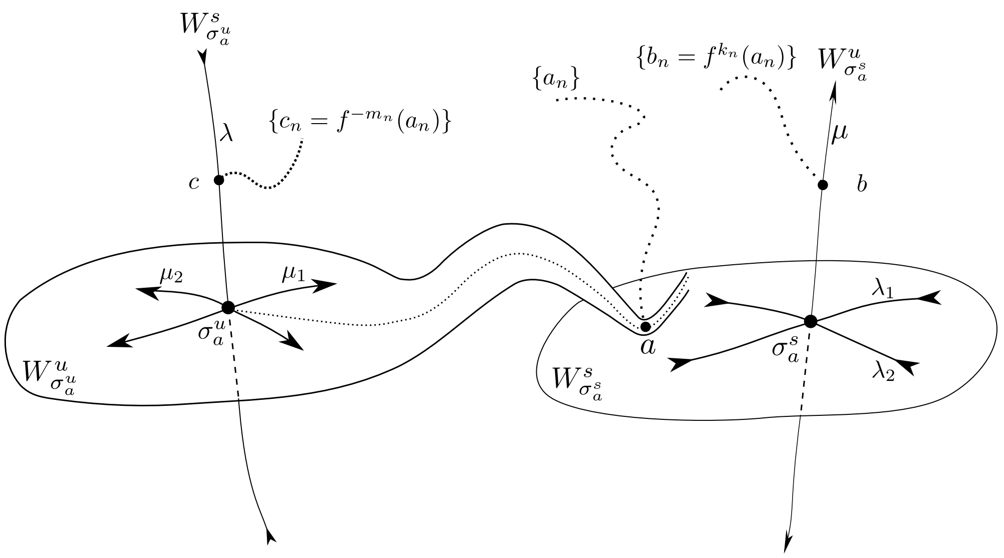

Рисунок **3.1**
Иллюстрация к лемме 3.2.

Л е м м а 3.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m_n}{k_n}=-\frac{\ln\mu_a}{\ln\lambda_a}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $c_n=f^{-m_n}(a_n)$ и $a_n=f^{-k_n}(b_n)$, то справедливы следующие соотношения:

$$[c_n]^u_z=\lambda_a^{-m_n}\cdot[a_n]^u_z,$$
$$[b_n]^s_z=\mu_a^{k_n}\cdot[a_n]^s_z.$$

Рассмотрим отношение $\frac{[c_n]^u_z}{[b_n]^s_z}=\lambda_a^{-m_n}\mu_a^{-k_n}\cdot\frac{[a_n]^u_z}{[a_n]^s_z}$. Множитель $\frac{[a_n]^u_z}{[a_n]^s_z}$ может быть представлен в виде

$$\frac{[a_n]^u_z}{[a_n]^s_z}=\frac{\chi_a([a_n]^s_x,[a_n]^s_y,[a_n]^s_z)}{[a_n]^s_z}=\frac{\chi_a([a_n]^s_x,[a_n]^s_y,[a_n]^s_z)-\chi_a([a]^s_x,[a]^s_y,[a]^s_z)}{[a_n]^s_z-[a]^s_z}.$$

Применим к числителю формулу конечных приращений Лагранжа:

$$\frac{\chi_a([a_n]^s_x,[a_n]^s_y,[a_n]^s_z)-\chi_a([a]^s_x,[a]^s_y,[a]^s_z)}{[a_n]^s_z-[a]^s_z}=$$
$$=\frac{\frac{\partial\hat\chi_a}{\partial z}([a_n]^s_z-[a]^s_z)+\frac{\partial\hat\chi_a}{\partial x}([a_n]^s_x-[a]^s_x)+\frac{\partial\hat\chi_a}{\partial y}([a_n]^s_y-[a]^s_y)}{[a_n]^s_z-[a]^s_z}=$$
$$=\frac{\partial\hat\chi_a}{\partial z}+\frac{\partial\hat\chi_a}{\partial x}\cdot\frac{[a_n]^s_x-[a]^s_x}{[a_n]^s_z-[a]^s_z}+\frac{\partial\hat\chi_a}{\partial y}\cdot\frac{[a_n]^s_x-[a]^s_x}{[a_n]^s_z-[a]^s_z},$$

где $\frac{\partial\hat\chi_a}{\partial x}$, $\frac{\partial\hat\chi_a}{\partial y}$, $\frac{\partial\hat\chi_a}{\partial z}$ – значения соответствующих частных производных, взятых в некоторой точке отрезка, соединяющего a и a_n. Нетрудно видеть, что в силу ограниченности $\left|\frac{[a_n]^s_x-[a]^s_x}{[a_n]^s_z}\right|$ и $\left|\frac{[a_n]^s_y-[a]^s_y}{[a_n]^s_z}\right|$, а также из условия непрерывности и равенства нулю производных $\frac{\partial\chi_a}{\partial x}$ и $\frac{\partial\chi_a}{\partial y}$ в точке a^s, предел этого выражения при $n\to+\infty$ стремится к производной $\frac{\partial\chi_a}{\partial z}$ в точке a^s. Логарифмируя $\frac{[c_n]^u_z}{[b_n]^s_z}$ (если левая или правая часть — отрицательная, то взять по модулю и прологарифмировать), деля на $-k_n\cdot\ln\lambda_a$ и перенося члены в другую часть, получим соотношение

$$\frac{m_n}{k_n}+\frac{\ln\mu_a}{\ln\lambda_a}=\frac{1}{k_n\cdot\ln\lambda_a}\cdot\left(\ln\frac{[a_n]^u_z}{[a_n]^s_z}-\ln\frac{[c_n]^u_z}{[b_n]^s_z}\right).$$

Скобка в правой части равенства стремится к константе $\ln\frac{\partial\chi_a}{\partial z}(a^s)-\ln\frac{[c]^u_z}{[b]^s_z}$, следовательно

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m_n}{k_n}=-\frac{\ln\mu_a}{\ln\lambda_a}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Доказательство леммы 3.3. использует идеи работ [5] (доказательство леммы 2.3) и [8].

Обозначим через $\ell^{u+}_{\sigma^s_a}$ ($\ell^{u-}_{\sigma^s_a}$) и $\ell^{s+}_{\sigma^u_a}$ ($\ell^{s-}_{\sigma^u_a}$) сепаратрисы инвариантных многообразий $W^u_{\sigma^s_a}$ и $W^s_{\sigma^u_a}$, соответственно, удовлетворяющие условиям $\psi_{\sigma^s_a}(\ell^{u+}_{\sigma^s_a})=OZ^+=\{z\in OZ:z>0\}$ ($\psi_{\sigma^s_a}(\ell^{u-}_{\sigma^s_a})=OZ^-=\{z\in OZ:z<0\}$) и $\psi_{\sigma^u_a}(\ell^{s+}_{\sigma^u_a})=OZ^+$ ($\psi_{\sigma^u_a}(\ell^{s-}_{\sigma^u_a})=OZ^-$).

Л е м м а 3.3. *Пусть $a\in\mathcal{A}$ — точка гетероклинического касания и Θ_a иррационально. Тогда, для любой точки $b\in\ell^{u+}_{\sigma^s_a}$ существует $\varepsilon_a\in\{+,-\}$ такое, что для любой точки $c\in\ell^{s\varepsilon_a}_{\sigma^u_a}$ существует последовательность $\{a_n\}\to a$ и последовательности $\{m_n\}\to+\infty$, $\{k_n\}\to+\infty$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty}f^{k_n}(a_n)=b$, $\lim\limits_{n\to\infty}f^{-m_n}(a_n)=c$.*

Доказательство. Положим $\varepsilon_a=+$, если $\frac{\partial\chi_a}{\partial z}(a^s)>0$ и $\varepsilon_a=-$, если $\frac{\partial\chi_a}{\partial z}(a^s)<0$. Пусть, для определенности, $\varepsilon_a=+$ и $c\in\ell^{s+}_{\sigma_a^u}$. Рассмотрим последовательность $\{\alpha_m\}$ точек с координатами $[\alpha_m]^s_x=[a]^s_x$, $[\alpha_m]^s_y=[a]^s_y$, $[\alpha_m]^u_z=\lambda_a^m[c]^u_z$. Так как $c\in\ell^{s+}_{\sigma_a^u}$, то для последовательности $\{\alpha_m\}$ выполняется условие $[\alpha_m]^u_z>0$. Положим $\beta_m=\frac{[\alpha_m]^u_z}{[\alpha_m]^s_z}$. Поскольку $\frac{[\alpha_m]^s_x-[a]^s_x}{[\alpha_m]^s_z}=0$ и $\frac{[\alpha_m]^s_y-[a]^s_y}{[\alpha_m]^s_z}=0$, то $\lim\limits_{m\to\infty}\beta_m=\frac{\partial\chi_a}{\partial z}(a^s)=\beta_a$ (см. лемму 3.2.). Пусть $s_m=\frac{\ln[\alpha_m]^s_z}{\ln\mu_a}=\frac{\ln\left(\frac{1}{\beta_m}[\alpha_m]^u_z\right)}{\ln\mu_a}=\frac{\ln\left(\frac{1}{\beta_m}\lambda_a^m[c]^u_z\right)}{\ln\mu_a}=\frac{\ln\left([c]^u_z\frac{1}{\beta_a}\lambda_a^m\frac{\beta_a}{\beta_m}\right)}{\ln\mu_a}$. Тогда $s_m=\frac{\ln\left([c]^u_z\frac{1}{\beta_a}\right)}{\ln\mu_a}+\frac{\ln\frac{\beta_a}{\beta_m}}{\ln\mu_a}+m\frac{\ln\lambda_a}{\ln\mu_a}$. Положим $\theta=\frac{\ln\left([c]^u_z\frac{1}{\beta_a}\right)}{\ln\mu_a}$, $\zeta_m=\frac{\ln\frac{\beta_a}{\beta_m}}{\ln\mu_a}$. Тогда $s_m=\theta+\zeta_m+m\frac{\ln\lambda_a}{\ln\mu_a}$. Заметим, что $\frac{\ln\mu_a}{\ln\lambda_a}=\Theta_a<0$, $\theta=const$, $\lim\limits_{m\to\infty}\zeta_m=0$ и $\lim\limits_{m\to\infty}s_m=-\infty$. Рассмотрим отображение $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, заданное формулой $y=x+\omega_a$, где $\omega_a=\frac{1}{\Theta_a}$. Данное отображение индуцирует диффеоморфизм окружности $\hat{y}:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ посредством накрытия $p:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$, действующего по формуле $p(x)=e^{2\pi ix}$. По построению, диффеоморфизм $\hat{y}$ является поворотом на угол $2\pi\omega_a$, где $\omega_a<0$ и $\{\theta+m\omega_a\}=\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}}y^m(\theta)$. Так как Θ_a иррационально, то ω_a иррационально и, согласно [4] (предложение 1.3.3), $p(\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}}y^m(\theta))$ всюду плотно на окружности. Поскольку $\lim\limits_{m\to\infty}\zeta_m=0$, то $p(s_m)$ также всюду плотно на окружности. Для каждого m можно записать $s_m=\xi_m+\tilde{s}_m$, где ξ_m — целая часть s_m, $\tilde{s}_m\in[0,1)$. Поскольку $\lim\limits_{m\to\infty}s_m=-\infty$, то $\lim\limits_{m\to\infty}\xi_m=-\infty$. Следовательно, множество $\{\tilde{s}_m\}$ плотно на $[0,1)$, а значит множество точек $\{\mu_a^{\tilde{s}_m}\}$ плотно в промежутке $[1;\mu_a)$. Пусть q — целое число такое, что $\mu_a^q\leqslant[b]^s_z<\mu_a^{q+1}$. Тогда $\mu_a^{q+\tilde{s}_m}$ плотно в $[\mu_a^q,\mu_a^{q+1})$. Следовательно, для любой точки $b\in\ell^{u+}_{\sigma_a^s}$, $b=(0,0,[b]^s_z)$ существует подпоследовательность $\{\tilde{s}_{m_n}\}$ такая, что можно записать $[b]^s_z=\mu_a^{\delta+q}$, где $\delta=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{s}_{m_n}$. Следовательно, $[b]^s_z=\mu_a^q\lim\limits_{n\to\infty}\mu_a^{\tilde{s}_{m_n}}=\mu_a^q\lim\limits_{n\to\infty}\mu_a^{s_{m_n}}\mu_a^{-\xi_{m_n}}=\mu_a^q\lim\limits_{n\to\infty}\mu_a^{-\xi_{m_n}}e^{s_{m_n}\ln\mu_a}=\mu_a^q\lim\limits_{n\to\infty}\mu_a^{-\xi_{m_n}}e^{\frac{\ln[\alpha_{m_n}]^s_z}{\ln\mu_a}\ln\mu_a}=\mu_a^q\lim\limits_{n\to\infty}\mu_a^{-\xi_{m_n}}[\alpha_{m_n}]^s_z$. Положим $-\xi_{m_n}+q=k_n$, $\{a_n\}=\{\alpha_{m_n}\}$, $b_n=f^{k_n}(a_n)$, $c_n=f^{-m_n}(a_n)$. Нетрудно видеть, что построенная последовательность $\{a_n\}$ является искомой.
Доказательство закончено.

Пусть $L\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ – линейный диффеоморфизм, оставляющий инвариантными ось Oz и плоскость Oxy. Пусть L действует на оси Oz как растяжение с коэффициентом $\mu>1$. Пусть для любой точки $P\in Oxy$ итерации отображения $L^n(P)$ стремятся к O при $n\to+\infty$. Пусть $\Phi=(\Phi_1(x,y,z),\Phi_2(x,y,z),\Phi_3(x,y,z))$ – некоторый диффеоморфизм, коммутирующий с L; Φ так же оставляет инвариантным многообразие Oxy. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 3.4. *Для отображения Φ производная $\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}$ одинакова во всех точках плоскости Oxy и отлична от нуля.*

Доказательство. Из инвариантности плоскости Oxy под действием Φ следует, что $\Phi_3(x,y,0)\equiv0$. Согласно лемме Адамара (формулировку и доказательство смотри в [14]), функция Φ_3 тогда может быть представлена как $z\cdot g(x,y,z)$, где $g(x,y,z)$ – некоторая непрерывная функция и $g(x,y,0)=\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\big|_{(x,y,0)}$. Далее, из условия коммутирования L и Φ следует, что L^n и Φ так же коммутируют при любом $n\in\mathbb{Z}$. Рассмотрим теперь последовательность точек $\{(x_n,y_n,z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $x_n=x^*$, $y_n=y^*$, $z_n=\mu^{-2n}$, x^* и y^* – некоторые произвольные координаты точек на плоскости Oxy. Применим равенство $\Phi\circ L^n=L^n\circ\Phi$ к $n-$ому элементу построенной нами последовательности и изучим поведение $z-$ координаты. Получим равенство

$$\mu^n z_n\cdot g(L^n|_{Oxy}(x_n,y_n),\mu^n z_n)=\mu^n z_n\cdot g(x_n,y_n,z_n)$$

или, что то же самое,

$$g(L^n|_{Oxy}(x_n, y_n), \mu^n z_n) = g(x_n, y_n, z_n).$$

Переходя к пределу, мы получаем, что $g(0,0,0) = g(x^*, y^*, 0)$, то есть $\frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\Big|_{(x^*,y^*,0)} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\Big|_{(0,0,0)}$ для любых x^* и y^*. Остаётся заметить, что так как $\Phi_3(x,y,0) \equiv 0$, то $\frac{\partial \Phi_3}{\partial x}\Big|_{(x,y,0)} \equiv \frac{\partial \Phi_3}{\partial y}\Big|_{(x,y,0)} \equiv 0$ и $\frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\Big|_{(0,0,0)} \neq 0$ в силу невырожденности якобиана диффеоморфизма Φ. Утверждение леммы доказано.
Доказательство закончено.

Лемма 3.5. *Для любых точек $d, a \in \mathcal{A}$ таких, что $\sigma_d^s = \sigma_a^s$ и $\sigma_d^u = \sigma_a^u$, параметр τ_d^a не зависит от выбора линеаризующих окрестностей седловых точек σ_d^s и σ_d^u.*

Доказательство.

Напомним, что $\tau_d^a = \left|\frac{\beta_a}{\beta_d}\right|^{\frac{1}{\ln \mu_a}}$, $\beta_a = \frac{\partial \chi_a}{\partial z}(a^s)$ и $\beta_d = \frac{\partial \chi_d}{\partial z}(d^s)$ для $a,\ d \in \mathcal{A}$. Для доказательства леммы достаточно показать, что отношение $\frac{\beta_a}{\beta_d}$ не зависят от выбора диффеоморфизмов $\psi_{\sigma_a^s} : U_{\sigma_a^s} \to U_{J_{\sigma_a^s}}$ и $\psi_{\sigma_a^u} : U_{\sigma_a^u} \to U_{J_{\sigma_a^u}}$.

Как было определено ранее, для точки $a \in \mathcal{A}$ отображение $g_a(x,y,z)$ записывается в виде $g_a = \psi_{\sigma_a^u} \circ (\psi_{\sigma_a^s}|_{U_a})^{-1} : \psi_{\sigma_a^s}(U_a) \to \psi_{\sigma_a^u}(U_a)$, где U_a — компонента связности множества $U_{\sigma_a^s} \cap U_{\sigma_a^u}$, содержащая точку a . Пусть мы выбрали другие линеаризующие окрестности $\tilde{U}_{\sigma_a^s}$ и $\tilde{U}_{\sigma_a^u}$, а также диффеоморфизмы $\tilde{\psi}_{\sigma_a^s} : \tilde{U}_{\sigma_a^s} \to U_{J_{\sigma_a^s}}$ и $\tilde{\psi}_{\sigma_a^u} : \tilde{U}_{\sigma_a^u} \to U_{J_{\sigma_a^u}}$, отличные от $\psi_{\sigma_a^s}$ и $\psi_{\sigma_a^u}$ соответственно. Пусть $\tilde{U}_a$ — компонента связности множества $\tilde{U}_{\sigma_a^s} \cap \tilde{U}_{\sigma_a^u}$, содержащая точку a, и $\tilde{g}_a = \tilde{\psi}_{\sigma_a^u} \circ (\tilde{\psi}_{\sigma_a^s}|_{U_a})^{-1}$, где $\tilde{g}_a(x,y,z) = (\tilde{\xi}_a(x,y,z), \tilde{\eta}_a(x,y,z), \tilde{\chi}_a(x,y,z))$. Тогда $\tilde{g}_a = \tilde{\psi}_{\sigma_a^u} \circ \psi_{\sigma_a^u}^{-1} \circ \psi_{\sigma_a^u} \circ \psi_{\sigma_a^s}^{-1} \circ \psi_{\sigma_a^s} \circ \tilde{\psi}_{\sigma_a^s}^{-1}$. Положим $\Psi^s = \tilde{\psi}_{\sigma_a^s} \circ \psi_{\sigma_a^s}^{-1}$ и $\Psi^u = \tilde{\psi}_{\sigma_a^u} \circ \psi_{\sigma_a^u}^{-1}$. Получим $\tilde{g}_a = \Psi^u \circ g_a \circ (\Psi^s)^{-1}$. По построению, диффеморфизмы Ψ^s и Ψ^u коммутируют с линейными диффеоморфизмами $J_{\sigma_a^s}$ и $J_{\sigma_a^u}$ соответственно. Положим $\Psi^s(x,y,z) = (\Psi_1^s(x,y,z), \Psi_2^s(x,y,z), \Psi_3^s(x,y,z))$ и $\Psi^u(x,y,z) = (\Psi_1^u(x,y,z), \Psi_2^u(x,y,z), \Psi_3^u(x,y,z))$. Поскольку $\Psi^s(Oxy) = \Psi^u(Oxy) = Oxy$, то $\Psi_3^s(x,y,0) \equiv \Psi_3^u(x,y,0) \equiv 0$. Следовательно, $\frac{\partial \Psi_3^s}{\partial x}(x,y,0) \equiv \frac{\partial \Psi_3^s}{\partial y}(x,y,0) \equiv 0$ и $\frac{\partial \Psi_3^u}{\partial x}(x,y,0) \equiv \frac{\partial \Psi_3^u}{\partial y}(x,y,0) \equiv 0$. Заметим, что из $\tilde{g}_a = \Psi^u \circ g_a \circ (\Psi^s)^{-1}$ следует, что

$$\mathrm{D}\tilde{g}_a\Big|_{([\tilde{a}]_x^s, [\tilde{a}]_y^s, 0)} = \mathrm{D}\Psi^u\Big|_{([a]_x^u, [a]_y^u, 0)} \cdot \mathrm{D}g_a\Big|_{([a]_x^s, [a]_y^s, 0)} \cdot \mathrm{D}(\Psi^s)^{-1}\Big|_{([\tilde{a}]_x^s, [\tilde{a}]_y^s, 0)},$$

где значения якобианов взяты в произвольной точке гетероклинического касания $a \in \mathcal{A}$. Согласно доказанным ранее утверждениям (леммы 3.1. и 3.4.), якобианы отображений имеют следующий вид:

$$\mathrm{D}g_a\Big|_{([a]_x^s, [a]_y^s, 0)} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & \frac{\partial \chi_a}{\partial z}(a^s) \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{D}\Psi^u\Big|_{([a_x^u], [a_y^u], 0)} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Psi_3^u}{\partial z}(a^u) \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{D}(\Psi^s)^{-1}\Big|_{([\tilde{a}_x^s], [\tilde{a}_y^s], 0)} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial \Psi_3^s}{\partial z}\right)^{-1}(\tilde{a}^s) \end{pmatrix},$$

где звёздочками заменены значения частных производных, которые не влияют на доказательство утверждения. Перемножая якобианы, мы получаем равенство

$$\left.\frac{\partial\tilde{\chi}_a}{\partial z}\right|_{([\tilde{a}]^s_x,[\tilde{a}]^s_y,0)} = \left.\frac{\partial\Psi^u_3}{\partial z}\right|_{([a]^u_x,[a]^u_y,0)} \cdot \left.\frac{\partial\chi_p}{\partial z}\right|_{([a]^s_x,[a]^s_y,0)} \cdot \left.\left(\frac{\partial\Psi^3_s}{\partial z}\right)^{-1}\right|_{([\tilde{a}]^s_x,[\tilde{a}]^s_y,0)}$$

или же, с учётом леммы 3.4.,

$$\left.\frac{\partial\tilde{\chi}_p}{\partial z}\right|_{([\tilde{a}]^s_x,[\tilde{a}]^s_y,0)} = \left.\frac{\partial\Psi^u_3}{\partial z}\right|_{(0,0,0)} \cdot \left.\frac{\partial\chi_p}{\partial z}\right|_{([a]^s_x,[a]^s_y,0)} \cdot \left.\left(\frac{\partial\Psi^3_s}{\partial z}\right)^{-1}\right|_{(0,0,0)}.$$

Точно такие же выводы справедливы и для точки $d \in \mathcal{A}$. Следовательно, $\frac{\tilde{\beta}_a}{\tilde{\beta}_d} = \frac{\frac{\partial\tilde{\chi}_a}{\partial z}(\tilde{a}^s)}{\frac{\partial\tilde{\chi}_d}{\partial z}(\tilde{d}^s)} = \frac{\frac{\partial\Psi^u_3}{\partial z}(0,0,0)\frac{\partial\chi_a}{\partial z}(a^s)\frac{\partial\Psi^s_3}{\partial z}(0,0,0)}{\frac{\partial\Psi^u_3}{\partial z}(0,0,0)\frac{\partial\chi_d}{\partial z}(d^s)\frac{\partial\Psi^s_3}{\partial z}(0,0,0)} = \frac{\frac{\partial\chi_a}{\partial z}(a^s)}{\frac{\partial\chi_d}{\partial z}(d^s)} = \frac{\beta_a}{\beta_d}$.
Доказательство закончено.

Пусть $\hat{U}_{a^s}$ – некоторая евклидова окрестность точки касания $a^s \in U_{J_{\sigma^s_a}}$ и $\hat{U}_a = \psi^{-1}_{\sigma^s_a}(\hat{U}_{a^s}) \subset U_a$. Будем считать, что знак производной $\frac{\partial\chi_a}{\partial z}$ в $\hat{U}_{a^s}$ всюду одинаков (такая окрестность существует в силу непрерывности частной производной). Также будем считать, что окрестность $\hat{U}_{a^s}$ такова, что $\psi_{\sigma^s_a}(W^u_{\sigma^u_a} \cap \hat{U}_a)$ пересекается только с одной компонентой связности $\hat{U}_{a^s} \setminus \psi_{\sigma^s_a}(W^s_{\sigma^s_a} \cap \hat{U}_a)$ (такая окрестность существует в силу односторонности касания). Обозначим за $\hat{U}^+_{a^s}$ и $\hat{U}^-_{a^s}$ множества точек $\{p \in \hat{U}_{a^s} \colon [p]^s_z > 0\}$ и $\{p \in \hat{U}_{a^s} \colon [p]^s_z < 0\}$ соответственно. Также обозначим за ε_a знак производной $\frac{\partial\chi_a}{\partial z}(a^s)$; знак, противоположный знаку частной производной в точке a, будем обозначать $\overline{\varepsilon}_a$.

Пусть a и a' – точки гетероклинического касания, $h(a) = a'$, и пусть линеаризующая окрестность $U_{\sigma^s_a}$ выбрана таким образом, что $h(U_{\sigma^s_a}) \subseteq U_{\sigma^s_{a'}}$. Последнего всегда можно добиться: если $h(U_{\sigma^s_a}) \not\subseteq U_{\sigma^s_{a'}}$, то существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $U^k_{\sigma^s_a} = \psi^{-1}_{\sigma^s_a}(U^k_{J_{\sigma^s_a}})$, при этом $h(U^k_{\sigma^s_a}) \subseteq U_{\sigma^s_{a'}}$ (см. доказательство леммы 2.1.) и тогда уже $U^k_{\sigma^s_a}$ можно использовать в качестве линеаризующей окрестности $U_{\sigma^s_a}$. Тогда определим гомеоморфизм $\hat{h}_s \colon \psi_{\sigma^s_a}(U_{\sigma^s_a}) \to \psi_{\sigma^s_{a'}}(h(U_{\sigma^s_a}))$ формулой $\hat{h}_s = \psi_{\sigma^s_{a'}} h \psi^{-1}_{\sigma^s_a}$. Раз образом точки a^s под действием $\hat{h}_s$ является точка a'^s, то образ окрестности $\hat{U}_{a^s}$ обозначим через $\hat{U}_{a'^s}$; для неё аналогичным образом вводятся множества $\hat{U}^+_{a'^s}$ и $\hat{U}^-_{a'^s}$. Аналогичным образом можно определить гомеоморфизм $\hat{h}_u \colon \psi_{\sigma^u_a}(U_{\sigma^u_a}) \to \psi_{\sigma^u_{a'}}(h(U_{\sigma^u_a}))$.

Лемма 3.6. *Для отображений g_a и $\hat{h}_s$ справедливы следующие утверждения:*

1. *Образ $\hat{U}^+_{a^s}$ относительно $\hat{h}_s$ есть в точности одно из множеств $\hat{U}^+_{a'^s}$ или $\hat{U}^-_{a'^s}$. Образ $\hat{U}^-_{a^s}$ относительно $\hat{h}_s$ тогда есть другое множество.*

2. *Образы точек множества $\hat{U}^{\varepsilon_a}_{a^s}$ под действием g_a обладают свойством $\chi_a([p]^s_x,[p]^s_y,[p]^s_z) > \chi_a([p]^s_x,[p]^s_y,0)$. Образы точек множества $\hat{U}^{\overline{\varepsilon}_a}_{a^s}$ тогда обладают свойством $\chi_a([p]^s_x,[p]^s_y,[p]^s_z) < \chi_a([p]^s_x,[p]^s_y,0)$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидным образом следует из свойств гомеоморфизмов. Так как h – сопрягающий гомеоморфизм, то образ инвариантного многообразия $W^s_{\sigma^s_a}$ есть инвариантное многообразие $W^s_{\sigma^s_{a'}}$. В окрестностях $U_{J_{\sigma^s_a}}$ и $U_{J_{\sigma^s_{a'}}}$ им соответствуют плоскости $\{z = 0\}$. Таким образом, плоскость $\{z = 0\} \subset U_{J_{\sigma^s_{a'}}}$ является образом $\{z = 0\} \subset U_{J_{\sigma^s_a}}$ под действием индуцированного гомеоморфизма $\hat{h}_s$.

Окрестность $\hat{U}_{a^s}$ можно представить в виде объединения трёх непересекающихся частей: $\hat{U}_{a^s} = \hat{U}^+_{a^s} \cup \hat{U}^-_{a^s} \cup D$, где $D = \hat{U}_{a^s} \cap \{z = 0\}$. Окрестности $\hat{U}_{a^s}$ и $\hat{U}_{a'^s}$ гомеоморфны друг другу; значит, $\hat{U}_{a^s} \setminus D$ и $\hat{U}_{a'^s} \setminus \hat{h}_s(D)$ также гомеоморфны друг другу. Множество $\hat{U}_{a^s} \setminus D$ имеет ровно две компоненты связности ($\hat{U}^+_{a^s}$ и $\hat{U}^-_{a^s}$), следовательно, столько же имеет и $\hat{U}_{a'^s} \setminus \hat{h}_s(D)$. Однако, поскольку $\hat{h}_s(D) = \hat{U}_{a'^s} \cap \{z = 0\}$, то эти компоненты связности суть $\hat{U}^+_{a'^s}$ и $\hat{U}^-_{a'^s}$.

Второе утверждение доказывается рассмотрением выражения $\chi_a([p]^s_x, [p]^s_y, [p]^s_z) - \chi_a([p]^s_x, [p]^s_y, 0)$. Снова используя формулу конечных приращений Лагранжа, приходим к соотношению

$$\chi_a([p]^s_x, [p]^s_y, [p]^s_z) - \chi_a([p]^s_x, [p]^s_y, 0) = [p]^s_z \cdot \frac{\partial \hat{\chi}_a}{\partial z},$$

где $\frac{\partial \hat{\chi}_a}{\partial z}$ есть значение частной производной $\frac{\partial \chi_a}{\partial z}$ в некоторой промежуточной точке отрезка, соединяющего точки $([p]^s_x, [p]^s_y, [p]^s_z)$ и $([p]^s_x, [p]^s_y, 0)$. Так как в окрестности $\hat{U}_{a^s}$ знак $\frac{\partial \hat{\chi}_a}{\partial z}$ совпадает со знаком $\frac{\partial \chi_a}{\partial z}(a^s)$, то знак $\chi_a([p]^s_x, [p]^s_y, [p]^s_z) - \chi_a([p]^s_x, [p]^s_y, 0)$ есть $\varepsilon_a \cdot \mathrm{sgn}[p]^s_z$. Доказательство закончено.

4. Необходимые условия топологической сопряжённости

Пусть a – какая-нибудь точка гетероклинического касания и пусть линеаризующие окрестности $U_{\sigma^s_a}$ и $U_{\sigma^u_a}$ выбраны так, что определены гомеоморфизмы $\hat{h}_s$ и $\hat{h}_u$, описанные перед леммой 3.6.. Обозначим теперь за $\hat{H}_s$ и $\hat{H}_u$ сужения $\hat{h}_s\big|_{Oz}$ и $\hat{h}_u\big|_{Oz}$. Также будем считать, что, как и перед леммой 3.6., определены окрестности $\hat{U}_{a^s}$ и $\hat{U}_{a'^s} = \hat{h}_s(\hat{U}_{a^s})$, но с одним дополнительным условием: во всей $\hat{U}_{a'^s}$ знак $\frac{\partial \chi_{a'}}{\partial z}$ совпадает со знаком $\frac{\partial \chi_{a'}}{\partial z}(a'^s)$. Это условие не является обременительным и может быть достигнуто выбором некоторой меньшей евклидовой окрестности внутри $\hat{U}_{a^s}$.

Лемма 4.1. *Пусть диффеоморфизмы $f, f' \in \Psi^*$ сопряжены посредством гомеоморфизма h. Пусть $a \in \mathcal{A}$ – произвольная точка гетероклинического касания, $h(a) = a'$. Тогда индуцированные сопрягающие гомеоморфизмы $\hat{H}_s$ и $\hat{H}_u$ имеют вид*

$$\hat{H}_s(z) = \begin{cases} \alpha^+_s \cdot z^\rho, & z > 0 \\ \alpha^-_s \cdot (-z)^\rho, & z < 0 \end{cases}$$

и

$$\hat{H}_u(z) = \begin{cases} \alpha^+_u \cdot z^\rho, & z > 0 \\ \alpha^-_u \cdot (-z)^\rho, & z < 0 \end{cases},$$

где $\rho = \frac{\ln \mu_{a'}}{\ln \mu_a} = \frac{\ln \lambda_{a'}}{\ln \lambda_a}$.

Доказательство. Возьмём какую-нибудь точку касания $a \in \mathcal{A}$ и соответствующие ей седловые точки σ^s_a и σ^u_a. Под действием гомеоморфизма h точка a перейдёт в точку a', а σ^s_a и σ^u_a перейдут соответственно в седловые точки $\sigma^s_{a'}$ и $\sigma^u_{a'}$.

Выберем $\psi_{\sigma^u_{a'}}$ и $\psi_{\sigma^u_a}$ так, что под их действием образы точек инвариантных многообразий $W^s_{\sigma^s_{a'}}$ и $W^s_{\sigma^s_a}$ имели неотрицательную z-координату в некоторых окрестностях точек касаний a'^u и a^u соответственно. Если не так, то можно добиться этого, применяя замену координат $\mathrm{mir}_z : (x, y, z) \to (x, y, -z)$ и полагая $\tilde{\psi}_{\sigma^u_{a'}} = \mathrm{mir}_z \circ \psi_{\sigma^u_{a'}}$ (или $\tilde{\psi}_{\sigma^u_a} = \mathrm{mir}_z \circ \psi_{\sigma^u_a}$). Также выберем $\psi_{\sigma^s_a}$ так, что для точек p^s из $\hat{U}^+_{\sigma^s_a}$ справедливо соотношение $\chi_a(p^s) > \chi_a([p]^s_x, [p]^s_y, 0) \geqslant 0$. Аналогичным образом выберем $\psi_{\sigma^s_{a'}}$ так, что для точек p'^s из $\hat{U}^+_{\sigma^s_{a'}}$ справедливо соотношение $\chi_a(p'^s) > \chi_a([p']^s_x, [p']^s_y, 0) \geqslant 0$. Заметим, что при таком выборе окрестностей и отображений автоматически следует, что производные $\frac{\partial \chi_a}{\partial z}(a^s)$ и $\frac{\partial \chi_{a'}}{\partial z}(a'^s)$ положительны, а для гомеоморфизмов $\hat{H}_s$ и $\hat{H}_u$ справедливо

$$\hat{H}_s\colon OZ^+ \subset U_{J_{\sigma^s_a}} \to OZ^+ \subset U_{J_{\sigma^s_{a'}}},$$

$$\hat{H}_s\colon OZ^- \subset U_{J_{\sigma^s_a}} \to OZ^- \subset U_{J_{\sigma^s_{a'}}},$$

$$\hat{H}_u\colon OZ^+ \subset U_{J_{\sigma^u_a}} \to OZ^+ \subset U_{J_{\sigma^u_{a'}}},$$

$$\hat{H}_u\colon OZ^- \subset U_{J_{\sigma^u_a}} \to OZ^- \subset U_{J_{\sigma^u_{a'}}},$$

что означает положительность констант α^+_s, α^+_u и отрицательность констант α^-_s и α^-_u.

Применяя лемму 3.3., получаем, что для любой точки $c \in \ell^{s+}_{\sigma^u_a}$ существует последовательность $\{a_n\} \to a$, $\{a_n\} \subset (U_a \setminus (W^s_{\sigma^s_a} \cup W^u_{\sigma^u_a}))$ и последовательности $\{k_n\} \to +\infty$, $\{m_n\} \to +\infty$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} f^{k_n}(a_n) = b$ (причём $b \in \ell^{u+}_{\sigma^s_a}$), $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} f^{-m_n}(a_n) = c$. По построению получаем, что $[b_n]^s_z = \mu^{k_n}_a \frac{1}{\beta_n} \lambda^{m_n}_a [c]^u_z$, где $\beta_n = \frac{[a_n]^u_z}{[a_n]^s_z}$. Тогда $\mu^{k_n}_a \lambda^{m_n}_a = \frac{[b_n]^s_z \beta_n}{[c]^u_z}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} [b_n]^s_z = [b]^s_z$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \beta_a$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^{k_n}_a \lambda^{m_n}_a = \frac{[b]^s_z \beta_a}{[c]^u_z}$.

Мы будем снабжать штрихом все объекты диффеоморфизма f', являющиеся образами соответствующих объектов дифеоморфизма f относительно сопрягающего гомеоморфизма h. Для диффеоморфизма f' получим аналогичные формулы: $\mu^{k_n}_{a'} \lambda^{m_n}_{a'} = \frac{[b'_n]^s_z \beta'_n}{[c']^u_z}$, где $\beta'_n = \frac{[a'_n]^u_z}{[a'_n]^s_z}$. Согласно предложению 1.1., $\Theta_a = \Theta_{a'}$, то есть $\frac{\ln \mu_a}{\ln \lambda_a} = \frac{\ln \mu_{a'}}{\ln \lambda_{a'}}$. Положим $\rho = \frac{\ln \mu_{a'}}{\ln \mu_a} = \frac{\ln \lambda_{a'}}{\ln \lambda_a}$. Тогда верно $\mu^{k_n}_{a'} \lambda^{m_n}_{a'} = (\mu^{k_n}_a \lambda^{m_n}_a)^\rho$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^{k_n}_{a'} \lambda^{m_n}_{a'} = \left(\frac{[b]^s_z \beta_a}{[c]^u_z}\right)^\rho$. Заметим, что справедлива следующая серия соотношений: $\left(\frac{[b_n]^s_z \beta_n}{[c_n]^u_z}\right)^\rho = (\mu^{k_n}_a \lambda^{m_n}_a)^\rho = \mu^{k_n}_{a'} \lambda^{m_n}_{a'} = \frac{[b'_n]^s_z \beta'_n}{[c'_n]^u_z} = \frac{[b'_n]^s_z [a'_n]^u_z}{[c'_n]^u_z [a'_n]^s_z}$, а также $\frac{[b'_n]^s_z [a'_n]^u_z}{[c'_n]^u_z [a'_n]^s_z} \geqslant \frac{[b'_n]^s_z \left([a'_n]^u_z - \chi_{a'}\left([a'_n]^s_x, [a'_n]^s_y, 0\right)\right)}{[c'_n]^u_z [a'_n]^s_z}$. Исходя из аналогичных рассуждений в доказательстве леммы 3.2., $\frac{[a'_n]^u_z - \chi_{a'}([a'_n]^s_x, [a'_n]^s_y, 0)}{[a'_n]^s_z}$ сходится к $\beta_{a'}$ при $n \to \infty$. Переходя к пределу, мы получаем, что $\left(\frac{[b]^s_z \beta_a}{[c]^u_z}\right)^\rho \geqslant \frac{[b']^s_z \beta_{a'}}{[c']^u_z}$. Начав аналогичные рассуждения с диффеоморфизма f', получим $\left(\frac{[b']^s_z \beta_{a'}}{[c']^u_z}\right)^{\frac{1}{\rho}} \geqslant \frac{[b]^s_z \beta_a}{[c]^u_z}$. Таким образом, $\left(\frac{[b]^s_z \beta_a}{[c]^u_z}\right)^\rho = \frac{[b']^s_z \beta_{a'}}{[c']^u_z}$ или же $\frac{|\beta_a|^\rho}{|\beta_{a'}|} = \frac{|[b']^s_z| \cdot |[c]^u_z|^\rho}{|[c']^u_z| \cdot |[b]^s_z|^\rho}$.

Проинтерпретируем полученный результат. Если мы зафиксируем точку c и будем произвольным образом менять точку b, то верно $\frac{|[b']^s_z|}{|[b]^s_z|^\rho} = \mathrm{const}$; аналогично, фиксируя точку b и меняя произвольным образом точку c, приходим к $\frac{|[c]^u_z|^\rho}{|[c']^u_z|} = \mathrm{const}$. Это и даёт нам соотношения $[b']^s_z = \alpha^+_s ([b]^s_z)^\rho$ и $[c']^u_z = \alpha^+_u ([c]^u_z)^\rho$, которые задают гомеоморфизмы $\hat{H}^+_s\colon OZ^+ \to OZ^+$ и $\hat{H}^+_u\colon OZ^+ \to OZ^+$. Если мы возьмём точку $c \in \ell^{s-}_{\sigma^u_a}$, то докажем аналогичную формулу для гомеоморфизмов $\hat{H}^-_s\colon OZ^- \to OZ^-$ и $\hat{H}^-_u\colon OZ^- \to OZ^-$, а именно $[b']^s_z = \alpha^+_s (-[b]^s_z)^\rho$ и $[c']^u_z = \alpha^+_u (-[c]^u_z)^\rho$ соответственно. В терминах индуцированных гомеоморфизмов полученная ранее формула может быть записана в виде $\frac{|\beta_a|^\rho}{|\beta_{a'}|} = \frac{|\alpha^+_s|}{|\alpha^+_u|} = \frac{|\alpha^-_s|}{|\alpha^-_u|}$.

Заметим, что эта лемма была доказана для частного случая выбора отображений $\psi_{\sigma^u_{a'}}$, $\psi_{\sigma^u_a}$, $\psi_{\sigma^s_a}$ и $\psi_{\sigma^s_{a'}}$. Однако, все применявшиеся модификации суть композиция инволюции mir_z (отображение симметрии $\mathbb{R}^3$ относительно плоскости $z = 0$) и некоторых исходных отображений, поэтому, применяя инволюции обратно, можно получить аналогичные формулы для $\hat{H}_s$ и $\hat{H}_u$ во всех случаях.

Доказательство закончено.

Напомним, что в теореме 1.1. рассматриваются такие точки касания a, $d \in \mathcal{A}$, что $\sigma_d^s = \sigma_a^s$, $\sigma_d^u = \sigma_a^u$ и знаки параметров β_d и β_a совпадают.

Теорема 1.1. *Если диффеоморфизмы $f, f' \in \Psi^*$ топологически сопряжены посредством гомеоморфизма h такого, что $h(a) = a'$, $h(d) = d'$, $h(\sigma_a^s) = \sigma_d^s$ и $h(\sigma_a^u) = \sigma_d^u$, то $\tau_d^a = \tau_{d'}^{a'}$.*

Доказательство. Выберем любую из точек a и d (например, a) и проделаем для неё процедуру выбора линеаризующих окрестностей и отображений перехода в точности, как в доказательстве леммы 4.1.. Из леммы 3.5. следует, что если знаки параметров β_d и β_a совпадали при каком-то выборе, то они совпадут и при любом другом. Нетрудно показать, что процедура выбора из леммы 4.1. приводит к тому, что знаки параметров $\beta_{d'}$ и $\beta_{a'}$ тоже совпадут. Но тогда имеют место соотношения $\frac{|\beta_a|^\rho}{|\beta_{a'}|} = \frac{|\alpha_s^+|}{|\alpha_u^+|}$ и $\frac{|\beta_d|^\rho}{|\beta_{d'}|} = \frac{|\alpha_s^+|}{|\alpha_u^+|}$. Получаем равенства $\frac{|\beta_a|^\rho}{|\beta_{a'}|} = \frac{|\beta_d|^\rho}{|\beta_{d'}|}$, откуда $\left|\frac{\beta_a}{\beta_d}\right|^{\frac{1}{\ln \mu_a}} = \left|\frac{\beta_{a'}}{\beta_{d'}}\right|^{\frac{1}{\ln \mu_{a'}}}$, то есть имеет место равенство параметров $\tau_d^a = \tau_{d'}^{a'}$.

Доказательство закончено.

Список литературы

1. В. И. Арнольд, В. С. Афраймович, Ю. С. Ильяшенко, Л. П. Шильников, “Теория бифуркаций”, *Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления»*, **5**, 5–218.

2. Г. Р. Белицкий, В. А. Ткаченко, *Нормальные формы, инварианты и локальные отображения*, Наукова думка, Киев, 1979, 174 с.

3. В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, Институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 438 с.

4. А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, Москва, 1999, 768 с.

5. W. De Melo, “Moduli of stability of two-dimensional diffeomorphisms”, *Topology*, **19** (1980), 9–21.

6. W. De Melo, J. Palis, “Moduli of stability for diffeomorphisms”, *Lecture Notes in Mathematics*, **819** (1980), 318–339.

7. W. De Melo, S. J. Strien, “Diffeomorphisms on surfaces with a finite number of moduli”, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, **7** (1987), 415–462.

8. Т. М. Митрякова, О. В. Починка, “К вопросу о классификации диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей топологической сопряженности”, *Нелинейная динам.*, 2010, 91-105 6:1 (2010), 91–105.

9. Т. М. Митрякова, О. В. Починка, Е. А. Шишенкова, “О структуре пространства блуждающих орбит диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством”, *СВМО*, **13**:1 (2011), 63–70.

10. S. Newhouse, J. Palis, "Bifurcations of Morse-Smale dynamical systems", *Dynamical systems*, 1973.

11. S. Newhouse, J. Palis, F. Takens, "Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms", *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, **57**:1 (1983), 5–71.

12. J. Palis, "A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability", *Asterisque*, **51** (1978), 335–346.

13. J. Palis, W. Melo, *Геометрическая теория динамических систем*, Мир, Москва, 1998, 301 с.

14. И. Г. Петровский, *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Издат. Московского Унив., Москва, 1984, 296 с.

15. Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа, *Методы качественной теории в нелинейной динамике*, Институт компьютерных исследований, 2003, 428 с.

Necessary conditions for topological conjugacy of 3-manifolds diffeomorphisms with orbits of heteroclinic tangency

© **E. A. Grines**[4], **O. V. Pochinka**[5]

Abstract. In present paper we consider a class of 3-manifolds' diffeomorphisms with finite hyperbolic chain recurrent set and finite number of heteroclinic tangencies' orbits. We prove that necessary conditions for topological conjugacy of two diffeomorphisms from this class is a generalization of moduli of stability for analogous two dimensional diffeomorphisms.

Key Words: topological conjugacy, heteroclinic tangencies, moduli of stability

[4] Graduate student of numerical and functional analysis chair of Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky; grineseugene@mail.ru

[5] Docent of theory function chair of Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky; olga-pochinka@yandex.ru