

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

УДК 533.6.013.42

Исследование динамической устойчивости защитного экрана при сверхзвуковом обтекании потоком газа

© А. В. Анкилов¹, П. А. Вельмисов², В. А. Судаков³

Аннотация. Исследуется устойчивость решения начально-краевой задачи для связанной системы дифференциальных уравнений с частными производными, описывающей динамику упругой стенки (защитного экрана) резервуара, заполненного жидкостью, при взаимодействии стенки со сверхзвуковым потоком газа. Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. На основе построения смешанного функционала типа Ляпунова получены достаточные условия устойчивости, налагающие ограничения на скорость потока, изгибную жесткость стенки и другие параметры механической системы.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, динамика, упругая пластина, деформация, сверхзвуковой поток газа, жидкость, дифференциальные уравнения с частными производными, функционал, устойчивость по Ляпунову

1. Введение

При проектировании различных конструкций, устройств, приборов, аппаратов, систем и т. д., находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой (обтекаемых потоком жидкости или газа), необходимо решать задачи, связанные с исследованием динамики и устойчивости упругих элементов, требуемой для их качественного функционирования и надёжности эксплуатации [2] - [21]. Воздействие потока может приводить к эффектам, являющимся причиной нарушения функциональных свойств элементов, вплоть до их разрушения (например, приводить к состоянию неустойчивости вследствие увеличения амплитуды или ускорения колебаний до критически допустимых значений). Такая проблема, когда неустойчивость является негативным явлением, возникает, например, при проектировании составных частей летательных и подводных аппаратов: элерона – составной части крыла; руля высоты – составной части стабилизатора, руля направления – составной части киля; панели – составной части фюзеляжа или крыла [2], [5], [6], [8], [9], [12], [13], [14], [17]. Аналогичная проблема возникает при исследовании течений в проточных каналах, трубопроводах различного назначения, содержащих упругие элементы [7], [10], [11], [14], [15], [18].

В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся

¹ Доцент кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; ankil@ulstu.ru.

² Заведующий кафедрой «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisor@ulstu.ru.

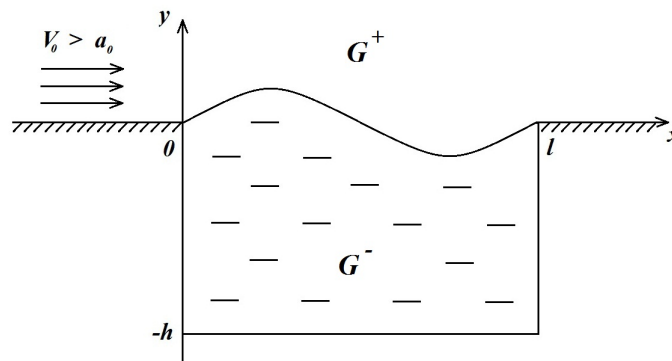
³ Аспирант кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; sseevva@inbox.ru.

к вибрационной технике и используемых для интенсификации технологических процессов, являются устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий, в частности, устройства для подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки (см., например [20]). Другим примером, когда деформация упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии необходима для функционирования приборов и является основой их работы, являются датчики давления [3], [4], [16], [19].

В работе исследуется динамическая устойчивость упругой стенки (защитного экрана) резервуара, заполненного жидкостью, при обтекании стенки сверхзвуковым потоком газа. Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Исследование проводится в линейной постановке. На основе построения функционала для связанной системы дифференциальных уравнений в частных производных для двух неизвестных функций – прогиба (деформации) упругой стенки резервуара и потенциала скорости жидкости, заполняющей резервуар, получены условия устойчивости решения этой системы, и, тем самым, условия динамической устойчивости упругой стенки.

2. Постановка задачи

Рассматривается плоская задача о динамике упругой стенки резервуара $G^- = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < l, -h < y < 0\}$, заполненного жидкостью. Упругой является стенка, занимающая положение $y = 0, 0 < x < l$ и моделируемая упругой пластиной. Остальные стенки ($x = 0, x = l$ и $y = -h$) считаются недеформируемыми (рис. 2.1). В области $G^+ = \{(x, y) \in R^2 : x \in (-\infty, +\infty), y \in (0, +\infty)\}$ протекает сверхзвуковой поток газа в направлении оси Ox со скоростью $V_0 > a_0$, где a_0 – скорость звука. Предполагается, что число Маха $M_0 = \frac{V_0}{a_0} > \sqrt{2}$.



Р и с у н о к 2.1

Резервуар с деформируемой стенкой, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа

Введем обозначения: $w(x, t)$ – функция деформации (прогиб) пластины; $\varphi(x, y, t)$ – потенциал скорости жидкости в области G^- . Математическая постановка задачи:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G^-; \quad (2.1)$$

$$\varphi_y(x, -h, t) = 0, \quad \varphi_y(x, 0, t) = w_t(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t \geq 0; \quad (2.2)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = 0, \quad \varphi_x(l, y, t) = 0, \quad y \in (-h, 0), \quad t \geq 0; \quad (2.3)$$

$$mw_{tt}(x, t) + Dw_{xxxx}(x, t) =$$

$$= (p^- - \rho^- \varphi_t(x, 0, t)) - p^+ - \frac{\rho^+ V_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \left(V_0 w_x(x, t) + \frac{M_0^2 - 2}{M_0^2 - 1} w_t(x, t) \right); \quad (2.4)$$

$$w(0, t) = w_{xx}(0, t) = w(l, t) = w_{xx}(l, t) = 0, \quad t \geq 0; \quad (2.5)$$

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad w_t(x, 0) = f_2(x), \quad x \in (0, l). \quad (2.6)$$

Здесь индексы x, y, t снизу обозначают производные по x, y и t ; D и m – изгибная жесткость и погонная масса пластины; V_0, ρ^+, p^+ – скорость газа, плотность и давление в набегающем однородном потоке в области G^+ ; ρ^-, p^- – плотность и давление жидкости в области G^- в состоянии покоя. Слагаемое

$$-p^+ - \frac{\rho^+ V_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \left(V_0 w_x(x, t) + \frac{M_0^2 - 2}{M_0^2 - 1} w_t(x, t) \right) \quad (2.7)$$

в уравнении (2.4) описывает воздействие на пластину сверхзвукового потока газа [1]. Уравнение (2.1) описывает динамику жидкости в области G^- в модели идеальной несжимаемой среды; (2.2) - (2.3) – условия непротекания; (2.4) – уравнение, описывающее динамику упругой стенки резервуара с учетом аэрогидродинамического воздействия на неё; условия (2.5) соответствуют шарнирному закреплению концов упругого элемента резервуара; (2.6) – начальные условия.

Уравнения и условия (2.1) - (2.6) образуют начально-краевую задачу для определения двух неизвестных функций $w(x, t)$ и $\varphi(x, y, t)$.

3. Исследование устойчивости

Так как система (2.1) - (2.5) линейная, то достаточно исследовать устойчивость нулевого решения соответствующей однородной системы. Однородное уравнение, соответствующее уравнению (2.4), имеет вид:

$$m w_{tt}(x, t) + D w_{xxxx}(x, t) = -\rho^- \varphi_t(x, 0, t) - \frac{\rho^+ V_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \left(V_0 w_x(x, t) + \frac{M_0^2 - 2}{M_0^2 - 1} w_t(x, t) \right). \quad (3.1)$$

Получим достаточные условия устойчивости по Ляпунову нулевого решения краевой задачи (2.1) - (2.3), (2.5), (3.1) по отношению к возмущениям начальных условий (2.6). Введем функционал

$$J(t) = \int_0^l (m w_t^2 + D w_{xx}^2 + 2m\theta w w_t + \alpha k \theta w^2 + 2\rho^- \theta w \varphi(x, 0, t)) dx + \rho^- \iint_{G^-} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy, \quad (3.2)$$

где введены обозначения $\alpha = \frac{\rho^+ V_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}}$, $k = \frac{M_0^2 - 2}{M_0^2 - 1}$, а $\theta > 0$ – некоторый положительный параметр, определяемый в ходе решения задачи.

Найдем производную от J по t

$$J_t(t) = 2 \int_0^l (m w_t w_{tt} + D w_{xx} w_{txx} + m\theta w_t^2 + m\theta w w_{tt} + \alpha k \theta w w_t + \\ + \rho^- \theta w_t \varphi(x, 0, t) + \rho^- \theta w \varphi_t(x, 0, t)) dx + 2\rho^- \iint_{G^-} (\varphi_x \varphi_{xt} + \varphi_y \varphi_{yt}) dx dy. \quad (3.3)$$

Учитывая уравнение (2.1) и условия (2.2) - (2.3), получим

$$\iint_{G^-} (\varphi_x \varphi_{xt} + \varphi_y \varphi_{yt}) dx dy = \int_{-h}^0 dy \int_0^l \varphi_x \varphi_{xt} dx + \int_0^l dx \int_{-h}^0 \varphi_y \varphi_{yt} dy = \int_0^l w_t \varphi_t(x, 0, t) dx. \quad (3.4)$$

Подставляя (3.1) и (3.4) в (3.3), находим

$$\begin{aligned} J_t(t) = & 2 \int_0^l (w_t (-Dw_{xxxx} - \rho^- \varphi_t(x, 0, t) - \alpha V_0 w_x - \alpha k w_t) + Dw_{xx} w_{txx} + \\ & + m\theta w_t^2 + \theta w (-Dw_{xxxx} - \rho^- \varphi_t(x, 0, t) - \alpha V_0 w_x - \alpha k w_t) + \alpha k \theta w w_t + \\ & + \rho^- \theta w_t \varphi(x, 0, t) + \rho^- \theta w \varphi_t(x, 0, t) + \rho^- w_t \varphi_t(x, 0, t)) dx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Произведем интегрирование с учетом условия (2.5)

$$\int_0^l w_{xxxx} w_t dx = \int_0^l w_{xx} w_{txx} dx, \quad \int_0^l w w_{xxxx} dx = \int_0^l w_{xx}^2 dx, \quad \int_0^l w w_x dx = 0. \quad (3.6)$$

Умножим уравнение (2.1) на $\varphi(x, y, t)$ и проинтегрируем по области G^-

$$\iint_{G^-} \varphi (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) dx dy = \int_0^l \varphi(x, 0, t) w_t dx - \iint_{G^-} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy = 0. \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует, что

$$\int_0^l \varphi(x, 0, t) w_t dx = \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy. \quad (3.8)$$

Учитывая (3.6) - (3.8), согласно (3.5) получим

$$\begin{aligned} J_t(t) = & -2 \int_0^l (\alpha V_0 w_t w_x + (\alpha k - m\theta) w_t^2 + \\ & + D\theta w_{xx}^2 - (\rho^- \theta + \gamma) w_t \varphi(x, 0, t)) dx - 2\gamma \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\gamma > 0$ - некоторый положительный параметр.

Проведем оценки интегралов с учетом граничных условий (2.3), (2.5). Согласно неравенству Рэля [22] имеем

$$\int_0^l w_{xx}^2 dx \geq \lambda_1 \int_0^l w_x^2 dx, \quad (3.10)$$

где $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2}$ - наименьшее собственное значение краевой задачи $\psi_{xxxx} = -\lambda \psi_{xx}$, $x \in [0, l]$ с условиями, соответствующими (2.5);

$$\iint_G \varphi_x^2 dx dy \geq \eta_1 \iint_G \varphi^2 dx dy, \quad (3.11)$$

где $\eta_1 = \frac{\pi^2}{l^2}$ – наименьшее собственное значение краевой задачи $\psi_{xx} = -\eta\psi$, $x \in (0, l)$, с условиями, соответствующими (2.3). Рассмотренные краевые задачи являются самосопряженными и полностью определенными.

Согласно неравенству Коши-Буняковского, имеем

$$\left(\int_y^0 \varphi_y dy \right)^2 \leq \int_y^0 1^2 dy \int_y^0 \varphi_y^2 dy.$$

Следовательно,

$$(\varphi(x, 0, t) - \varphi(x, y, t))^2 \leq -y \int_{-h}^0 \varphi_y^2 dy. \tag{3.12}$$

Проинтегрируем (3.12) по области G^-

$$\iint_{G^-} (\varphi(x, 0, t) - \varphi(x, y, t))^2 dx dy \leq \iint_{G^-} \left(-y \int_{-h}^0 \varphi_y^2 dy \right) dx dy = \frac{h^2}{2} \iint_{G^-} \varphi_y^2 dx dy. \tag{3.13}$$

С учетом неравенств (3.10), (3.11), (3.13) согласно (3.9) получим для J_t следующую оценку

$$J_t(t) \leq -2 \iint_G \left(\frac{1}{h} \left(\alpha V_0 w_t w_x + (\alpha k - m\theta) w_t^2 + \frac{D\theta\pi^2}{l^2} w_x^2 - (\rho^- \theta + \gamma) w_t \varphi(x, 0, t) \right) + \right. \\ \left. + \gamma \left(\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{2}{h^2} \right) \varphi^2(x, y, t) - \frac{4\gamma}{h^2} \varphi(x, 0, t) \varphi(x, y, t) + \frac{2\gamma}{h^2} \varphi^2(x, 0, t) \right) dx dy. \tag{3.14}$$

Рассмотрим в (3.14) квадратичную форму относительно $w_t, w_x, \varphi(x, 0, t), \varphi(x, y, t)$, матрица которой имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha k - m\theta}{h} & \frac{\alpha V_0}{\alpha V_0} & -\frac{\rho^- \theta + \gamma}{2h} & 0 \\ \frac{2h}{\alpha V_0} & \frac{D\theta\pi^2}{hl^2} & 0 & 0 \\ -\frac{\rho^- \theta + \gamma}{2h} & 0 & \frac{2\gamma}{h^2} & -\frac{2\gamma}{h^2} \\ 0 & 0 & -\frac{2\gamma}{h^2} & \gamma \left(\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{2}{h^2} \right) \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Согласно критерию Сильвестра, запишем условия неотрицательности этой квадратичной формы

$$\Delta_1 > 0 \Rightarrow \alpha k - m\theta > 0, \tag{3.16}$$

$$\Delta_2 > 0 \Rightarrow 4D\theta\pi^2(\alpha k - m\theta) - \alpha^2 V_0^2 l^2 > 0, \tag{3.17}$$

$$\Delta_3 > 0 \Rightarrow 2\gamma(4D\theta\pi^2(\alpha k - m\theta) - \alpha^2 V_0^2 l^2) - (\rho^- \theta + \gamma)^2 D\theta\pi^2 h > 0, \tag{3.18}$$

$$\Delta_4 \geq 0 \Rightarrow \frac{\pi^2}{l^2} [2\gamma(4D\theta\pi^2(\alpha k - m\theta) - \alpha^2 V_0^2 l^2) - (\rho^- \theta + \gamma)^2 D\theta\pi^2 h] - \frac{2}{h^2} (\rho^- \theta + \gamma)^2 D\theta\pi^2 h \geq 0, \tag{3.19}$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ – угловые миноры матрицы (3.15). При этом из (3.19) следует выполнение неравенств (3.16) – (3.18). Рассмотрим в (3.19) случай равенства и найдем параметр $\gamma > 0$:

$$(\pi^2 h^2 + 2l^2)D\theta\gamma^2 - (8D\theta\pi^2 h(\alpha k - m\theta) - 2\alpha^2 V_0^2 l^2 h - 2(\pi^2 h^2 + 2l^2)D\rho^-\theta^2)\gamma + 4(\pi^2 h^2 + 2l^2)D^2(\rho^-)^2\theta^3 = 0. \quad (3.20)$$

Пусть корень квадратного уравнения (3.20) $\gamma > 0$. Тогда должны выполняться следующие неравенства

$$8D\theta\pi^2 h(\alpha k - m\theta) - 2\alpha^2 V_0^2 l^2 h - 2(\pi^2 h^2 + 2l^2)D\rho\theta^2 > 0, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{D} = (8D\theta\pi^2 h(\alpha k - m\theta) - 2\alpha^2 V_0^2 l^2 h - 2(\pi^2 h^2 + 2l^2)D\rho\theta^2)^2 - 4(\pi^2 h^2 + 2l^2)D^2\rho^2\theta^3 \geq 0, \quad (3.22)$$

где \mathbf{D} – дискриминант уравнения (3.20). Параметр γ определяется следующим равенством

$$\gamma = \frac{8D\theta\pi^2 h(\alpha k - m\theta) - 2\alpha^2 V_0^2 l^2 h - 2(\pi^2 h^2 + 2l^2)D\rho\theta^2 + \sqrt{\mathbf{D}}}{(\pi^2 h^2 + 2l^2)2D\theta}. \quad (3.23)$$

Таким образом, при выполнении условий (3.21), (3.22) из (3.14) получим

$$J_t(t) \leq 0 \Rightarrow J(t) \leq J(0) \quad (3.24)$$

Рассмотрим краевую задачу $\psi_{xxxx} = \eta\psi$, $x \in [0, l]$ с краевыми условиями (2.5). Эта задача является самосопряженной и полностью определенной. Согласно неравенству Рэлея [22], имеем

$$\int_0^l w_{xx}^2 dx \geq \eta_1 \int_0^l w^2 dx, \quad (3.25)$$

где $\eta_1 = \frac{\pi^4}{l^4}$ – наименьшее собственное значение рассматриваемой краевой задачи.

Оценим $J(t)$, используя неравенство (3.25), (3.11) и (3.13)

$$\begin{aligned} J(t) &= \int_0^l (mw_t^2 + D(1 - \chi)w_{xx}^2 + D\chi w_{xx}^2 + 2m\theta w w_t + \alpha k\theta w^2 + 2\rho^-\theta w\varphi(x, 0, t)) dx + \\ &+ \rho^-\iint_{G^-} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy \geq \iint_{G^-} \left(\frac{1}{h} \left(mw_t^2 + \left(D\chi \frac{\pi^4}{l^4} + \alpha k\theta \right) w^2 + 2m\theta w w_t + 2\rho^-\theta w\varphi(x, 0, t) \right) + \right. \\ &\left. + \rho^-\left(\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{2}{h^2} \right) \varphi^2(x, y, t) - \frac{4\rho^-}{h^2} \varphi(x, 0, t)\varphi(x, y, t) + \frac{2\rho^-}{h^2} \varphi^2(x, 0, t) dx dy \right) + \\ &\quad + \int_0^l \frac{\pi^2}{l^2} D(1 - \chi)w_x^2 dx, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где $\chi \in (0, 1)$.

В (3.26) имеем квадратичную форму относительно $w_t, w, \varphi(x, 0, t), \varphi(x, y, t)$, матрица которой имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{m}{h} & \frac{m\theta}{h} & 0 & 0 \\ \frac{m\theta}{h} & \frac{D\chi\pi^4}{hl^4} + \frac{\alpha k\theta}{h} & \frac{\rho^-\theta}{h} & 0 \\ 0 & \frac{\rho^-\theta}{h} & \frac{2\rho^-}{h^2} & -\frac{2\rho^-}{h^2} \\ 0 & 0 & -\frac{2\rho^-}{h^2} & \frac{\rho^-\pi^2}{l^2} + \frac{2\rho^-}{h^2} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Согласно критерию Сильвестра, запишем условия неотрицательности этой квадратичной формы

$$\Delta_1 > 0 \Rightarrow \frac{m}{h} > 0, \quad (3.28)$$

$$\Delta_2 > 0 \Rightarrow \frac{D\pi^4}{l^4} + \alpha k\theta - m\theta^2 > 0, \quad (3.29)$$

$$\Delta_3 > 0 \Rightarrow 2 \left(\frac{D\pi^4}{hl^4} + \alpha k\theta - m\theta^2 \right) - \rho^- h\theta^2 > 0, \quad (3.30)$$

$$\Delta_4 > 0 \Rightarrow \pi^2 h \left(2 \left(\frac{D\pi^4 \chi}{l^4} + \alpha k\theta - m\theta^2 \right) - \rho^- h\theta^2 \right) - 2\rho^- \theta^2 l^2 \geq 0, \quad (3.31)$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ – угловые миноры матрицы (3.27). При этом из (3.31) следует выполнение неравенств (3.28) – (3.30). Рассмотрим в (3.31) случай равенства и найдем из него параметр χ :

$$\chi = \frac{(2\rho^- \theta^2 l^2 + \rho^- h^2 \theta^2 \pi^2 - 2\alpha k\theta + 2m\theta^2) l^4}{D\pi^4} \in (0, 1). \quad (3.32)$$

Таким образом, при выполнении условия (3.32) из (3.26) получим

$$J(t) \geq \int_0^l \frac{\pi^2}{l^2} D(1 - \chi) w_x^2 dx. \quad (3.33)$$

Согласно неравенству Коши-Буняковского имеем

$$\int_0^l w_x^2 dx \geq \frac{1}{l} w^2(x, t). \quad (3.34)$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{l^3} D(1 - \chi) w^2(x, t) \leq J(0) = \int_0^l (m w_t^2(x, 0) + D w_{xx}^2(x, 0) + 2m\theta w(x, 0) w_t(x, 0) + \\ + \alpha k\theta w^2(x, 0) + 2\rho^- \theta w(x, 0) \varphi(x, 0, 0)) dx + \rho^- \iint_{G^-} (\varphi_x^2(x, y, 0) + \varphi_y^2(x, y, 0)) dx dy, \end{aligned} \quad (3.35)$$

откуда следует

Т е о р е м а 3.1. Пусть выполняются условия (3.21), (3.22) и (3.32). Тогда решение $w(x, t)$ системы (2.1) – (2.4) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений $w(x, 0), w_t(x, 0), \varphi(x, 0, 0), \varphi_x(x, y, 0), \varphi_y(x, y, 0)$, если $w(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям (2.5).

Условия (3.21), (3.22) и (3.32) накладывают ограничения на скорость набегающего потока V_0 , изгибную жесткость пластины D и другие параметры механической системы.

Приведем примеры значений параметров, которым соответствует устойчивые и неустойчивые деформации упругой стенки резервуара при обтекании сверхзвуковым потоком газа. Будем считать, что упругий элемент ($E = 7 * 10^{12}$ – модуль упругости, $\rho_{pl} = 2699$ – плотность, $h_{pl} = 0.1$ – толщина) обтекается сверхзвуковым потоком воздуха

($\rho^+ = 1.3$), при этом резервуар заполнен водой ($\rho^- = 998.2$). Другие параметры механической системы: $l = 1$; $h = 1$; $m = 269.9$ (погонная масса); $\nu = 0.34$ (коэффициент Пуассона); $D = \frac{Eh_{pl}^3}{12(1-\nu^2)} = 6.5958 \cdot 10^8$ (изгибная жесткость). Все значения приведены в системе СИ. В таблице θ_1 – одно из допустимых решений системы неравенств (3.21), (3.22)

Таблица 1: Расчетные значения параметров

V	θ_1	γ_1	χ_1
490	0.06919	91.287501	$6.81334 \cdot 10^{-10}$
1000	0.16909	$1.0026793 \cdot 10^3$	$3.17033 \cdot 10^{-9}$
1500	0.19619	$9.0953294 \cdot 10^2$	$4.54533 \cdot 10^{-9}$
2000	0.22696	$7.5318142 \cdot 10^2$	$6.50794 \cdot 10^{-9}$
2500	0.26492	$5.8339841 \cdot 10^2$	$9.43254 \cdot 10^{-9}$
3000	0.31077	$4.1587400 \cdot 10^2$	$1.36823 \cdot 10^{-8}$
3400	1.30290	-99.84876	$2.95824 \cdot 10^{-7}$
4000	1.06029	-1.046242	$1.93260 \cdot 10^{-7}$

и (3.32); γ_1 определяется выражением (3.23), а χ_1 находится из (3.32). Приведенный пример соответствует случаю, когда устойчивость наблюдается при скоростях набегающего потока в полуинтервале $[490, 3000)$, данный факт обусловлен тем, что параметр γ_1 при скоростях выше 3000 становится отрицательным, нарушается условие (3.23). Таким образом, при скоростях выше, чем $V = 3000$, определенного вывода об устойчивости сделать нельзя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Voss H. V., "The effect of an external supersonic flow on the vibration characteristics of thin cylindrical shells", *J. Aerospace Sciences*, **3** (1961), 945–956.
2. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., *Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*, УлГТУ, Ульяновск, 2009, 220 с.
3. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Покладова Ю. В., *Математическое моделирование механической системы "трубопровод-датчик давления"*, УлГТУ, Ульяновск, 2008, 188 с.
4. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., "Математическое моделирование механической системы "трубопровод-датчик давления"", *Вестник Саратовского государственного технического университета*, **3(27)** (2007), 7–14.
5. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., "Численно-аналитическое исследование динамической устойчивости упругой пластины при аэрогидродинамическом воздействии", *Прикладная математика и механика: сборник научных трудов*, УлГТУ, Ульяновск, 2009, 3–22.
6. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Дегтярева Н. А., "Устойчивость упругих элементов крылового профиля", *Прикладная математика и механика: сборник научных трудов*, УлГТУ, Ульяновск, 2007, 9–18.

7. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., “Об устойчивости решений уравнений взаимодействия упругих стенок каналов с протекающей жидкостью”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **1(22)** (2011), 179–185.
8. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Семенова Е. П., “О решениях интегродифференциальных уравнений в задаче динамики одной аэроупругой системы типа «тандем»”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **2(23)** (2011), 266–271.
9. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., “Математическое моделирование динамики и устойчивости упругих элементов крыла”, *Вестник Саратовского государственного технического университета*, **1(37)** (2009), 7–16.
10. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Семенова Е. П., “Исследование динамической устойчивости упругих элементов стенок канала”, *Вестник Саратовского государственного технического университета*, **2(38)** (2009), 7–17.
11. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Казакова Ю. А., “Устойчивость решений одной нелинейной начально-краевой задачи аэроупругости”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **1(30)** (2013), 1–7.
12. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., “Устойчивость решений некоторых классов интегродифференциальных уравнений в частных производных”, *Вестник Самарского государственного университета, естественнонаучная серия*, **8/1(67)** (2008), 331–344.
13. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., “Исследование динамики и устойчивости упругого элемента конструкций при сверхзвуковом обтекании”, *Вестник Саратовского государственного технического университета*, **3(57)** (2011), 59–67.
14. Вельмисов П. А., Киреев С. В., *Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии*, УЛГТУ, Ульяновск, 2011, 200 с.
15. Вельмисов П. А., Решетников Ю. Е., Колмановский Е. Е., “Устойчивость уравнений взаимодействия вязкоупругих пластин с жидкостью”, *Дифференциальные уравнения*, **11(30)** (2011), 1966–1981.
16. Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Решетников Ю. А., “Математическое моделирование механической системы “трубопровод-датчик давления””, *Датчики и системы*, **6(49)** (2003), 12–15.
17. Вельмисов П. А., Судаков В. А., Замальдинова Ю. К., “Устойчивость решений одного класса нелинейных начально-краевых задач аэроупругости”, *Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования: тезисы докладов Четвёртой Международной конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцев*, РУДН, Москва, 2013, 290–292.
18. Вельмисов П. А., Молгачев А. А., *Математическое моделирование в задаче динамической устойчивости вязкоупругих элементов проточных каналов*, УЛГТУ, Ульяновск, 2012, 185 с.

19. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., “О некоторых математических моделях механической системы "трубопровод-датчик давления"”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки*, **1(29)** (2011), 137–144.
20. Вельмисов П. А., Горшков Г. М., Рябов Г. К., *Пат. 2062662 РФ, МПК6 В 06 В 1/18, 1/20. Гидродинамический излучатель*, Заявитель и патентообладатель Ульяновский гос. технич. ун-т. – №5038746/28; заявл. 20.07.92; опубл. 27.06.96, Бюл. №18..
21. Бочкарев С. А., Матвеев В. П., “Решение о панельном флаттере оболочечных конструкций методом конечных элементов”, *Математическое моделирование*, **12** (2002), 55–71.
22. Коллатц А., *Задачи на собственные значения*, Наука, М., 1968, 504 с.

Stability of the problem on the protective shield in the supersonic air flow.

© A. V. Ankilov⁴, P. A. Velmisov⁵, V. A. Sudakov⁶

Abstract. The stability of solutions of initial-boundary value problem for the related system of differential equations describing the dynamics of the elastic wall of the container filled with gas (liquid), and its interaction with a supersonic flow of gas (liquid). Definition of stability of the elastic body corresponds to the concept of dynamical systems, Lyapunov. We obtain sufficient conditions for stability, imposing limits on flow rate, the flexural rigidity of the elastic walls and other parameters of the mechanical system.

Key Words: aerohydroelasticity, dynamic, elastic plate, deformation, the supersonic flow of gas, liquid, differential equations with partial derivatives, the functional stability of the Lyapunov

⁴ Assistant professor of Higher Mathematics Chair, Uljanovsk State Technical University, Uljanovsk; ankil@ulstu.ru.

⁵ Head of Higher Mathematics Chair, Uljanovsk State Technical University, Uljanovsk; velmisov@ulstu.ru.

⁶ Post-graduate student of Higher Mathematics Chair, Uljanovsk State Technical University, Uljanovsk; sseevva@inbox.ru.