УДК 517.9

Асимптотические уравнения нелинейных трансзвуковых течений газа и их решения

© П. А. Вельмисов[1], Ю. А. Тамарова[2]

Аннотация. В статье получено уравнение для трансзвуковых течений газа, учитывающее поперечные возмущения, превосходящие возмущения основного потока. Указаны некоторые точные частные решения этого уравнения и их приложения к решению ряда задач.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с частными производными, асимптотическое разложение, трансзвуковые течения газа, частные решения

1. Вывод асимптотического уравнения

Безвихревые изэнтропические течения газа в цилиндрических безразмерных координатах x, r, θ описываются уравнением:

$$\Phi_{tt}+2\Phi_x\Phi_{xt}+2\Phi_r\Phi_{rt}+\frac{2}{r^2}\Phi_\theta\Phi_{\theta t}+2\Phi_x\Phi_r\Phi_{rx}+\frac{2}{r^2}\Phi_x\Phi_\theta\Phi_{\theta x}+\frac{2}{r^2}\Phi_\theta\Phi_r\Phi_{\theta r}+\Phi_x^2\Phi_{xx}+$$
$$+\Phi_r^2\Phi_{rr}+\frac{1}{r^4}\Phi_\theta^2\Phi_{\theta\theta}-a^2\left(\Phi_{xx}+\Phi_{rr}+\frac{1}{r}\Phi_r+\frac{1}{r^2}\Phi_{\theta\theta}\right)=0, \tag{1.1}$$
$$a^2=\rho^{\chi-1}=p^{\frac{\chi-1}{\chi}}=\frac{\chi+1}{2}-\frac{\chi-1}{2}\left(2\Phi_t+\Phi_x^2+\Phi_r^2+\frac{1}{2r^2}\Phi_\theta^2\right).$$

В (1.1) $\Phi(x,r,\theta,t)$ - потенциал скорости, t - время, a - скорость звука, ρ - плотность, p - давление. Введем для $\Phi(x,r,\theta,t)$ асимптотическое разложение

$$\Phi=x+\varepsilon\psi(r,\theta,t^0)+\varepsilon^3\varphi(x^0,r,\theta,t^0)+...,\quad x=\varepsilon x^0,\quad t=\frac{1}{\varepsilon}t^0, \tag{1.2}$$

где ε - малый параметр. Подставляя (1.2) в (1.1) и оставляя члены старшего порядка, получим для функции $\varphi(x^0,r,\theta,t^0)$ трансзвуковое уравнение:

$$2\varphi_{x^0t^0}+(\chi+1)\varphi_{x^0}\varphi_{x^0x^0}+2\psi_r\varphi_{x^0r}+\frac{2}{r^2}\psi_\theta\varphi_{x^0\theta}+\frac{\chi-1}{2}\left(2\psi_{t^0}+\psi_r^2+\frac{1}{r^2}\psi_\theta^2\right)\varphi_{x^0x^0}-$$
$$-\Delta\varphi=L(\psi). \tag{1.3}$$

В (1.3) введены обозначения

$$\Delta\varphi\equiv\varphi_{rr}+\frac{1}{r}\varphi_r+\frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta},$$
$$-L(\psi)\equiv\psi_{t^0t^0}+2\psi_r\psi_{rt^0}+\frac{2}{r^2}\psi_\theta\psi_{\theta t^0}+\psi_r^2\psi_{rr}+\frac{1}{r^4}\psi_\theta^2\psi_{\theta\theta}+\frac{2}{r^2}\psi_\theta\psi_r\psi_{r\theta}-\frac{1}{r^3}\psi_r\psi_\theta^2.$$

Функция $\psi(r,\theta,t^0)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\psi=0$. Если $\psi\equiv 0$, то получим классическое трансзвуковое уравнение Линя-Рейсснера-Тзяна

$$2\varphi_{x^0t^0}+(\chi+1)\varphi_{x^0}\varphi_{x^0x^0}-\varphi_{rr}-\frac{1}{r}\varphi_r-\frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}=0,$$

[1] Заведующи кафедрой высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru.

[2] Аспирант кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; kazakovaua@mail.ru.

которое в стационарном случае переходит в уравнение смешанного типа Кармана-Фальковича: $(\chi+1)\varphi_{x^0}\varphi_{x^0x^0}-\varphi_{rr}-\dfrac{1}{r}\varphi_r-\dfrac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}=0$.

Уравнение (1.3) описывает трансзвуковые течения газа, возникающие при воздействии на обтекаемое тело бокового (по отношению к основному направлению движения, совпадающему с направлением оси x) возмущения основного трансзвукового потока (для возмущающего поперечного течения $\Phi_y,\Phi_z\sim\varepsilon$, для основного течения $\Phi_y,\Phi_z\sim\varepsilon^3$). Для внешнего обтекания летательных аппаратов таким возмущением является, например, боковой, меняющий свою интенсивность с течением времени ветер $\psi=V_\infty(t)r\cos(\theta+\alpha(t))$. Для внутреннего обтекания, например для течений в соплах, таким возмущением может быть закрутка потока ($\psi=\Gamma(t)\theta$).

Условия на фронте ударной волны $x^0=x^0(r,\theta,t^0)$ получим из условий Ренкина-Гюгонио, подставляя в них разложение (1.2) и оставляя старшие по порядку члены:

$$\begin{gathered}2\frac{\partial x^0}{\partial t^0}+\left(\frac{\partial x^0}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial x^0}{\partial\theta}\right)^2+2\psi_r\frac{\partial x^0}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\psi_\theta\frac{\partial x^0}{\partial\theta}=\\=\frac{\chi-1}{2}\left(2\psi_{t^0}+\psi_r^2+\frac{1}{r^2}\psi_\theta^2\right)+\frac{\chi+1}{2}(\varphi_{x^0}+\varphi^*_{x^0}),\ \varphi=\varphi^*.\end{gathered}\tag{1.4}$$

Если в (1.4) положить $\varphi\equiv\varphi^*$, то получим характеристическое уравнение для (1.3).

Запишем условия на обтекаемой поверхности, мало отличающейся от цилиндрической, задав ее в виде

$$r=r_0(\theta,t^0)+r_2(x^0,\theta,t^0)\varepsilon^4+\ldots.\tag{1.5}$$

Подставляя (1.2) и (1.5) в точное условие непротекания $-\Phi_xr_x+\Phi_r-r^{-2}r_\theta\Phi_\theta=r_t$ и оставляя члены старшего порядка, получим:

$$\psi_r-\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial r_0}{\partial\theta}\psi_\theta=\frac{\partial r_0}{\partial t^0},\quad \varphi_r-\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial r_0}{\partial\theta}\varphi_\theta=\frac{\partial r_2}{\partial x^0}.\tag{1.6}$$

Значения φ_r, φ_θ, ψ_r, ψ_θ в (1.6) вычисляются при $r=r_0(\theta,t^0)$.

Уравнение звуковой поверхности ($V^2=a^2$) в трансзвуковом приближении принимает вид

$$N\equiv\frac{\chi+1}{2}\left(\psi_r^2+\frac{1}{r^2}\psi_\theta^2\right)+(\chi-1)\psi_{t^0}+(\chi+1)\varphi_{x^0}=0.\tag{1.7}$$

Для установившихся течений уравнение (1.3) имеет смешанный тип. Звуковая поверхность $N=0$ является поверхностью параболичности уравнения (1.3), при этом в сверхзвуковой области (области гиперболичности) $N>0$, в дозвуковой области (области эллиптичности) $N<0$.

Подставляя (1.2) в выражение для давления, проводя разложение в ряд Тейлора и оставляя старшие по порядку члены, получим асимптотическую формулу для определения давления

$$P=1-\chi\varepsilon^2\left(\psi_{t^0}+\varphi_{x^0}+\frac{1}{2}\psi_r^2+\frac{1}{2r^2}\psi_\theta^2\right).\tag{1.8}$$

2. Некоторые решения асимптотического уравнения (1.3)

Укажем некоторые частные решения уравнения (1.3). Отметим **автомодельный** класс решений (индекс ноль у переменных x, t будем здесь и далее опускать):

$$\psi=t^\beta\overline{\psi}(\zeta,\eta),\ \varphi=t^{2\beta-1}\overline{\varphi}(\xi,\zeta,\eta),\ \xi=\frac{x}{t^\beta},\ \zeta=\frac{r}{t^{(\beta+1)/2}},\ \eta=\theta+\alpha\ln t,\tag{2.1}$$

где α, β - произвольные числа. Подставив (2.1) в уравнение (1.3), получим уравнение для функции $\varphi = \overline{\varphi}(\xi,\zeta,\eta)$

$$
\begin{aligned}
&2\left((\beta-1)\overline{\varphi}_{\xi} - \beta\overline{\varphi}_{\xi\xi}\xi - \frac{\beta+1}{2}\overline{\varphi}_{\xi\zeta} + \alpha\overline{\varphi}_{\xi\eta}\right) + (\chi+1)\overline{\varphi}_{\xi}\overline{\varphi}_{\xi\xi} + 2\overline{\psi}_{\zeta}\overline{\varphi}_{\xi\zeta} + \frac{2}{\zeta^2}\overline{\psi}_{\eta}\overline{\varphi}_{\xi\eta} -\\
&-\Delta\overline{\varphi} + \frac{\chi-1}{2}\left(2\beta\overline{\psi} - (\beta+1)\zeta\overline{\psi}_{\zeta} + 2\alpha\overline{\psi}_{\eta} + \overline{\psi}_{\zeta}^2 + \frac{1}{\zeta^2}\overline{\psi}_{\eta}^2\right)\overline{\varphi}_{\xi\xi} = L(\overline{\psi}),\\
&\Delta\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_{\zeta\zeta} + \frac{1}{\zeta}\overline{\varphi}_{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2}\overline{\varphi}_{\eta\eta},\\
&-L(\overline{\psi}) = \beta(\beta-1)\overline{\psi} + \beta\left(-\frac{\beta+1}{2}\zeta\overline{\psi}_{\zeta} + \alpha\overline{\psi}_{\eta}\right) + (\beta-1)\left(-\frac{\beta+1}{2}\zeta\overline{\psi}_{\zeta} + \alpha\overline{\psi}_{\eta}\right) +\\
&+\left(\frac{\beta+1}{2}\right)^2\zeta^2\overline{\psi}_{\zeta\zeta} + \alpha^2\overline{\psi}_{\eta\eta} + 2\overline{\psi}_{\zeta}\left(\beta\overline{\psi}_{\zeta} - \frac{\beta+1}{2}\zeta\overline{\psi}_{\zeta\zeta} + \alpha\overline{\psi}_{\eta\zeta}\right) + \frac{2}{\zeta^2}\overline{\psi}_{\eta}\overline{\psi}_{\zeta}\overline{\psi}_{\eta\zeta} +\\
&+\frac{2}{\zeta^2}\overline{\psi}_{\eta}\left(\beta\overline{\psi}_{\eta} - \frac{\beta+1}{2}\zeta\overline{\psi}_{\zeta\eta} + \alpha\overline{\psi}_{\eta}\right) + \overline{\psi}_{\zeta}^2\overline{\psi}_{\zeta\zeta} + \frac{1}{\zeta^4}\overline{\psi}_{\eta}^2\overline{\psi}_{\eta\eta} - \frac{1}{\zeta^3}\overline{\psi}_{\zeta}\overline{\psi}_{\eta}^2.
\end{aligned}
$$

Функция $\overline{\psi}$ удовлетворяет уравнению Лапласа: $\overline{\psi}_{\zeta\zeta} + \frac{1}{\zeta}\overline{\psi}_{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2}\overline{\psi}_{\eta\eta} = 0$.

Уравнение (1.3) допускает также решение **полиномиального вида**

$$\varphi = \sum_{k=0}^{3}\varphi_k(r,\theta,t)x^k. \tag{2.2}$$

После подстановки (2.2) в уравнение (1.3) получим для функций $\varphi_0(r,\theta,t)$, $\varphi_1(r,\theta,t)$, $\varphi_2(r,\theta,t)$, $\varphi_3(r,\theta,t)$ систему уравнений:

$$
\begin{cases}
18\varphi_3^2(\chi+1) - \Delta\varphi_3 = 0,\\
6\varphi_{3t} + 18(\chi+1)\varphi_2\varphi_3 + 6\psi_r\varphi_{3r} + \dfrac{6}{r^2}\psi_\theta\varphi_{3\theta} - \Delta\varphi_2 = 0,\\
4\varphi_{2t} + (\chi+1)(6\varphi_1\varphi_3 + 4\varphi_2^2) + 4\psi_r\varphi_{2r} + \dfrac{4}{r^2}\psi_\theta\varphi_{2\theta} - \Delta\varphi_1 +\\
+6(\chi-1)\varphi_3\left(\psi_t + \dfrac{1}{2}\psi_r^2 + \dfrac{1}{2r^2}\psi_\theta^2\right) = 0,\\
2\varphi_{1t} + 2(\chi+1)\varphi_1\varphi_2 + 2\psi_r\varphi_{1r} + \dfrac{2}{r^2}\psi_\theta\varphi_{1\theta} - \Delta\varphi_0 +\\
+2(\chi-1)\varphi_2\left(\psi_t + \dfrac{1}{2}\psi_r^2 + \dfrac{1}{2r^2}\psi_\theta^2\right) = -L(\psi).
\end{cases}
$$

В классе решений (2.2) в случае установившихся течений содержится решение, которое описывает течение газа в соплах Лаваля с постоянным ускорением ($\varphi_{xx} = const$) и учитывает закрутку потока ($\psi = \Gamma\theta$, $\Gamma = const$):

$$\varphi = ax^2 + (\chi+1)a^2r^2x + \left[\frac{\chi-1}{2}\Gamma^2 a\ln^2 r + \frac{1}{8}(\chi+1)^2a^3r^4\right]. \tag{2.3}$$

При $r \to 0$ составляющая скорости $V_r = \varepsilon^3\varphi_r$ имеет особенность $\ln r/r$, которая обусловлена изначально особенностью задания составляющей $V_\theta (V_\theta = \varepsilon\Gamma/r)$. Уравнение звуковой поверхности для (2.3), согласно (1.7), имеет вид

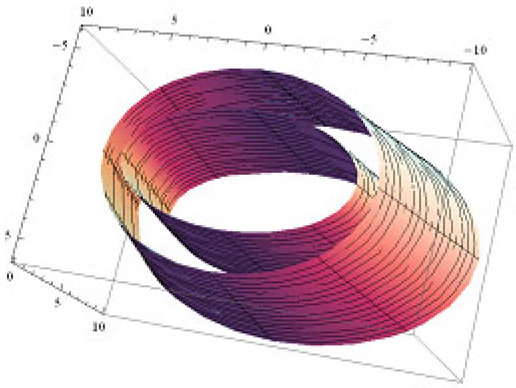
$$x = -\frac{\chi+1}{2}ar^2 - \frac{\Gamma^2}{4ar^2}.$$

При $\chi \to 1$ влияние закрутки потока на распределение скоростей уменьшается, а особенность для φ_r при $r \to 0$ исчезает.

Условия (1.6) имеют вид: $\dfrac{\partial r_0}{\partial \theta} = 0$, $\dfrac{\partial r_2}{\partial x} = \varphi_r$ (φ_r вычисляется при $r = r_0$). Определив r_0 и $r_2(x)$, получим уравнение обтекаемой поверхности:

$$r = r_0 + \varepsilon^4 \left[r_0 a^2 (\chi + 1) x^2 + \left((\chi - 1)\Gamma^2 a \frac{\ln r_0}{r_0} + \frac{1}{2}(\chi + 1)^2 a^3 r_0^3 \right) x + C \right], \quad r_0 = const. \quad (2.4)$$

Решение (2.3) можно использовать для описания течений в кольцеобразных каналах, уравнения внутренней и внешней стенок которых получим из (2.4) при $r_0 = r_0^{(1)}$, $r_0 = r_0^{(2)}$, $r_0^{(k)} = const \neq 0$ (см. Рисунок 2.1).



Р и с у н о к **2.1**

Обтекаемые поверхности вида (2.4) при $r_0 = 3$, $r_0 = 5$.

При $\Gamma = 0$ в (2.3) получим известное решение, описывающее течение в центре сопла Лаваля.

Укажем решение для случая $\psi = \Gamma\theta$, обладающее свойствами: V_x, V_r, $V_\theta \to 0$ при $r \to \infty$

$$\varphi = f(x, \theta) r^{-2} + g(r, \theta), \ \Delta g = 0. \quad (2.5)$$

Подставив решение (2.5) и ψ в уравнение (1.3), получим уравнение для функции $f(x, \theta)$:

$$(\chi + 1) f_x f_{xx} + 2\Gamma f_{x\theta} + (\chi - 1)\Gamma^2 f_{xx} - 4f - f_{\theta\theta} = 0.$$

Решение (2.5) допускает обобщение: $\varphi = f(\xi, \eta) r^{-2} + g(r, \theta)$, $\xi = x + \alpha \ln r$, $\eta = \theta + \beta \ln r$, α, β - произвольные числа.

Рассмотрим случай, соответствующий **движению газа между вращающимися плоскостями** $\theta = \theta_1(t)$, $\theta = \theta_2(t)$. В этом случае

$$\psi = r^2 (a(t) \cos 2\theta + b(t) \sin 2\theta) = r^2 f(\theta, t), \quad (2.6)$$

при этом в (1.3)

$$L(\psi) = r^2 (8(a' a + b' b) + 8(a \cos 2\theta + b \sin 2\theta)(2ab \sin 4\theta + a^2 \cos 4\theta - b^2 \cos 4\theta) +$$
$$+ a'' \cos 2\theta + b'' \sin 2\theta) = r^2 G(\theta, t).$$

Функции $a(t)$, $b(t)$ определяются из условий непротекания (1.6):

$$f_\theta(\theta_k(t), t) = \frac{\partial \theta_k(t)}{\partial t}, \ k = 1, 2,$$

и соответственно равны

$$a(t)=\frac{1}{A}(\theta_2^{'}\cos 2\theta_2-\theta_1^{'}\cos 2\theta_1),\ b(t)=\frac{1}{A}(\theta_2^{'}\sin 2\theta_1-\theta_1^{'}\sin 2\theta_2),$$

где $A=2\sin 2(\theta_1-\theta_2)$. Подставляя (2.6) в (1.3), получим уравнение для $\varphi(x,r,\theta,t)$:

$$\begin{aligned}&2\varphi_{xt}+(\chi+1)\varphi_x\varphi_{xx}+4r(a\cos 2\theta+b\sin 2\theta)\varphi_{xr}+4(b\cos 2\theta-a\sin 2\theta)\varphi_{x\theta}-\\&-\Delta\varphi+(\chi-1)r^2(a^{'}\cos 2\theta+b^{'}\sin 2\theta+2a^2+2b^2)\varphi_{xx}=-r^2G(\theta,t).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) допускает решение вида (2.2). Тогда получим систему четырех уравнений для функций $\varphi_0(r,\theta,t)$, $\varphi_1(r,\theta,t)$, $\varphi_2(r,\theta,t)$, $\varphi_3(r,\theta,t)$:

$$\begin{cases}18\varphi_3^2(\chi+1)-\Delta\varphi_3=0,\\6\varphi_{3t}+18(\chi+1)\varphi_2\varphi_3+12(b\cos 2\theta-a\sin 2\theta)\varphi_{3\theta}+12r(a\cos 2\theta+b\sin 2\theta)\varphi_{3r}-\\-\Delta\varphi_2=0,\\4\varphi_{2t}+(\chi+1)(6\varphi_1\varphi_3+4\varphi_2^2)+8r(a\cos 2\theta+b\sin 2\theta)\varphi_{2r}-\Delta\varphi_1+\\+8(b\cos 2\theta-a\sin 2\theta)\varphi_{2\theta}+6(\chi-1)r^2\varphi_3(a^{'}\cos 2\theta+b^{'}\sin 2\theta+2a^2+2b^2)=0,\\2\varphi_{1t}+2(\chi+1)\varphi_1\varphi_2+4r(a\cos 2\theta+b\sin 2\theta)\varphi_{1r}+4(b\cos 2\theta-a\sin 2\theta)\varphi_{1\theta}-\Delta\varphi_0+\\+2(\chi-1)r^2(a^{'}\cos 2\theta+b^{'}\sin 2\theta+2a^2+2b^2)\varphi_2=r^2G(\theta,t).\end{cases}\tag{2.8}$$

При этом можно положить $\varphi_3=g(\theta,t)r^{-2}$, где $g(\theta,t)$ определяется из уравнения: $18(\chi+1)g^2-4g-g_{\theta\theta}=0$.

В частном случае, для установившихся течений рассмотрим решение

$$\varphi(x,r,\theta)=\varphi_2(\theta)x^2+\varphi_1(\theta)r^2x+\varphi_0(\theta)r^4.\tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) в систему (2.8), получим систему трех уравнений для функций $\varphi_2(\theta)$, $\varphi_1(\theta)$, $\varphi_0(\theta)$:

$$\begin{cases}\varphi_2^{''}=0,\\4(\chi+1)\varphi_2^2+8(b\cos 2\theta-a\sin 2\theta)\varphi_2^{'}-4\varphi_1-\varphi_1^{''}=0,\\2(\chi+1)\varphi_1\varphi_2+4(b\cos 2\theta-a\sin 2\theta)\varphi_1^{'}-16\varphi_0-\varphi_0^{''}+8(a\cos 2\theta+b\sin 2\theta)\varphi_1+\\+4(\chi-1)(a^2+b^2)\varphi_2=G(\theta).\end{cases}$$

Учитывая условия непротекания $\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}|_{\theta=\theta_1,\theta_2}=0,\frac{\partial\varphi_k}{\partial\theta}|_{\theta=\theta_1}=0,\frac{\partial\varphi_k}{\partial\theta}|_{\theta=\theta_2}=0,k=0,1,2\right)$, получим, что $\theta_2-\theta_1=\frac{\pi n}{2},n\in N$, $\varphi_2=const=C_1$. Тогда $\varphi_1=C_1^2(1+\chi)+C_2\cos 2\theta$, а функция φ_0 определяется из уравнения:

$$\begin{aligned}&\varphi_0^{''}+16\varphi_0=2(\chi+1)C_1(C_1^2(1+\chi)+C_2\cos 2\theta)-8C_2\sin 2\theta(b\cos 2\theta-a\sin 2\theta)+\\&+8(a\cos 2\theta+b\sin 2\theta)(C_1^2(1+\chi)+C_2\cos 2\theta)+4(\chi-1)(a^2+b^2)C_1-8(a\cos 2\theta+b\sin 2\theta)\times\\&\times(2ab\sin 4\theta+a^2\cos 4\theta-b^2\cos 4\theta)=H(\theta).\end{aligned}$$

Рассмотрим **обтекание поверхности, мало отличающейся от цилиндра** ($r_0=R$). В этом случае, предполагая поперечное обтекание поверхности **безотрывным**, положим $\psi=V_\infty\cos\theta(r+R^2r^{-1})$. Тогда уравнение (1.3) примет вид

$$\begin{aligned}&2\varphi_{xt}+(\chi+1)\varphi_x\varphi_{xx}+2V_\infty\cos\theta\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\varphi_{xr}-2V_\infty\frac{\sin\theta}{r}\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\varphi_{x\theta}+\\&+\frac{\chi-1}{2}V_\infty^2\varphi_{xx}\left(1-2\frac{R^2}{r^2}\cos 2\theta+\frac{R^4}{r^4}\right)-\Delta\varphi=\\&=-2\left(\frac{R^2}{r^3}\right)V_\infty^3\cos\theta\left(1-\frac{2R^2}{r^2}+\frac{R^4}{r^4}-4\sin^2\theta\right).\end{aligned}\tag{2.10}$$

От правой части (обозначим ее $\alpha(r,\theta)$) уравнения (2.10) можно освободиться, введя новую функцию $\overline{\varphi} = \varphi + g(r,\theta)$, $\Delta g = \alpha(r,\theta)$. Тогда в стационарном случае получим уравнение для функции $\overline{\varphi}$:

$$\begin{aligned}&(\chi+1)\overline{\varphi}_x\overline{\varphi}_{xx} + 2V_\infty\cos\theta\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\overline{\varphi}_{xr} - 2V_\infty\frac{\sin\theta}{r}\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\overline{\varphi}_{x\theta} - \Delta\overline{\varphi}+\\&+\frac{\chi-1}{2}V_\infty^2\overline{\varphi}_{xx}\left(1-2\frac{R^2}{r^2}\cos 2\theta+\frac{R^4}{r^4}\right)=0.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Уравнение (2.11) имеет решение вида (2.2), где φ_k зависят от r, θ, при этом можно положить $\varphi_3 = g(\theta)r^{-2}$ (в частности, $g = 0$ или $g = 1/(3(\chi+1)\cos^2\theta)$). Для течения вдали от тела $r \to 0$ решение уравнения (2.11) можно искать в виде

$$\overline{\varphi} = r^\lambda f(\xi,\theta) + ...,\ \xi = xr^{-n}.$$

Так как при $V_\infty = 0$ мы должны получить асимптотику, соответствующую классическому уравнению $(\chi+1)\varphi_x\varphi_{xx} - \Delta\varphi = 0$, то можно, по-видимому, положить $\lambda = 3n-2$. Отметим, что при формальном переходе в (2.10) при $r \to \infty$ получим предельное уравнение

$$\begin{aligned}&M(\varphi) \equiv 2\varphi_{xt} + (\chi+1)\varphi_x\varphi_{xx} + 2V_\infty\cos\theta\varphi_{xr} - (2/r)V_\infty\sin\theta\varphi_{x\theta} - \Delta\varphi+\\&+((\chi-1)/2)V_\infty^2\varphi_{xx} = -(2R^2/r^3)V_\infty^3\cos\theta(1-4\sin^2\theta),\end{aligned}\tag{2.12}$$

которое в стационарном случае допускает точное решение

$$\varphi = rf(\xi,\theta) + g(\theta)r^{-1},\ \xi = x/r,\ g(\theta) = -R^2V_\infty^3\sin^2\theta\cos\theta.$$

При $R \ll 1$ приближенное решение уравнения (2.10) в стационарном случае можно искать в виде

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{\varphi}_n(x,r,\theta)R^{2n}.$$

Тогда для $\widetilde{\varphi}_0$ получим уравнение (2.12) в стационарном случае и без правой части $(M(\widetilde{\varphi}_0) = 0)$, которое имеет решение вида (2.2), где φ_n не зависят от t, а также решение $\widetilde{\varphi}_0 = rf(\xi,\eta) + g(r,\theta)$, $\xi = x/r$, $\eta = \theta + \alpha\ln r$, $\Delta g = 0$. При $V_\infty \ll 1$ решение (2.10) можно искать в виде

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{\varphi}_n(x,r,\theta)V_\infty^n.$$

В этом случае для $\widetilde{\varphi}_0$ будем иметь известное трансзвуковое уравнение $(\chi+1)\widetilde{\varphi}_{0x}\widetilde{\varphi}_{0xx} - \Delta\widetilde{\varphi}_0 = 0$.

В случае **отрывного обтекания**, предполагая, что с поверхности цилиндра сходят две вихревые прямолинейные пелены бесконечной длины с постоянными и противоположными по знаку интенсивностями Γ, выражение для $\psi(r,\theta)$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned}&\psi(r,\theta) = V_\infty\cos\theta(r+R^2/r) + (\Gamma/2\pi)\int_0^\infty(arctg((r\sin\theta-R)/(r\cos\theta-S))-\\&-arctg((r\sin\theta+R)/(r\cos\theta-S)))dS+\\&+(\Gamma/2\pi)\int_0^\infty(arctg((r\sin\theta(S^2+R^2)+R^3)/(r\cos\theta(S^2+R^2)-SR^2))-\\&-arctg((r\sin\theta(S^2+R^2)-R^3)/(r\cos\theta(S^2+R^2)-SR^2)))dS\end{aligned}\tag{2.13}$$

Точками схода вихрей являются точки $r = R$, $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. Для определения силового воздействия на обтекаемое тело согласно (1.8) необходимо знать $\psi_\theta(R,\theta)$ ($\psi_r(R,\theta) = 0$) по условию непротекания (1.6), которому функция (2.13) удовлетворяет. Определяя ψ_θ из (2.13) дифференцированием по θ и проводя затем интегрирование по S, получим

$$\begin{gathered}\psi_\theta(R,\theta) = -(\Gamma + 2V_\infty)R\sin\theta + (\Gamma R/2\pi)(\cos\theta\ln|(1-\sin\theta)/(1+\sin\theta)|- \\ -2\sin\theta(arctg(\cos\theta/(1-\sin\theta))) + arctg(\cos\theta/(1+\sin\theta))).\end{gathered} \tag{2.14}$$

Вклад в выражение для $C_0 = -\int\limits_0^{2\pi} P\cos\theta d\theta$, соответствующий (2.13), согласно (1.8), (2.14) определяется формулой $(V_\infty = R = 1)$:

$$\int\limits_0^{2\pi} \psi_\theta^2 \cos\theta d\theta = 2\Gamma^2 + 4\Gamma,\ \Gamma < -2.$$

Список литературы

1. P.A.Velmisov, M.D.Todorov, J.A.Kazakova, “Some klasses of the solutions of aerohydromechanic equations”, *Applications of Mathematics in Engineering and Economics*, 2008, 427-441.

2. П.А. Вельмисов, Ю.А. Казакова, “О параметрических решениях дифференциальных уравнений с частными производными; приложения в трансзвуковой газовой динамике”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **12**:4 (2010), 24-30.

3. Ю.А.Казакова, “О некоторых классах решений уравнений аэрогидромеханики”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Серия Физ.-мат.науки*, **2(23)** (2011), 289-294.

Asymptotic equations of nonlinear transonic gas flows and their solutions

© P. A. Velmisov[3], J. A. Tamarova[4]

Abstract. In this paper an equation for transonic gas flows, taking into account the transverse perturbations, surpassing perturbations of the main stream. Shows some exact particular solutions of this equation and their application to solving a number of problems.

Key Words: partial differential equations, asymptotic expansion, transonic gas flows, partial solutions

[3] Head of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.

[4] Postgraduate student of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; kazakovaua@mail.ru