УДК 517.9

Расчет допустимых сбросов загрязняющих веществ для многовидовой модели вольтерровского типа

© Т. Ф. Мамедова,[1], А. А. Ляпина[2]

Аннотация. Рассматривается математическая модель экосистемы вольтерровского типа. В работе проведена оценка допустимых сбросов загрязняющих веществ в водные объекты Республики Мордовия.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений, допустимые сбросы загрязняющих веществ, модель Лотки-Вольтерра, динамика экосистем

1. Введение

В настоящее время многие экологические процессы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. В связи с этим одной из важнейших проблем, возникающих в задачах математического моделирования, является проблема исследования устойчивости состояний равновесия, изучения асимптотических свойств решений таких систем, определение сценария взаимодействия компонент системы.

Для описания экологических процессов и исследования динамических систем необходим математический аппарат, связанный с нелинейными системами дифференциальных уравнений. Поэтому появляется необходимость в развитии методов исследования таких систем и создании новых эффективных методов анализа.

2. Постановка задачи

Задача оценки допустимых сбросов загрязняющих веществ в водные объекты заключается в определении и нормировании расчетным путем количественных и качественных характеристик сбросов загрязняющих веществ.

Для исследования устойчивости таких экосистем и расчета нормативов допустимых сбросов загрязняющих веществ рассмотрим математическую модель экологической системы в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Пусть загрязнения и биологически активную среду можно характеризовать следующими сценариями взаимодействия:

1. При небольших выбросах загрязняющих веществ биологически активная среда их полностью перерабатывает (устойчивый сценарий).

2. При увеличении выбросов загрязняющих веществ и других факторов биологически активная среда может находиться, как в устойчивом, так и неустойчивом состояни (бистабильная ситуация).

3. При больших выбросах загрязняющих веществ биологически активная среда погибает (неустойчивая ситуация).

В связи с этим возникает задача определения сценария взаимодействия компонент системы.

[1] профессор кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск, mamedovatf@yandex.ru.

[2] аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск, lyapina.rm@gmail.com.

Рассмотрим модель динамики взаимодействия загрязнения и водной биомассы:

$$\frac{dP_i}{dt} = P_i(t)\left(r_i - \frac{1}{k_i}\sum_{j=1}^{n} P_j(t)a_{ij}\right), i = \overline{1,n}, \tag{2.1}$$

где P_i - допустимая концентрация i-ого загрязняющего вещества;

P_j - допустимая концентрация j-ого загрязняющего вещества;

r_i - скорость распространения i - ого загрязняющего вещества;

k_i - эффективные коэффициенты взаимодействия загрязняющих веществ с водной биомассой;

$a_{ij}, i \neq j$ - величины показывают соответственно характер влияния j-ого вещества на i-ое.

Ставится задача изучения процессов изменения состояний экосистем, описываемых нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, методом сравнения Е. В. Воскресенского [2-4].

3. Алгоритм исследования систем нелинейных дифференциальных уравнений вольтерровского типа

Алгоритм решения поставленной задачи включает две части [6], [5]:

1. Исследование нелинейной динамической системы дифференциальных уравнений на устойчивость.

2. Нахождение решения нелинейной динамической системы дифференциальных уравнений численным методом.

Построим вычислительную схему метода.

Рассмотрим дифференциальные уравнения:

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x), \tag{3.1}$$

$$\dot{y} = A(t)y, \tag{3.2}$$

где $A(\cdot) : [T,+\infty) \to Hom(R^n, R^n)$, $f \in C^{(0,1)}(R^1_+ \times R^n, R^n)$.

Пусть решение $x(t : t_0, x_0)$ уравнения (3.1) существует для всех начальных условий $(t_0, x_0) \in T \times R^n$ и $t \in T$, $T = [0, +\infty)$.

Предположим так же, что уравнение (3.1) имеет решение $x(t) \equiv 0$.

Рассмотрим множества $N_0 \subseteq M \subseteq M_0 \subseteq \bar{M}_0 \subseteq N$, где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Алгоритм. Пусть задано исследуемое уравнение (3.1). Первая часть алгоритма включает выбор уравнения сравнения (3.2) и проверку условий метода сравнения.

1. Выбор уравнения сравнения (3.2).

2. Построение фундаментальной матрицы решений системы $Y(t) = (y_{ij}(t)),\ i,j = \overline{1,n}$, $Y(t_0) = E,\ t_0 \in [T_0, +\infty),\ T_0 \geq T$.

3. Построение обратной матрицы $Y^{-1}(s) = (y^{ij}(s)),\ i,j = \overline{1,n}$.

4. Оценка нелинейной части системы $|f_j(t, x_j, \ldots, x_n)| \leq \lambda_j(t, |x_{j_1}|, \ldots, |x_{j_q}|),\ \forall j \in N$, $\{j_1, \ldots, j_q\} \in M_0$, $\lambda_j(t, r_1, ..., r_i, ..., r_q) \leq \lambda_j(t, \overline{r_1}, ..., \overline{r_i}, ..., \overline{r_q}),\ r_i \leq \overline{r_i},\ i = \overline{1,q}$ при всех $t \in [T, +\infty)$.

5. Вычисление эталонных функций сравнения. Функции $\mu_i : [T, +\infty) \to R^1_+,\ m_i : [T, +\infty) \to R^1_+,\ R^1_+ = [0, +\infty)$, удовлетворяют неравенствам $\mu_i \geq \max\limits_{j \in N_0}\{|y_{ij}(t)|\},\ T_0 \leq t_0 \leq t < +\infty,\ i \in M_0$, если $N_0 \neq 0, j \in N_0$ и $\mu_i(t) \geq 0$, если $N_0 = 0,\ i \in M_0,\ m_i(t) \geq$

$\max\{\max\limits_{j\in \bar{M}_0}\{|y_{ij}(t)|\}, \mu_i(t)\}$, $T_0 \le t_0 \le t < +\infty$, $i \in M_0$. $|\varphi_i(t)| \le cm_i(t)$, $i = \overline{1,q}$, $\varphi \in C([T,+\infty], R^n)$.

6. Определение равномерной сходимости несобственного интеграла по t при $c \to 0, \mu_i(t) \to 0, \forall t \in [T,+\infty), \forall i \in M_0$ на любом компакте из $[T;+\infty)$ для выражения $J_i(t,\varphi) = \int\limits_{t_0}^{t} \sum\limits_{\substack{j\in M\\ k\in B}} y_{ik}(t)y^{jk}(s)f_j(s,\varphi(s))ds - \int\limits_{t}^{+\infty} \sum\limits_{\substack{j\in N\\ k\in B}} y_{ik}(t)y^{jk}(s)f_j(s,\varphi(s))ds$, $B = N - M$, $J_i(t,\varphi)$ которое существует $\forall i \in N$, $c \in R^1_+$ и $J_i(t,\varphi) = o(\mu_i(t))$ при $t \to +\infty$ и $\forall i \in M_0$.

7. Построение уравнения сравнения, которое имеет вид:

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{k,j\in N} |y^{jk}(t)|\lambda_j(t, zm(t)), \tag{3.3}$$

Нахождение решений уравнения (3.3), определенных на любом компакте из $[T,+\infty)$.

8. Выполнение пунктов 2-7 для уравнений (3.1) и (3.2) гарантирует асимптотическую эквивалентность по Брауеру. Переход ко второй части алгоритма.

9. Переход к пункту 1.

Вторая фаза алгоритма.

Рассмотрим уравнение (3.1) с начальными данными $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, где $A(t) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix}$; $f(t,x) = \begin{pmatrix} \gamma_{12}y(t)x(t) \\ \gamma_{21}y(t)x(t)) \end{pmatrix}$.

Представим (3.1) в виде:

$$\dot{z} = A(t)z(t). \tag{3.4}$$

1. Нахождение решения уравнения (3.4)

$$z(t) = exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} A(t)dt\right).$$

2. Построение итерационной схемы решений:

$$x_n(t) = exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} u_{n-1}(t)dt\right),$$

$$y_n(t) = exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} v_{n-1}(t)dt\right),$$

где $u_{n-1}(t) = \mu_1 - \gamma_{12}y_{n-1}(t)$, $v_{n-1} = -\mu_2 + \gamma_{21}x_{n-1}(t)$, n- шаг итерации.

3. Проверка сходимости итерационной схемы с помощью соотношений вида:

$$||x_n - x_{n-1}|| < \varepsilon_1,$$

$$||y_n - y_{n-1}|| < \varepsilon_2.$$

4. Если выполняется условие 3, то вывод результатов.

4. Численная реализация алгоритма расчета допустимых сбросов загрязняющих веществ для многовидовой модели

Математическая модель многовидовой экологической системы с управлением, описываемая системой дифференциальных уравнений, рассмотрена в работе [1].

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений Лотки-Вольтерра, описывающую динамику взаимодействия двух загязняющих веществ и водной биомассы.

$$\begin{cases} \frac{dP_i}{dt} = P_i(t)\left(r_i - \frac{1}{k_i}\sum\limits_{j=1}^{n} P_j(t)a_{ij}\right), i = \overline{1,m}; \\ \frac{dP_i}{dt} = P_i(t)\left(r_i - \frac{1}{k_i}\sum\limits_{j=1}^{n} P_j(t)a_{ij} + u_i(t)\right), i = \overline{m+1,n}; \end{cases} \tag{4.1}$$

где функции $u_i(t)$ обозначают управление. Управление удовлетворяет двум типам ограничений:

1) $0 \le u_i(t) \le b_i$,

2) $0 \le u_1(t) + u_2(t) + ... + u_i(t) \le B$, $u_i \ge 0$.

$P_i, i = 1...8$ - допустимая концентрация i-ого загрязняющего вещества;

Q - биологически активная окружающая среда (плотность водной биомассы);

dQ/dt - описывает динамику водной биомассы в отсутствии загрязнителей;

c_i - предельно допустимая концентрация i-ого загрязняющего вещества в воде соответственно, концентрация вещества в воде, выше которой вода непригодна для одного или нескольких видов водопользования. Предельно допустимые концентрации определяются исходя из Перечня нормативов качества воды водных объектов рыбохозяйственного значения, в том числе нормативов предельно допустимых концентраций вредных веществ в водах водных объектов рыбохозяйственного значения (приказ Федерального агенства по рыболовству отт 12 января 2010 года № 20);

k_i - коэффициенты неконсервативности (скорости разрушения) по нефтепродуктам и нитритам соответственно, зависящий от характера веществ. Значения коэффициентов неконсервативности принимаются по данным натурных наблюдений или по справочным данным и пересчитываются в зависимости от температуры и скорости течения реки;

q - расход воды, расчетный расход в водотоке в фоновом створе;

φ - коэффициент извилистости (отношение расстояния до контрольного створа по фарватеру к расстоянию по прямой);

χ - коэффициент, зависящий от места выпуска сточных вод;

s - емкость среды;

b - продолжительность пробега воды от места выпуска сточных вод до расчетного створа (коэффициент смещения, характеризующий долю расхода воды в реке, которая смешивается со сточными водами);

n_w - коэффициент шероховатости (шероховатость ложа реки). Величина численно характеризующая сопротивление, оказываемое руслом протекающему потоку, интегральная характеристика гидравлических сопротивлений. Точное определение коэффициентов местных сопротивлений затруднительно, поэтому коэффициент шероховатости целесообразно определять по таблице М. Ф. Срибного (классификации естественных русел и нормы сопротивления движению по данным М.Ф. Срибного).

Гидрологические характеристики реки Мокша представлены государственным учреждением «Мордовский республиканский центр по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды».

Нормативы допустимых концентраций вредных веществ в водных объектах и сточных водах устанавливаются исходя из условий целевого использования водного объекта. Река Мокша объект рыбохозяйственного назначения 2 категории, поэтому нормы предельно допустимых сбросов устанавливаются по «Перечню предельно допустимых концентраций и ориентировочно безопасных условий воздействия вредных веществ для воды рыбохозяйственных водоемов».

Сточные воды, после очистных сооружений сбрасываются в реку Мокша.

Сточная вода загрязнена:

- нитритами - 0,14 мг/л;
- солями железа - 0,67 мг/л;
- органическими веществами (по БПК-5) - 11,3 мг/л;
- нефтепродуктами - 0,25 мг/л ;
- фосфатами - 0,66 мг/л;
- аммонием солевым - 0,86 мг/л;
- взвешенными веществами - 11,3 мг/л.

Гидрологические характеристики реки Мокша представлены ГУ «Мордовским ЦГМС»:

- расход воды 95 ВП - 5,06 м^3/сек;
- средняя глубина реки - 0,52 м;
- средняя скорость течения - 0,16 м/с;
- коэффициент шероховатости - 0,04;
- коэффициент извилистости - 1,2.

Для численной реализации системы (4.1) определены следующие параметры:

$c_1 = 0,08$, $c_2 = 0,08$, $c_3 = 2,18$, $c_4 = 0,05$, $c_5 = 0,1$, $c_6 = 0,5$, $c_7 = 20,75$, $k_1 = 10,8$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0,23$, $k_4 = 0,1$, $k_5 = 0$, $k_6 = 0,07$, $k_7 = 0$, $q = 5,06$, $\chi = 1$, $s = 30$, $r_1 = 0,0096$, $r_2 = 0,00042$, $\varphi = 1,2$, $n_w = 0,04$, $b = 0,0003$.

Тогда система (4.1) примет вид:

$$\begin{cases}
\frac{dP_1}{dt} = P_1(t)\left(-0.08 + 10.8P_1(t) + \frac{5.06P_1(t)}{Q(t)+30}\right) - 0.00042;\\
\frac{dP_2}{dt} = P_2(t)\left(-0.08 + \frac{5.06P_2(t)}{Q(t)+30}\right) + 0.00042;\\
\frac{dP_3}{dt} = P_3(t)\left(-2.18 - 0.23P_3(t) + \frac{5.06Q(t)}{Q(t)+30}\right) - 0.00042;\\
\frac{dP_4}{dt} = P_4(t)\left(-0.05 + 0.1P_4(t) + \frac{5.06Q(t)}{Q(t)+30}\right) + 0.00042;\\
\frac{dP_5}{dt} = P_5(t)\left(-0.1 + \frac{5.06Q(t)}{Q(t)+30}\right) - 0.00042;\\
\frac{dP_6}{dt} = P_6(t)\left(-0.5 + 0.07P_6(t) + \frac{5.06Q(t)}{Q(t)+30}\right) - 0.00042;\\
\frac{dP_7}{dt} = P_7(t)\left(-20.75 + \frac{5.06Q(t)}{Q(t)+30}\right) - 0.00042;\\
\frac{dQ}{dt} = 0.048\left(P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + P_4(t) + P_5(t) + P_6(t) + P_6(t) - Q(t)\right).
\end{cases} \tag{4.2}$$

Точка $(-0.0084; 0.0029; -0.00019; 0.0033; -0.0027; -0.00083; -0.0002; -0.00089)$ - положение равновесия системы.

Сделаем замену переменных $P_i = x_i + x_{0i}$ и перейдем к исследованию нулевого решения:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (x_1 - 0.0084)\left(-0.08 + 10.8(x_1 - 0.0084) + \frac{5.06(x_1-0.0084)}{(x_8-0.00089)+30}\right) - 0.00042; \\ \frac{dx_2}{dt} = (x_2 + 0.0029)\left(-0.08 + \frac{5.06(x_2+0.0029)}{(x_8-0.00089)+30}\right) + 0.00042; \\ \frac{dx_3}{dt} = (x_3 - 0.00019)\left(-2.18 - 0.23(x_3 - 0.00019) + \frac{5.06(x_8-0.00089)}{(x_8-0.00089)+30}\right) - 0.00042; \\ \frac{dx_4}{dt} = (x_4 + 0.0033)\left(-0.05 + 0.1(x_4 + 0.0033) + \frac{5.06(x_8-0.00089)}{(x_8-0.00089)+30}\right) + 0.00042; \\ \frac{dx_5}{dt} = (x_5 - 0.0027)\left(-0.1 + \frac{5.06(x_8-0.00089)}{(x_8-0.00089)+30}\right) - 0.00042; \\ \frac{dx_6}{dt} = (x_6 - 0.00083)\left(-0.5 + 0.07(x_6 - 0.00083) + \frac{5.06(x_8-0.00089)}{(x_8-0.00089)+30}\right) - 0.00042; \\ \frac{dx_7}{dt} = (x_7 - 0.0002)\left(-20.75 + \frac{5.06(x_8-0.00089)}{(x_8-0.00089)+30}\right) - 0.00042; \\ \frac{dx_8}{dt} = 0.048((x_1 - 0.0084) + (x_2 + 0.0029) + (x_3 - 0.00019) + (x_4 + 0.0033)+ \\ +(x_5 - 0.0027) + (x_6 - 0.00083) + (x_7 - 0.0002) - (x_8 - 0.00089)). \end{cases} \tag{4.3}$$

Запишем систему в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -0.06x_1 + f_1(t,x), \\ \frac{dx_2}{dt} = -0.08x_2 + f_2(t,x), \\ \frac{dx_3}{dt} = -2.18x_3 + f_3(t,x), \\ \frac{dx_4}{dt} = -0.05x_4 + f_4(t,x), \\ \frac{dx_5}{dt} = -0.1x_5 + f_5(t,x), \\ \frac{dx_6}{dt} = -20.75x_6 + f_6(t,x), \\ \frac{dx_7}{dt} = -0.08x_7 + f_7(t,x), \\ \frac{dx_8}{dt} = 0.048\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 - x_8\right) + f_8(t,x). \end{cases} \tag{4.4}$$

Первое линейное приближение системы (4.3) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -0.06y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = -0.08y_2, \\ \frac{dy_3}{dt} = -2.18y_3, \\ \frac{dy_4}{dt} = -0.05y_4, \\ \frac{dy_5}{dt} = -0.1y_5, \\ \frac{dy_6}{dt} = -20.75y_6, \\ \frac{dy_7}{dt} = -0.08y_7, \\ \frac{dy_8}{dt} = 0.048\left(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 - y_8\right). \end{cases} \tag{4.5}$$

Фундаментальная матрица системы (4.5) и обратная к ней имеют вид:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{3t}{50}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2t}{25}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{109t}{50}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{t}{20}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{t}{10}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{83t}{4}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{2t}{25}} & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & e^{-\frac{6t}{125}} \end{pmatrix};$$

где $a_1 = -\frac{4}{9}e^{-\frac{6t}{125}} + \frac{4}{9}e^{\frac{3t}{50}}$, $a_2 = -\frac{3}{2}e^{-\frac{2t}{25}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{6t}{125}}$, $a_3 = -\frac{12}{533}e^{-\frac{109t}{50}} + \frac{12}{533}e^{-\frac{6t}{125}}$, $a_4 = -24e^{-\frac{t}{20}} + 24e^{-\frac{6t}{125}}$, $a_5 = -\frac{12}{13}e^{-\frac{t}{10}} + \frac{12}{13}e^{-\frac{6t}{125}}$, $a_6 = -\frac{24}{10351}e^{-\frac{83t}{4}} + \frac{24}{10351}e^{-\frac{6t}{125}}$, $a_7 = -\frac{3}{2}e^{-\frac{2t}{25}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{6t}{125}}$.

$$Y^{-1}(s) = \begin{pmatrix} e^{\frac{3s}{50}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2s}{25}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{109s}{50}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{s}{20}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{s}{10}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{83s}{4}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{2s}{25}} & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & e^{-\frac{6s}{125}} \end{pmatrix}.$$

где $b_1 = e^{\frac{5807}{250}}\left(\frac{4}{9}e^{-\frac{2911s}{125}} - \frac{4}{9}e^{-\frac{1159s}{50}}\right)$, $b_2 = e^{\frac{5807}{250}}\left(\frac{3}{2}e^{-\frac{1159s}{50}} - \frac{3}{2}e^{-\frac{5787s}{250}}\right)$,
$b_3 = e^{\frac{5807}{250}}\left(\frac{12}{533}e^{-\frac{1159s}{50}} - \frac{12}{533}e^{-\frac{2631s}{125}}\right)$, $b_4 = e^{\frac{5807}{250}}\left(24e^{-\frac{1159s}{50}} - 24e^{-\frac{11589s}{500}}\right)$,
$b_5 = e^{\frac{5807}{250}}\left(\frac{12}{13}e^{-\frac{1159s}{50}} - \frac{12}{13}e^{-\frac{2891s}{125}}\right)$, $b_6 = e^{\frac{5807}{250}}\left(\frac{24}{10351}e^{-\frac{1159s}{50}} - \frac{24}{10351}e^{-\frac{1239s}{500}}\right)$,
$b_7 = e^{\frac{5807}{250}}\left(\frac{3}{2}e^{-\frac{1159s}{50}} - \frac{3}{2}e^{-\frac{5787s}{250}}\right)$.

Множество $N = \{1, ..., 8\}$, $\bar{M}_0 = N$. Предположим справедливы оценки:

$||f_1(t,x)|| \le \lambda_1(t,|x|)$, $||f_2(t,x)|| \le \lambda_2(t,|x|)$, $||f_3(t,x)|| \le \lambda_3(t,|x|)$, $||f_4(t,x)|| \le \lambda_4(t,|x|)$, $||f_5(t,x)|| \le \lambda_5(t,|x|)$, $||f_6(t,x)|| \le \lambda_6(t,|x|)$, $||f_7(t,x)|| \le \lambda_7(t,|x|)$, $||f_8(t,x)|| \le \lambda_8(t,|x|)$,

поэтому $M_0 = \{1, ..., 8\}$, $M = M_0$, $B = N - M = 0$. Тогда эталонные функции сравнения $\mu_i : [T, +\infty) \to R^1_+$, $m_i : [T, +\infty) \to R^1_+$ удовлетворяют неравенствам $\mu_i \ge \max\limits_{j \in N_0} |y_{ij}(t)|$, $T \le t_0 \le t < +\infty$, $i \in M_0$ если $N_0 \ne 0$; если $N_0 = 0$, то $\mu_i \ge 0$, $m_i(t) \ge \max\{\max\limits_{j \in \bar{M}_0}\{|y_{ij}(t)|, \mu_i(t)\}\}$, $T_0 \le t < +\infty$, $i \in M_0$ и будет иметь вид:

$\mu_1(t) = e^{\frac{3t}{50}}$, $\mu_2(t) = e^{-\frac{2t}{25}}$, $\mu_3(t) = e^{-\frac{109t}{50}}$, $\mu_4(t) = e^{-\frac{t}{20}}$, $\mu_5(t) = e^{-\frac{t}{10}}$, $\mu_6(t) = e^{-\frac{83t}{4}}$, $\mu_7(t) = e^{-\frac{2t}{25}}$, $\mu_8(t) = -\frac{4}{9}e^{-\frac{6t}{125}} + \frac{4}{9}e^{\frac{3t}{50}}$.

$m_1(t) = e^{\frac{3s}{50}}$, $m_2(t) = e^{-\frac{2s}{25}}$, $m_3(t) = e^{-\frac{109s}{50}}$, $m_4(t) = e^{-\frac{s}{20}}$, $m_5(t) = e^{-\frac{s}{10}}$, $m_6(t) = e^{-\frac{83s}{4}}$, $m_7(t) = e^{-\frac{2s}{25}}$, $m_8(t) = -\frac{4}{9}e^{-\frac{6s}{125}} + \frac{4}{9}e^{\frac{3s}{50}}$.

Рассмотрим

$$J_i(t,\varphi) = \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{\substack{j \in N \\ k \in B}} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \varphi(s)) ds - \int\limits_{t}^{+\infty} \sum_{\substack{j \in N \\ k \in M}} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \varphi(s)) ds.$$

Выражение $J_i(t,\varphi)$ существует $\forall i \in N$, $c \in R^1_+$ и $J_i(t,\varphi) = o(\mu_i(t))$ при $t \to +\infty$. Несобственные интегралы сходятся равномерно по t на любом компакте из $[T; +\infty)$.

Все решения уравнения $\frac{dz}{dt} = \sum\limits_{\substack{k \in N \\ j \in N}} |y^{jk}(t)| \lambda_j(t, zm(t))$ определены на компакте $[T_0, t_0]$.

Отсюда следует, что каждое решение системы (4.5) определено на множестве $[T_0, +\infty)$.

Таким образом, условия 2-7 алгоритма выполняются, следовательно, система уравнений (4.5) асимптотически устойчива по переменным y_1, y_3, y_5, y_6, y_7. Тогда тривиальное решение системы уравнений (4.3) обладает этим же свойством по переменной x_1, x_3, x_5, x_6, x_7.

Выводы.

Из устойчивости исследуемой системы уравнений (4.3) по переменным x_1, x_3, x_5, x_6, x_7, следует, что концентрации соответствующие переменным веществ, а именно, нитритов, органических веществ, фосфатов, амония солевого, взвешенных веществ не превышают нормы сброса загрязняющих веществ в реку.

Из неустойчивости исследуемой системы уравнений (4.3) по переменным x_2, x_4, x_8, следует, что концентрации соответствующие переменным веществ, а именно, солей железа, нефтепродуктов и водной биомассы превышают нормы сброса загрязняющих веществ в реку. Такая ситуация соответствует второму сценарию взаимодействия.

Список литературы

1. Ашихмина И. В., “Управление многовидовыми экологическими системами”, *Информатика и системы управления*, **3**:29 (2011), 133–141.

2. Ляпина А.А., Мамедова Т.Ф., “Об исследовании устойчивости модели вольтерровского типа”, *Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем: сборник статей VI Международной научно-технической конференции*, 2011, 44–46.

3. Ляпина А.А., Мамедова Т.Ф., “Об исследовании устойчивости решения системы дифференциальных уравнений вольтерровского типа”, *Научно-технический вестник Поволжья*, **1** (2012), 195–198.

4. Mamedova T.F., Lyapina A.A., “On solution stability of differential equations of Volterra type Moldavia”, *The 20th conference on applied and industrial mathematics*, 2012, 158.

5. Мамедова Т.Ф., Десяев Е.В., Ляпина А.А., “Устойчивость математических моделей типа "хищник-жертва"”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико - атематические науки*, **2**:22 (2012), 98–105.

6. Мамедова Т.Ф., Ляпина А.А., “Асимптотическая эквивалентность дифференциальных уравнений вольтерровского типа”, *Научно-технический вестник Поволжья yr 2012*, **6**, 303–306.

Calculation of allowable discharges of pollutants for a multispecies models of Volterra type

© T. F. Mamedova [3], A. A. Lyapina[4]

Abstract. A mathematical model of the ecosystem of Volterra type. In the work the allowable discharge of pollutants into water bodies of the Republic of Mordovia.
Key Words: system of ordinary differential equations, allowable discharges of pollutants, Lotka-Volterra, ecosystem dynamics

[3] Professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; mamedovatf@yandex.ru

[4] Postgraduate student of Applied Mathematics, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk, lyapina@e-mordovia.ru