

УДК 519.6/538.945

Математическое моделирование магнитного отклика сверхпроводящего тонкого диска в модели критического состояния с критической плотностью тока зависящей обратно пропорционально квадрату напряженности поля

© Н. Д. Кузьмичев¹ М. В. Чугунов² А. А. Федченко³

Аннотация. Выполнено математическое моделирование гармоник намагниченности жесткого сверхпроводника второго рода в виде тонкого диска в приближении экранировки поля в центре образца для модели критического состояния с $J_c \sim \gamma/H^2$. Рассчитаны гистерезисные кривые намагниченности и ряд зависимостей действительной и мнимой частей первой, третьей и пятой гармоник намагниченности от величины напряженностей переменного и постоянного магнитных полей и от температуры. Получено, что на зависимости амплитуд гармоник намагниченности значительно влияет амплитуда переменного магнитного поля, качественно меняя указанные зависимости от величины постоянного поля для малых и больших амплитуд переменного поля.

Ключевые слова: высокотемпературный сверхпроводник, жесткий сверхпроводник II рода, критическое состояние, тонкий диск, критическая плотность тока, петля гистерезиса намагниченности, гармоники намагниченности

1. Введение

Высокотемпературные сверхпроводники (ВТСП) важны для практических приложений, например, в электротехнике, радиотехнике и других областях. Важно знать отклик различной структуры и геометрической формы ВТСП на переменное и постоянное магнитные поля.

Намагниченность ВТСП зависит от предыстории его состояния, т.е. обнаруживает гистерезис. Такое поведение сверхпроводника описывается различными моделями, которые базируются на модели критического состояния, предложенной Ч. Бинном в работе [1] для жестких сверхпроводников второго (II) рода.

Магнитное поле величиной больше первого критического поля в жесткие сверхпроводники II рода проникает в виде потока, образованного нитями Абрикосова и распространяется фронтом внутрь сверхпроводника, преодолевая силу пиннинга (силу закрепления вихря на неоднородности). Слабое магнитное поле в керамические ВТСП проникают в виде вихрей Джозефсона или гипервихрей. Изменение магнитного потока внутри сверхпроводника вызывает в области проникновения вихрей электрическое поле, которое в свою очередь, мгновенно создает экранирующий сверхпроводящий ток (сверхток) с критической плотностью J_c . Величина J_c зависит от локальной плотности магнитного потока (концентрации вихрей – средней индукции поля B или напряженности поля H) т. е.

¹ Заведующий кафедрой общенаучных дисциплин, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; kuzmichevnd@yandex.ru.

² Заведующий кафедрой общетехнических дисциплин, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; m.v.chugunov@mail.ru.

³ Старший преподаватель кафедры общеобразовательных и профессиональных дисциплин, Самарский государственный университет путей сообщения, г. Самара; starlightalex@gmail.com.

$J_c = J_c(\mathbf{B})$ [2]. Указанная зависимость обусловлена силой пиннинга и силой отталкивания между вихрями. Расчет сверхтока и магнитного поля внутри сверхпроводника, а также намагниченности и восприимчивости сверхпроводника представляет собой непростую задачу [3] – [6].

2. Модель расчета

В работе выполнено математическое моделирование процесса проникновения магнитного поля в тонкий диск жесткого сверхпроводника II рода в приближение полной экранировки внешнего магнитного поля в центре образца и рассчитаны магнитнополевые и температурные зависимости гармоник намагниченности. Использовалась следующая зависимость критической плотности тока от магнитного поля: $J_c(H) = \gamma/H^2$, которая приближенно описывает ситуацию при высокой плотности проникших в образец вихрей и для керамических сверхпроводников [7]. В пренебрежении эффекта Мейснера уравнение критического состояния для очень тонкого диска радиуса R и полутолщины b ($R \gg b$) [8] в аксиальном внешнем поле имеет вид:

$$\frac{dH}{dr} = \pm \frac{\gamma b}{H^2 r} \quad (2.1)$$

Здесь r есть текущий радиус цилиндра, $H(r)$ представляет собой осевую составляющую напряженности магнитного поля. Знак правой части уравнения (2.1) определяется знаком производной по времени от внешнего поля, т.е. знаком dH/dt . Вышеуказанная зависимость $J_c(H)$ рядом авторов использовалось для описания критического состояния гранулярных поликристаллических высокотемпературных сверхпроводников (например, [7]). Уравнение (2.1) решается с граничным условием $H(R) = H_e$. Где H_e – напряженность внешнего магнитного поля. Знак (+) в уравнении (2.1) соответствует растущему во времени магнитному полю, а знак (–) убывающему полю. Решение (2.1) имеет вид:

$$H(r) = \left[H_e^3 \mp 3\gamma b \cdot \ln\left(\frac{R}{r}\right) \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.2)$$

Магнитное поле в тонкий диск проникает на глубину $R - \rho$, а радиус ρ определяется из условия $H(\rho) = 0$:

$$\rho(H_e) = R \cdot \exp\left(-\frac{H_e^3}{3\gamma b}\right) \quad (2.3)$$

Намагниченность $M(H_e)$ тонкого диска вычислялась согласно формуле используемой для определения магнитного момента системы токов [8], [9] учитывая, что экранирующий ток в силу цилиндрической симметрии является азимутальным:

$$M(H_e) = \frac{1}{2V} \int_{\rho}^R |[\vec{r}, \vec{J}_c]| dV \quad (2.4)$$

Здесь V – объем сверхпроводника, ρ – радиус внутренней части цилиндра, куда поле не проникло (2.3). Начальная кривая намагниченности для возрастающего внешнего поля от θ до H_e , следуя (2.4), вычисляется по формуле:

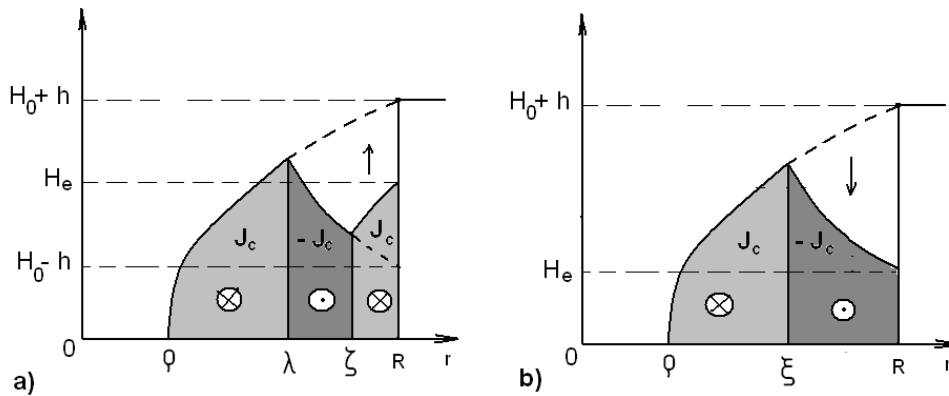
$$M_{in}(H_e) = -\frac{1}{R^2} \int_{\rho(H_e)}^R J_c(H) r^2 dr = -M_0 \cdot \exp\left(-\frac{H_e^3}{\gamma b}\right) \int_0^{(H_e^3/3\gamma b)} \frac{e^{3z} dz}{z^{2/3}} \quad (2.5)$$

Здесь $M_0 = (\gamma R^3/9b^2)^{1/3}$. Интеграл в выражении (2.5) не выражается через элементарные функции.

В переменном магнитном поле ($H_e(t) = H_0 + h \cdot \cos(\omega t)$) сверхпроводник разбивается на области с противоположно текущими экранирующими сверхтоками (рис. 2.1). Это приводит к гистерезису в намагничивании жесткого сверхпроводника. Уравнения кривых, которые определяют петлю гистерезиса намагниченности, будут выражаться следующими интегралами:

$$\begin{cases} M_+(H_0, h) = -\frac{1}{R^2} \left[\int_{\rho}^{\lambda} J_c(H)r^2 dr - \int_{\lambda}^{\zeta} J_c(H)r^2 dr + \int_{\zeta}^R J_c(H)r^2 dr \right] \\ M_-(H_0, h) = -\frac{1}{R^2} \left[\int_{\rho}^{\xi} J_c(H)r^2 dr - \int_{\xi}^R J_c(H)r^2 dr \right] \end{cases} \quad (2.6)$$

где $M_+(H_0, h)$ – ветвь петли в возрастающем поле, а $M_-(H_0, h)$ – ветвь петли для убывающего внешнего магнитного поля. Здесь ρ – радиус центральной части диска, куда возрастающее поле до величины $H_0 + h$ еще не проникло, λ – внутренний радиус кольцевого слоя диска с противоположно текущим экранирующим сверхтоком в убывающем поле до значения $H_0 - h$ и ζ – внешний радиус этого же кольцевого слоя диска. Величина ξ является внутренним радиусом кольцевого слоя в убывающем поле от значения $H_0 + h$ до текущего значения $H_e(t)$ (см. рис. 2.1).



Р и с у н о к 2.1

Разбиение сверхпроводника в постоянном и переменном аксиальных магнитных полях на области с противоположно текущими сверхтоками: а) Возрастающее поле проникло на глубину $R - \rho$, убывающее – на глубину $R - \lambda$ и снова возрастающее на $R - \zeta$ (ветвь петли гистерезиса в растущем поле – M_+). б) Возрастающее поле проникло на глубину $R - \rho$, убывающее – на глубину $R - \xi$ (ветвь петли гистерезиса в убывающем поле – M_-).

Аналитический расчет по формулам (2.6) для M_- и M_+ приводит следующим выражениям:

$$M_-(H_0, h, H_e) = -M_0 \cdot \begin{cases} \exp\left(-\frac{(H_0 + h)^3}{\gamma b}\right) \cdot \int_0^{[(H_0+h)^3+H_e^3]/6\gamma b} \frac{e^{3z} dz}{z^{2/3}} + \\ + \exp\left(\frac{H_e^3}{\gamma b}\right) \cdot \int_{[(H_0+h)^3+H_e^3]/6\gamma b}^{H_e^3/3\gamma b} \frac{e^{-3z} dz}{z^{2/3}} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$M_+(H_0, h, H_e) = -M_0 \cdot \begin{cases} \exp\left(-\frac{(H_0+h)^3}{\gamma b}\right) \cdot \int_0^{[(H_0+h)^3+(H_0-h)^3]/6\gamma b} \frac{e^{3z} dz}{z^{2/3}} + \\ + \exp\left(\frac{(H_0-h)^3}{\gamma b}\right) \cdot \int_{[(H_0+h)^3+(H_0-h)^3]/6\gamma b}^{H_e^3+ (H_0-h)^3/6\gamma b} \frac{e^{-3z} dz}{z^{2/3}} + \\ + \exp\left(-\frac{H_e^3}{\gamma b}\right) \cdot \int_{[(H_0-h)^3+H_e^3]/6\gamma b}^{H_e^3/3\gamma b} \frac{e^{-3z} dz}{z^{2/3}} \end{cases} \quad (2.8)$$

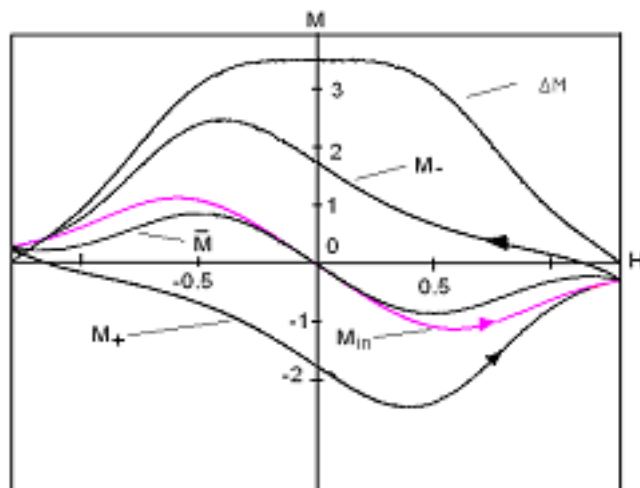
На практике важны гармоники намагниченности, так как экспериментально их достаточно легко измерить. В работе [3] показано, что вклад в действительные части гармоник дает средняя кривая намагниченности $\overline{M}(H_0, h, H_e)$, а в мнимые составляющие вклад дает разностная кривая намагниченности $\Delta M(H_0, h, H_e)$. Указанные кривые определяются следующим образом [3]:

$$\overline{M}(H_0, h, H_e) = \frac{M_-(H_0, h, H_e) + M_+(H_0, h, H_e)}{2}, \quad (2.9)$$

$$\Delta M(H_0, h, H_e) = M_-(H_0, h, H_e) - M_+(H_0, h, H_e). \quad (2.10)$$

На рис. 2.2 построены графики зависимостей M_{in} , M_+ , M_- , \overline{M} и ΔM от внешнего магнитного поля с использованием формул (2.5), (2.7) – (2.10). Величину магнитного поля удобно выражать в единицах $H_p = (\gamma b)^{1/3}$. В поле $H_e = H_p$ радиус $\rho \approx 0.7165R$.

В эксперименте часто измеряется напряжение сигнала отклика сверхпроводника на переменное магнитное поле в присутствии постоянного поля [3], [6], [7], [11]. Указанное напряжение возникает на концах приемной катушки, внутри которой помещен сверхпроводник. В силу нелинейности отклика напряжение будет иметь в своем составе синфазные (действительные) U' и квадратурные (мнимые) U'' составляющие гармоник.



Р и с у н о к 2.2

Начальная кривая намагниченности M_{in} , ветвь петли гистерезиса в возрастающем поле M_+ , ветвь петли гистерезиса в убывающем поле M_- , средняя \overline{M} и разностная ΔM кривые. Здесь H текущее магнитное поле. Кривые построены с использованием формул (2.6), (2.8) – (2.10).

Магнитное поле H выражено в единицах $H_p = (\gamma b)^{1/3}$, а намагниченность в единицах M_0 .

Гармоники напряжения пропорциональны соответствующим гармоникам намагниченности или восприимчивости: $U_n^{',''} \propto M_n^{',''}$. Здесь $n = 1, 2, 3, \dots$ – номер гармоники.

Действительные M_n' и мнимые M_n'' составляющие гармоник намагниченности вычислялись согласно формулам работы [3]:

$$M_n'(H_0, h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{M}(H_0, h, H_e(t)) \cos(n\omega t) d(\omega t), \quad (2.11)$$

$$M_n''(H_0, h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta M(H_0, h, H_e(t)) \sin(n\omega t) d(\omega t). \quad (2.12)$$

Модули гармоник намагниченности определяются формулой:

$$M_n(H_0, h) = \sqrt{(M_n'(H_0, h))^2 + (M_n''(H_0, h))^2}. \quad (2.13)$$

Заметим, что (см. например, [3])

$$M_1'' = \frac{1}{\pi h} \oint H dM = \frac{Q}{\pi \mu_0 V h}. \quad (2.14)$$

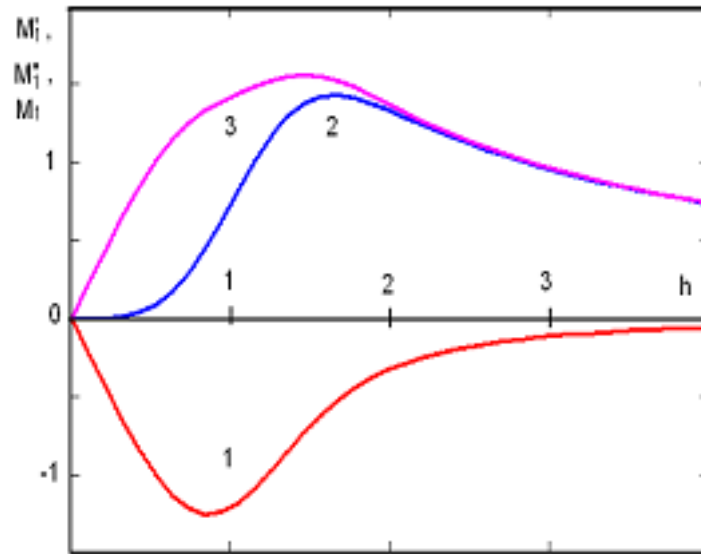
Здесь Q – энергия потерь на перемагничивание за цикл, μ_0 – магнитная постоянная, а V – объем сверхпроводника.

Аналитические вычисления гармоник намагниченности приводят к чрезвычайной громоздкости выражений неудобных для дальнейшего анализа и сравнения с экспериментом, поэтому их вычисления проводились численно в системе MathCad.

3. Результаты расчета магнитопольевых зависимостей гармоник намагниченности

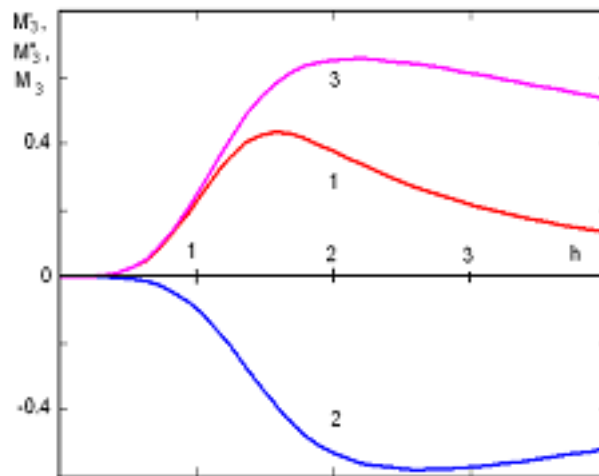
На рисунках 3.1 – 3.3 приведены расчеты амплитуд 1, 3 и 5 гармоник намагниченности в зависимости от величины амплитуды h напряженности внешнего переменного магнитного поля ($H_0 = 0$). Из рисунков видно, что гармоники имеют максимумы, положения которых зависят от номера n гармоники. С ростом n максимум смещается в сторону роста h . Максимумы обусловлены конкуренцией двух механизмов – увеличением объема сверхпроводника занятого сверхтоком, что приводит к росту намагниченности диска и подавлением величины $J_c(H)$ с ростом поля.

Учитывая формулу (2.14) и рис. 3.1 (кривая 2) получим, что максимум потерь энергии на перемагничивание сверхпроводника приходится на величину $h_m \approx 1.7H_p$. Мнимая часть пятой гармоники (рис. 3.3) намагниченности M_5'' меняет знак при $h \approx h_m$, то есть фазу. Отметим, что при $h > 3H_p$ в сверхпроводнике происходят в основном потери на перемагничивание (см. рис. 3.1).



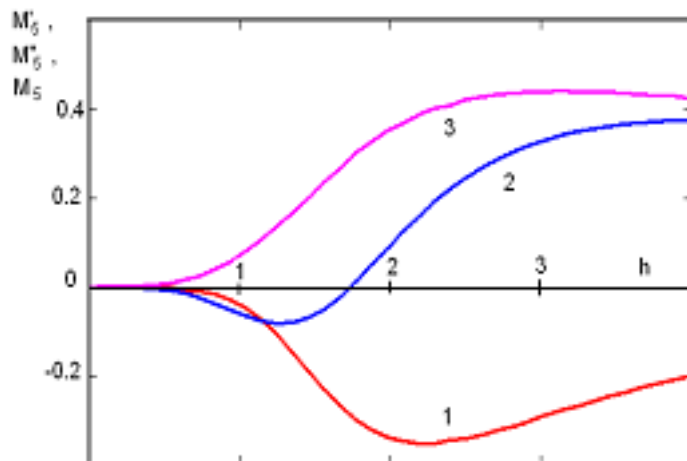
Р и с у н о к 3.1

Амплитуды действительной M_1' (кривая 1), мнимой M_1'' (кривая 2) частей и модуля M_1 (кривая 3) первой гармоники намагниченности в зависимости от амплитуды h переменного магнитного поля $H_0 = 0$. Магнитное поле выражено в единицах $H_p = (\gamma b)^{1/3}$, амплитуды гармоник намагниченности – в единицах M_0 .



Р и с у н о к 3.2

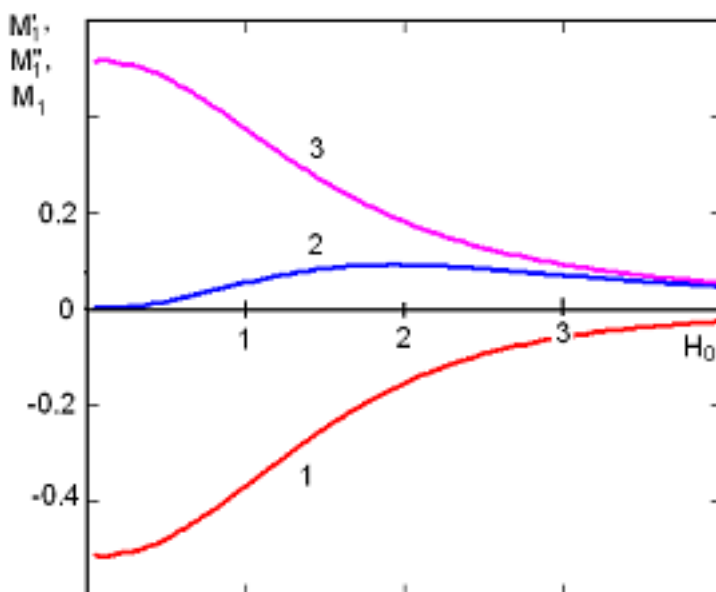
Амплитуды действительной M_3' (кривая 1), мнимой M_3'' (кривая 2) частей и модуля M_3 (кривая 3) третьей гармоники намагниченности в зависимости от амплитуды h переменного магнитного поля $H_0 = 0$. Магнитное поле выражено в единицах $H_p = (\gamma b)^{1/3}$, амплитуды гармоник намагниченности – в единицах M_0 .



Р и с у н о к 3.3

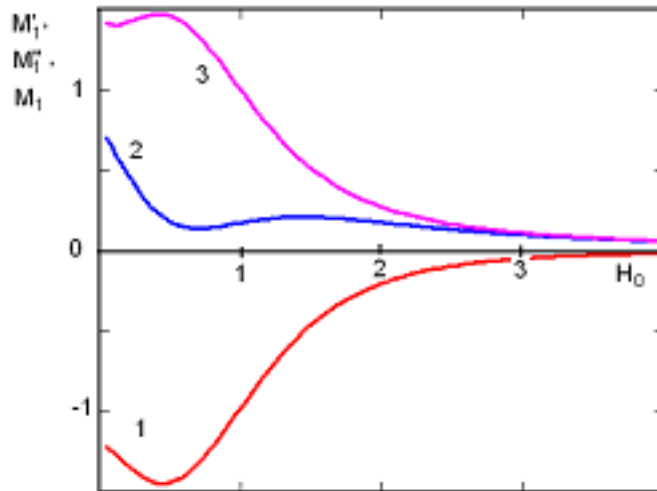
Амплитуды действительной M'_5 (кривая 1), мнимой M''_5 (кривая 2) частей и модуля M_5 (кривая 3) пятой гармоники намагниченности в зависимости от амплитуды h переменного магнитного поля $H_0 = 0$. Магнитное поле выражено в единицах $H_p = (\gamma b)^{1/3}$, амплитуды гармоник намагниченности – в единицах M_0 .

На рисунках 3.4 – 3.6 представлены расчеты амплитуд 1 и 3 гармоник намагниченности в зависимости от величины напряженности внешнего постоянного магнитного поля H_0 при 2-х значения амплитуды модуляции $h = 0.25H_p$ и H_p . Для $h = 0.25H_p$ из рис. 3.4 видно, что потери с ростом H_0 возрастают и достигают максимума при $H_0 \approx 2H_p$. При $h = H_p$ и $H_0 = 0$ потери максимальны (рис. 3.5). Третья гармоника намагниченности имеет сложную зависимость с переменной знака, как в действительной части, так и в мнимой части для $h = H_p$ (рис. 3.6). Пятая гармоника имеет ещё более сложную зависимость с большим числом максимумов и минимумов.



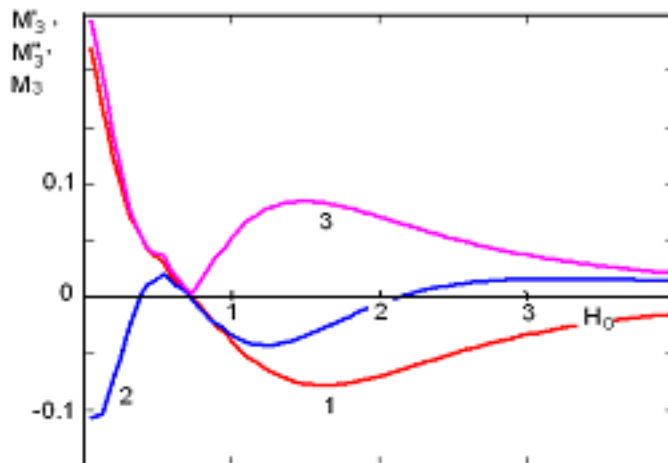
Р и с у н о к 3.4

Зависимости действительной M_1' (кривая 1), мнимой M_1'' (кривая 2) частей и модуля M_1 (кривая 3) первой гармоники намагниченности от постоянного поля H_0 для $h = 0.25H_p$. Напряженность магнитного поля выражена в единицах $H_p = (\gamma b)^{1/3}$, а амплитуды гармоник намагниченности в единицах M_0 .



Р и с у н о к 3.5

Зависимости действительной M_1' (кривая 1), мнимой M_1'' (кривая 2) частей и модуля M_1 (кривая 3) первой гармоники намагниченности от постоянного поля H_0 для $h = H_p$. Напряженность магнитного поля выражена в единицах $H_p = (\gamma b)^{1/3}$, а амплитуды гармоник намагниченности в единицах M_0 .



Р и с у н о к 3.6

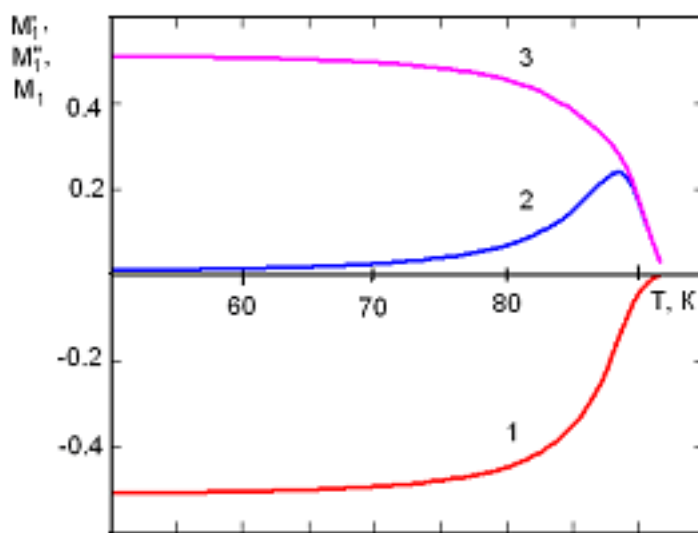
Зависимости действительной M_3' (кривая 1), мнимой M_3'' (кривая 2) частей и модуля M_3 (кривая 3) третьей гармоники намагниченности от постоянного поля H_0 для $h = H_p$. Напряженность магнитного поля выражена в единицах $H_p = (\gamma b)^{1/3}$, а амплитуды гармоник намагниченности в единицах M_0 .

4. Температурные зависимости гармоник намагниченности

Температурные зависимости гармоник намагниченности определяются температурной зависимостью единственного параметра γ уравнения (2.1) т.е. $\gamma(T)$. Данная зависимость определяется температурной зависимостью критической плотности тока $J_c(T) \propto \gamma(T)$ (см. раздел 2). Была выбрана следующая хорошо известная температурная зависимость:

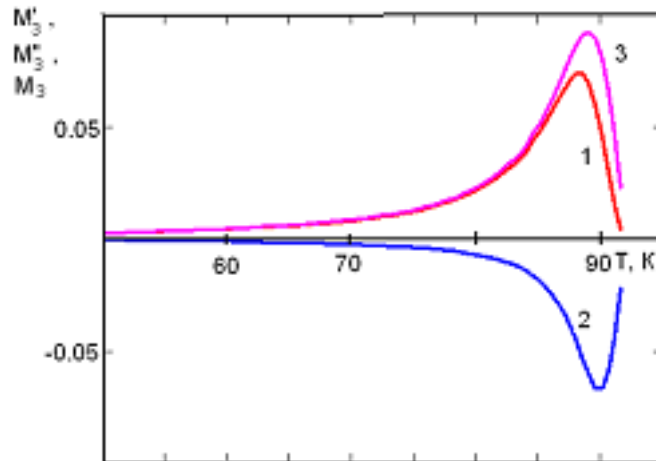
$$\gamma(T) = \gamma_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]^2. \quad (4.1)$$

Для удобства сравнения с экспериментом критическая температура T_c была выбрана равной 92 K , т.к. эта температура является критической для широко распространенного ВТСП $YBa_2Cu_3O_{7-x}$. Результаты расчета приведены на рисунках 4.1 – 4.3. Из рисунков видно, что мнимая часть первой гармоники и высшие гармоники намагниченности имеют максимум вблизи T_c . Данный максимум, как показывают расчеты, с ростом амплитуды модуляции h уширяется и смещается в область низких температур. Максимум обусловлен конкуренцией следующих процессов: уменьшением J_c с ростом температуры, что приводит к большему объему сверхпроводника занятому сверхтоком, росту намагниченности и росту потерь на перемагничивание (2.14). Показатели степени в формуле (4.1) качественно не влияют на температурные зависимости гармоник.



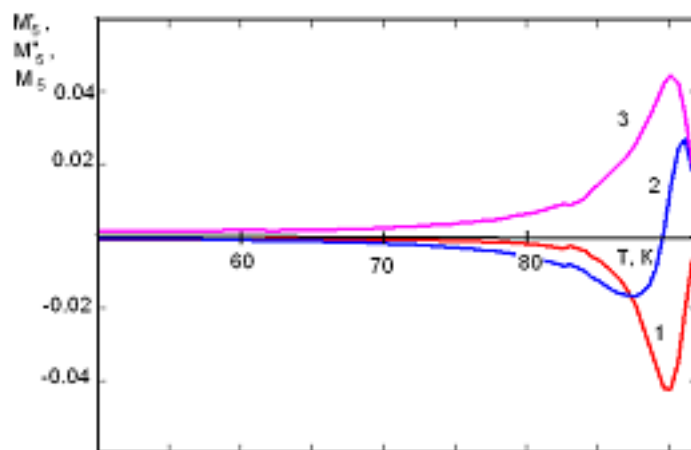
Р и с у н о к 4.1

Температурные зависимости амплитуд первой гармоники намагниченности (M_1' - 1, M_1'' - 2 и M_1 - 3) для $h = 0.25H_p$ ($H_0 = 0$). Амплитуды гармоник намагниченности выражены в единицах M_0 .



Р и с у н о к 4.2

Температурные зависимости амплитуд третьей гармоники намагниченности (M'_3 - 1, M''_3 - 2 и M_3 - 3) для $h = 0.25H_p$ ($H_0 = 0$). Амплитуды гармоник намагниченности выражены в единицах M_0 .



Р и с у н о к 4.3

Температурные зависимости амплитуд пятой гармоники намагниченности (M'_5 - 1, M''_5 - 2 и M_5 - 3) для $h = 0.25H_p$ ($H_0 = 0$). Амплитуды гармоник намагниченности выражены в единицах M_0 .

5. Обсуждение

Полученные результаты качественно совпадают с результатами экспериментальной работы [11] в которой исследовались гармоники намагниченности поликристаллических дисков в слабых магнитных полях. Количественное сравнение данных настоящей работы и вышеприведенной работы приводят к следующему значению γ для поликристалла $YBa_2Cu_3O_{7-x}$: $\gamma \sim 1.1 \cdot 10^{15} \text{ A}^3/\text{m}^4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bean C.P., "Magnetization of hard superconductors", *Phys. Rev. Lett.*, 1962, № 8, 250-251.
2. Kim Y.B., Heampstead C.F., Strnad A.R., "Critical persistent currents in hard superconductors", *Phys. Rev. Lett.*, 1962, № 9, 306-309.
3. Кузьмичев Н.Д., "Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: Анализ спектра гармоник намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников", *ЖТФ*, 1994, № 12, 63-74.
4. Brandt E.H., "Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. I. Flux penetration and magnetization curves", *Phys. Rev. B.*, 1998, № 58, 6506-6522.
5. Brandt E.H., "Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. II. Nonlinear and linear ac susceptibilities", *Phys. Rev. B.*, 1998, № 58, 6523-6533.
6. Кузьмичев Н.Д., Славкин В.В., "Гармоники намагниченности текстурированных поликристаллов $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ выше температуры перехода в сверхпроводящее состояние", *ФТТ*, 2007, № 49, 1549-1553.
7. Lam Q.H., "Nonlinear electrodynamics in granular $YBa_2Cu_3O_{7-x}$: Measurements and models of complex permeability", *Phys. Rev. B.*, 1990, № 42, 4846-4849.
8. Кузьмичев Н.Д., Федченко А.А., "Математическое моделирование нелинейного отклика короткого цилиндра из жесткого сверхпроводника", *ИзВУЗ. Поволжский регион*, 2011, № 3, 110-119.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1982.
10. Кузьмичев Н.Д., Славкин В.В., "Генерация гармоник поликристаллическими $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ в сильных переменных магнитных полях", *Письма в ЖТФ*, 1992, № 8, 11-15.
11. Головашкин А.И., Кузьмичев Н.Д., Левченко И.С., Мотулевич Г.П., Славкин В.В., "Зависимость напряжения гармоник сигнала отклика керамических образцов $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ от величины постоянного магнитного поля в зависимости от глубины модуляции поля", *Препринт. ФИАН*, 1990, № 163, 11-15.

Mathematical modeling of the magnetic response of thin superconducting disc according to critical state model with a critical current density with inverse-square dependance of field magnitude.

© N. D. Kuzmichev ⁴, M. V. Chugunov ⁵, A. A. Fedchenko ⁶

Abstract. In this work carry out mathematical modeling of magnetization harmonics of hard superconductors two type for thin disk. According to critical state model with $J_c \sim \gamma/H^2$ in approximation of magnetic field screening in the disk center has calculated hysteretic magnetization curves and magnetic field and temperature dependencies magnetization harmonics. Quality influence of magnitude of ac magnetic field amplitude was found on harmonic magnetization. The results this work was compared with experimental results for polycrystals of high-temperature superconductors. The parameter of model γ was estimated.

Key Words: high-temperature superconductor, II-type hard superconductor, critical state, thin disk, critical current density, hysteretic loop of magnetization, harmonics magnetization.

⁴ Head of sub-department of general scientific disciplines, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; kuzmichevnd@yandex.ru.

⁵ Head of sub-department of general technical disciplines, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; m.v.chugunov@mail.ru.

⁶ Senior lecturer of sub-department of general education and professional disciplines, Samara State University of Railways, Samara; starlightalex@gmail.com.