УДК 517.938

Соленоидальные базисные множества А-диффеоморфизмов Смейла-Виеториса

© **Н. В. Исаенкова[1], Е. В. Жужома[2], Л. А. Куприна[3]**

Аннотация. В статье вводятся диффеоморфизмы Смейла-Виеториса, которые включают классические ДЕ-отображения с соленоидами Смейла. Главный результат состоит в установлении соответствия между базисными множествами А-диффеоморфизмов Смейла-Виеториса и неособыми эндоморфизмами, удовлетворяющими аксиоме А.

Ключевые слова: гиперболичность, неблуждающее множество, неособый эндоморфизм, базисное множество

1. Введение

Стивен Смейл в своей знаменитой статье [20] ввел так называемые ДЕ-отображения, которые возникают из растягивающих отображений. Пусть T - замкнутое многообразие размерности не меньше 1, и N – n-мерный диск, $n \geq 2$. Опуская детали, можно сказать, что ДЕ-отображение есть косое отображение

$$f : T \times N \to T \times N, \quad (x; y) \mapsto (g_1(x);\ g_2(x, y)),$$

где $g_1 : T \to T$ - растягивающее отображение степени $d \geq 2$, и

$$g_2|_{\{x\}\times N} : \{x\} \times N \to \{g_1(x)\} \times N$$

есть равномерно сжимающее отображение из n-диска $\{x\} \times N$ в n-диск $\{g_1(x)\} \times N$ для каждого $x \in T$. Кроме того, f должен быть диффеоморфизмом на свой образ $T \times N \to f(T \times N)$. В случае, когда $T = S^1$ - окружность, получается классическая конструкция Смейла, см. рис. 1.

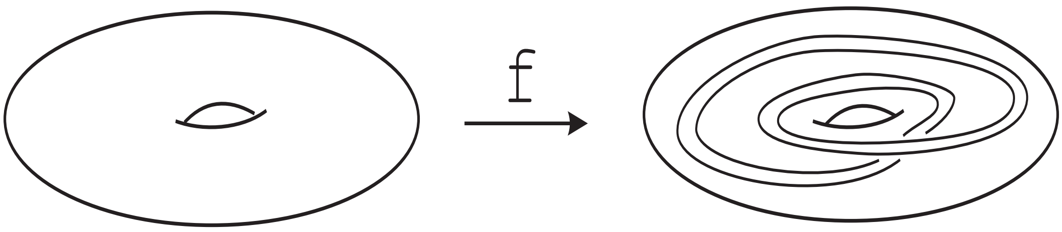

Рис. 1: ДЕ-отображение Смейла

Можно доказать, что инвариантное множество $\cap_{i\geq 0} f^i(T \times D^2) = \mathfrak{S}(f)$ является топологическим соленоидом. Напомним, что определение топологического соленоида было

[1] доцент кафедрs математики, информатики и информационных технологий, Нижегородскя академия МВД России; math-ngaa@yandex.ru, nisaenkova@mail.ru

[2] профессор кафедры Теории управления и динамики машин ННГУ им. Н.И. Лобачевского; zhuzhoma@mail.ru.

[3] доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math-ngaa@yandex.ru.

введено Виеторисом [22] в 1927 (независимо, соленоид был введен Ван Данцигом [9] в 1930, см. обзор [21]). Смейл [20] доказал, что $\mathfrak{S}(f)$ является гиперболическим растягивающимся аттрактором. Эта конструкция была обобщена Вильямсом [23], [24], определившим g_1 как растягивающее отображение ветвленного многообразия (что позволило Вильямсу классифицировать внутреннюю динамику растягивающихся аттракторов), и Блоком [4], рассматривающим g_1 как эндоморфизм, удовлетворяющий аксиоме А. Последняя работа посвящена Ω - устойчивости и доказательству разложения неблуждающего множества в так называемые базисные множества (спектральная теорема разложения для А-эндоморфизмов). Идеологически, наша статья есть продолжение [4], где был доказан следующий результат (Теорема А). Пусть $f : M^n \to M^n$ - диффеоморфизм Смейла-Виеториса замкнутого n-мерного многообразия M^n и пусть на $\mathfrak{B} \subset M^n$ задано косое отображение Смейла $f|_{\mathfrak{B}}$ (см. определения ниже). Тогда $f|_{\mathfrak{B}}$ удовлетворяет аксиоме А на $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда g удовлетворяет аксиоме А на T.

Отметим, что в рамках конструкции Смейла-Вильямса были построены интересные примеры растягивающихся аттракторов в работах [1], [6], [10], [13], [18]. Боте [5] классифицировал соленоиды Смейла на трехмерных многообразиях. Он был первым, кто доказал, что ДЕ-отображение $S^1 \times D^2 \to S^1 \times D^2$ может быть продолжено до диффеоморфизма некоторого замкнутого трехмерного многообразия $M^3 \supset S^1 \times D^2$ (см. также [7], [11], [12]).

Я. Зельдович и др. (см. [8]) предположили, что отображения типа Смейла могут быть полезны при изучении возникновения достаточно больших магнитных полей астрофизических тел. Поэтому естественно рассматривать различные обобщения классического отображения Смейла. В духе конструкции Смейла, в этой статье мы рассмотрим диффеоморфизмы, полученные из неособых эндоморфизмов. Основная цель состоит в изучении типов базисных множеств таких диффеоморфизмов. Вначале приведем необходимые определения и сформулируем основные результаты.

Пусть $k, n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют условию $n \geq 2k+1$, и пусть N – $(n-k)$-мерное компактное риманово многообразие с непустым краем (например, $N = D^{n-k}$ – $(n-k)$-шар). Для подмножества $N_1 \subset N$, определим диаметр $diam\ N_1 = \max_{a,b \in N_1}\{\rho_N(a,b)\}$ из N_1, где ρ_N метрика на N. Обозначим через $\mathbb{T}^k = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{k}$ - k-мерный тор, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $E_d : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$ – сохраняющее ориентацию линейное отображение степени $d \geq 2$. Очевидно, что E_d определяется целочисленной $k \times k$ матрицей с определителем равным d. Сюръективное отображение $g : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$ называется *d-накрытием*, если g является сохраняющим ориентацию локальный гомеоморфизмом степени d. Это означает, что для любой точки $t \in \mathbb{T}^k$, $g^{-1}(t)$ состоит из d точек. Естественно, что E_d является d-накрытием.

Косое отображение

$$F : \mathbb{T}^k \times N \to \mathbb{T}^k \times N, \quad (t,z) \longmapsto ((g(t);\ \omega(t,z)) \tag{1.1}$$

называется *косым отображением Смейла*, если выполняются следующие условия :

- $F : \mathbb{T}^k \times N \to F\left(\mathbb{T}^k \times N\right)$ - диффеоморфизм на свой образ;
- $g : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$ является d-накрытием, $d \geq 2$;
- для любого $t \in \mathbb{T}^k$, ограничение $w|_{\{t\}\times N} : \{t\} \times N \to \mathbb{T}^k \times N$ является равномерно сжимающим вложением
$$\{t\} \times N \to int\,(\{g(t)\} \times N) \tag{1.2}$$
т.е., существуют $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ такие что
$$diam\ (F^n(\{t\} \times N)) \leq C\lambda^n diam\ (\{t\} \times N),\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Когда $g = E_d$, косое отображение Смейла является ДЕ-отображением Смейла [20].

Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ замкнутого n-мерного многообразия M^n называется диффеоморфизмом *Смейла-Виеториса*, если имеется n-мерное подмногообразие $\mathbb{T}^k \times N \subset M^n$ такое что ограничение $f|_{\mathbb{T}^k\times N} \stackrel{\mathrm{def}}{=} F$ является косым отображением Смейла. Подмногообразие $\mathbb{T}^k \times N \subset M^n$ будем называть *базовым многообразием косого отображения Смейла.*

Положим

$$\cap_{l\geq 0} F^l(\mathbb{T}^k \times N) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathfrak{S}(f).$$

Можно доказать, что множество $\mathfrak{S}(f) = \mathfrak{S}$ является инвариантным и замкнутым, и ограничение $f|_{\mathfrak{S}} : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ является диффеоморфизмом.

Теорема 1.1. *Пусть $f : M^n \to M^n$ - диффеоморфизм Смейла-Виеториса замкнутого n-мерного многообразия M^n, $\mathbb{T}^k \times N = \mathfrak{B} \subset M^n$ - базовое многообразие косого отображения Смейла $f|_{\mathfrak{B}}$,*

$$f|_{\mathfrak{B}} = F : \ \mathbb{T}^k \times N \to \mathbb{T}^k \times N, \quad (t, z) \longmapsto ((g(t);\ \omega(t, z)).$$

Тогда ограничение $f|_{\mathfrak{S}}$ сопряжено обратному пределу отображения $g : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$, где $\mathfrak{S} = \cap_{l\geq 0} F^l(\mathbb{T}^k \times N)$.

Следующая теорема показывает взаимосвязь между базисными множествами $f|_{\mathfrak{B}}$ и базисными множествами эндоморфизма g.

Теорема 1.2. *Пусть $f : M^n \to M^n$ - A-диффеоморфизм Смейла-Виеториса замкнутого n-мерного многообразия M^n, $\mathbb{T}^k \times N = \mathfrak{B} \subset M^n$ - базовое многообразие косого отображения Смейла $f|_{\mathfrak{B}}$,*

$$f|_{\mathfrak{B}} = F : \ \mathbb{T}^k \times N \to \mathbb{T}^k \times N, \quad (t, z) \longmapsto ((g(t);\ \omega(t, z)).$$

Ω - базисное множество $g : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$ и $\mathfrak{S} = \cap_{l\geq 0} F^l(\mathbb{T}^k \times N)$. Тогда $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$ содержит единственное базисное множество $\Omega_{\mathfrak{S}}$ для f, где $p_1 : \mathbb{T}^k \times N \to \mathbb{T}^k$ – естественная проекция на первый множитель. Более того,

1. *если Ω - тривиальное базисное множество (изолированная периодическая орбита) g, то и $\Omega_{\mathfrak{S}}$ - тривиальное базисное множество.*

2. *если Ω - нетривиальное базисное множество g, то и $\Omega_{\mathfrak{S}}$ - нетривиальное базисное множество.*

3. *если Ω - назад g-инвариантное базисное множество g, $\Omega = g^{-1}(\Omega)$, (следовательно, Ω -нетривиальное), то $\Omega_{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$.*

При $k = 1$ в качестве первой компоненты будет окружность $\mathbb{T}^1 = S^1$, в этом случае имеет место следующий результат.

Теорема 1.3. *Пусть $f : M^n \to M^n$ - A-диффеоморфизм Смейла-Виеториса замкнутого n-мерного многообразия M^n, $\mathbb{T}^k \times N = \mathfrak{B} \subset M^n$ - базовое многообразие косого отображения Смейла $f|_{\mathfrak{B}}$. Тогда неблуждающее множество $NW(F)$ F принадлежит $\mathfrak{S} = \cap_{l\geq 0} F^l(\mathbb{T}^1 \times N)$, и $NW(F)$ содержит единственное нетривиальное базисное множество $\Lambda(f)$, которое может быть либо*

- *одномерным растягивающимся аттрактором и $\Lambda(f) = \mathfrak{S}$, либо*

- *нульмерным базисным множеством, и тогда $NW(F)$ состоит из $\Lambda(f)$, конечного (ненулевого) числа изолированных периодических точек и конечного числа (возможно, нулевого) седловых изолированных периодических точек коразмерности один, имеющих стабильный индекс Морса.*

Обе возможности реализуются.

Таким образом, при $k = 1$ получается полное описание спектрального разложения неблуждающего множества, которое может состоять из одномерного соленоида Смейла, или из одного нетривиального нульмерного базисного множества с конечным числом изолированных периодических орбит.

Благодарности. Авторы благодарят В. З. Гринеса, О. В. Починку, С. В. Гонченко за плодотворные обсуждения и К. Кирсенко (музыканту и бизнесмену) за финансовую поддержку. Исследования проводились при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, а именно, грантов 13-01-12452-офи-м, 12-01-00672-а.

2. Определения

Отображения $F : M \times N \to M \times N$, имеющие вид $F(x; y) = (g(x); h(x, y))$, называются *косыми отображениями* (в литературе также можно встретить названия *косых произведений преобразований* над g или, коротко, *косых произведений*). Обозначим через $End\ (M)$ пространство C^1 эндоморфизмов $M \to M$, т. е. C^1 отображений M на себя. Эндоморфизм g является *неособым*, если якобиан $|Dg| \neq 0$. Это означает, что g является локальным диффеоморфизмом. В частности, g является d-накрытием. В этой статье мы будем рассматривать неособые эндоморфизмы $g \in End\ (M)$, $Dg \neq 0$, которые не являются диффеоморфизмами.

Рассмотрим $g \in End\ (M)$. Точка $x \in M$ называется *неблуждающей*, если для любой окрестности этой точки $U = U(x)$, существует число $m \in \mathbb{N}$ такое, что $g^m(U) \cap U \neq \emptyset$. Обозначим $NW(g)$ - множество неподвижных точек отображения g. Очевидно, $NW(g)$ является замкнутым множеством и $g(NW(g)) \subset NW(g)$, т.е. $NW(g)$ - вперед g-инвариантное множество. Множество $O(x_0) = \{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$ называется *g-орбитой* точки x_0, если $g(x_i) = x_{i+1}$ для каждого целого i. Подмножество $\{x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+r}\} \subset O(x_0)$, состоящее из конечного числа точек множества $O(x_0)$, называется *компактной частью* g-орбиты $O(x_0)$. g-орбита $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$ является *периодической*, если существует целое число $p \geq 0$ такое, что $g^p(x_i) = x_{i+p}$ для каждого $i \in \mathbb{Z}$. Ясно, что $NW(g)$ содержит все периодические g-орбиты.

Орбита $O(x_0)$ называется *гиперболической* если существует непрерывное разложение касательного расслоения

$$\mathbb{T}_{O(x_0)}M = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{T}_{x_i}M = \mathbb{E}^s \bigoplus \mathbb{E}^u = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}^s_{x_i} \bigoplus \mathbb{E}^u_{x_i}$$

которое инвариантно относительно производной Dg так что

$$||Dg^m(v)|| \leq c\mu^m ||v||,\ ||Dg^m(w)|| \geq c^{-1}\mu^{-m}||w|| \quad \text{для}\ \ v \in \mathbb{E}^s,\ w \in \mathbb{E}^u,\ \forall m \in \mathbb{N}$$

для некоторых констант $c > 0$, $0 < \mu < 1$ и Римановой метрики на $\mathbb{T}M$. Отметим, что $\mathbb{E}^u(x_0)$ зависит от g-орбит $O(x_0)$ (точнее, от отрицательных полуорбит $\{x_i\}_{i=-\infty}^{0}$). Возможен следующий факт, что $\mathbb{E}^u(x_0) \neq \mathbb{E}^u(x_0)$ при условии $x_0 = y_0$, но при этом $O(x_0) \neq O(y_0)$. Однако, такого не может быть для $\mathbb{E}^s(x_0)$, которое зависит только от x_0 [16].

Неособый эндоморфизм $g \in End\ (M)$ *удовлетворяет аксиоме A*, или g является А-эндоморфизмом, если

- периодические g-орбиты плотны в $NW(g)$ (следует, что $g(NW(g)) = NW(g)$);
- все g-орбиты в $NW(g)$ являются гперболическими, и соответствующие разбиения на касательном расслоении $\mathbb{T}_{NW(g)}$ непрерывно зависят на компактных частях g-орбит.

Напомним, что спектральная теорема разложения Смейла говорит о том, что у диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме А, неблуждающее множество распадается на непустые замкнутые инвариантные множества, каждое из которых транзитивно. Подобная теорема для А-эндоморфизмов была рассмотрена в [4] (Теорема С), [16] (Теорема 3.11 and Предложение 3.13). Итак, если g - неособый А-эндоморфизм, тогда неблуждающее множество $NW(g)$ представляет собой объединение непересекающихся, так называемых *базисных*, множеств $\Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_k$, при этом каждое множество Ω_i - замкнутое, инвариантное и содержит точки, g-орбиты которых плотны в Ω_i.

Следуя Вильямсу, [23], [24], введем понятие обратного предела для $g : T \to T$. Обозначим

$$\prod_g = \{ (t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots) \in T^{\mathbb{N}} \ : \ g(t_{i+1}) = t_i, \ i \geq 0 \}$$

Это множество наделено индуцированной топологией счетных факторов. В этой топологии окрестность задается набором (ε, r) и определяется следующим образом

$$U = \{ \ \{x_i\}_0^\infty \in \prod_g \ : \ x_i \in U_\varepsilon(t_i), \ 0 \leq i \leq r \ \text{ для некоторых } \ \varepsilon > 0, \, r \in \mathbb{N} \},$$

где $\{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\} \in \prod_g$. Определим отображение сдвига

$$\hat{g} : \prod_g \to \prod_g, \ \ \hat{g}(t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots) = (g(t_0), t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots) \, , \ \ (t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots) \in \prod_g .$$

Отображение $\hat{g} : \prod_g \to \prod_g$ называется *обратным пределом* g. Известно, что $\hat{g}$ является гомеоморфизмом. [17], [24].

3. Доказательство основных результатов

Пусть $f : M^n \to M^n$ - диффеоморфизм Смейла-Виеториса замкнутого n-мерного многообразия M^n, $\mathbb{T}^k \times N = \mathfrak{B} \subset M^n$ - базовое многообразие косого отображения Смейла $f|_{\mathfrak{B}}$,

$$f|_{\mathfrak{B}} = F : \ \mathbb{T}^k \times N \to \mathbb{T}^k \times N, \quad (t, z) \longmapsto ((g(t); \ \omega(t, z)) \, .$$

Обозначим через $p_1 : \mathbb{T}^k \times N \to \mathbb{T}^k$, $p_2 : \mathbb{T}^k \times N \to N$ естественные проекции, действующие по правилам $p_1(t, z) = t$ и $p_2(t, z) = z$. Слой $\{t\} \times N \overset{\text{def}}{=} N_t$ тривиального слоя расслоения p_1 называется t-*листом.* Из (1.1) следует, что $F = f|_{\mathfrak{B}}$ переводит t-лист в $g(t)$-лист.

Пусть $t \in \mathbb{T}^k$ и $\varepsilon > 0$. Обозначим через $U_\varepsilon(t)$ - ε-окрестность точки t, $U_\varepsilon(t) = \{x \in \mathbb{T}^k \ : \ \varrho(x, t) < \varepsilon\}$, где ϱ есть метрика на $\mathbb{T}^k$.

Доказательство теоремы 1.1.

Напомним, что для любой точки $t_0 \in \mathbb{T}^k$, прообраз $g^{-1}(t_0)$ содержит d точек t_0^1, t_0^2, …, $t_0^d \in \mathbb{T}^k$. Поскольку F является диффеоморфизмом на свой образ, множества $F(N_{t_0^1})$, …, $F(N_{t_0^d})$ попарно не пересекаются,

$$F(N_{t_0^i}) \cap F(N_{t_0^j}) = \emptyset, \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq d, \tag{3.4}$$

Разобьем доказательство теоремы на шаги, каждый из которых оформим как предложение.

П р е д л о ж е н и е 3.1. (Шаг 1) *Для любой точки $p \in \mathfrak{S}$ существуют единственная последовательность точек $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$, $t_i \in \mathbb{T}^k$ и соответствующая последовательность $\{N_{t_i}\}_{i=0}^{\infty}$ из листов такие, что*

- $p = \cap_{i \geq 0} F^i(N_{t_i})$;
- $p \in \cdots \subset F^i(N_{t_i}) \subset F^{i-1}(N_{t_{i-1}}) \cdots \subset F(N_{t_1}) \subset N_{t_0}$;
- $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$.

Доказательство Шага 3.1.. Положим $t_0 = p_1(p) \in \mathbb{T}^k$. Пусть $g^{-1}(t_0) = \{t_0^1, t_0^2, \ldots, t_0^d\}$. Из (3.4) следует, что существует единственная точка t_0^j такая, что $p \in F(N_{t_0^j})$. Обозначим $t_0^j = t_1$. Отметим также, что $F(N_{t_1}) \subset N_{t_0}$. $g^{-1}(t_1)$ содержит d точек t_1^1, t_1^2, …, t_1^d. Поскольку верно (3.4), множества $F(N_{t_1^1})$, …, $F(N_{t_1^d})$ попарно не пересекаются. Так как $p \in F^2(\mathbb{T}^k \times N)$, существует единственная точка t_1^i такая, что $p \in F^2(N_{t_1^i})$. Обозначим $t_1^i = t_2$. Заметим, что $p \in F^2(N_{t_2}) \subset F(N_{t_1}) \subset N_{t_0}$. Продолжая аналогичные рассуждения, получаем последовательности $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{N_{t_i}\}_{i=0}^{\infty}$. Из (1.3) следует, что $diam\ F^i(N_{t_i}) = diam\ (F^i(\{t_i\} \times N)) \to 0$ при $i \to \infty$. Таким образом, $p = \cap_{i \geq 0} F^i(N_{t_i})$. $\diamondsuit$

$\hat{g} : \prod_g \to \prod_g$ - обратный предел *отображения* $g : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$, $\prod_g = \{\, (t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots) \in \mathbb{T}^{\mathbb{N}} \ : \ g(t_{i+1}) = t_i,\ i \geq 0 \,\}$. Возьмем точку $p \in \mathfrak{S}$ и, следуя шагу 3.1., зададим отображение по правилу

$$\theta : \ \mathfrak{S} \to \prod_g, \quad p \longmapsto P(t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots), \ \ t_i \in \mathbb{T}^k.$$

П р е д л о ж е н и е 3.2. (Шаг 2) *Отображение θ является гомеоморфизмом.*

Доказательство Шага 3.2.. Из (1.3) следует, что θ - инъективное отображение. Поскольку пересечение последовательности вложенных замкнутых подмножеств не является пустым, θ сюрьективно. Остается только доказать, что θ и θ^{-1} являются непрерывными отображениями. Возьмем окрестность U точки $\theta(p)$, $p \in \mathfrak{S}$. Эта окрестность задается парой чисел (ε, r).

$$U = \{\ \{x_i\}_0^{\infty} \in \prod_g \ : \ x_i \in U_{\varepsilon}(t_i), \ 0 \leq i \leq r \ \text{ for some } \ \varepsilon > 0, \, r \in \mathbb{N}\, \},$$

где $\theta(p) = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\} \in \prod_g$. Множество $g^{-1}\left(U_{\varepsilon}(t_i)\right)$ состоит из d попарно непересекающихся областей $0 \leq i \leq r$. Так как $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$, можно показать справедливость равенств $t_{r-j} = g^j(t_r)$ для всех $1 \leq j \leq r$. Аналогично, $x_{r-j} = g^j(x_r)$, $1 \leq j \leq r$. Поскольку g является непрерывным отображением, существует $0 < \delta \leq \varepsilon$ такое, что из принадлежности $x_r \in U_{\delta}(t_r)$ следует $x_i \in U_{\varepsilon}(t_i)$ для всех $i = 0$, …, r. Ограничение

$F|_{\mathfrak{S}} : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ является диффеоморфизмом. Таким образом, существует окрестность $U(p)$ точки p в $\mathfrak{S}$ такая, что

$$p_1\left(F^{-i}(U(p))\right) \subset U_\delta(t_i) \quad \text{для всех} \quad 0 \le i \le r.$$

Поскольку $g^{-1}(U_\varepsilon(t_i))$ состоит из d попарно непересекающихся областей, $0 \le i \le r$, можно показать, что $\theta(U(p)) \subset U$. Таким образом, θ - непрерывное отображение. Так как $\prod_g$ компактное отображение, θ^{-1} - непрерывно. $\diamondsuit$

П р е д л о ж е н и е 3.3. (Шаг 3) *Верно равенство* $\theta \circ F|_{\mathfrak{S}} = \hat{g} \circ \theta|_{\mathfrak{S}}$.

Доказательство Шага 3.3.. Возьмем $p \in \mathfrak{S}$ и $\theta(p) = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$ где $t_i = g(t_{i+1})$, $i \ge 0$. ИспШльзуя правило задания отображения $\hat{g} : \prod_g \to \prod_g$, преобразуем правую часть равенства

$$\hat{g} \circ \theta(p) = \hat{g}(\theta(p)) = \hat{g}(\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}) = \{g(t_0), t_0, t_1, \dots, t_i \dots\}.$$

Из (1.2) следует, что $F(p) \in F(\{t_0\} \times N) \subset N_{g(t_0)}$. Следуя Шагу 3.1., последовательности точек $\{g(t_0), t_0, t_1, \dots, t_i \dots\}$ соответствует $\theta(F(p))$, поскольку

$$F(p) = F\left(\cap_{i\ge0} F^i(\{t_i\} \times N)\right) = \cap_{i\ge0} F^{i+1}(\{t_i\} \times N) = \cap_{i\ge0} F^{i+1}(\{t_i\} \times N) \cap N_{g(t_0)} =$$

$$= N_{g(t_0)} \cap F(N_{t_0}) \cap F^2(N_{t_1}) \cap \dots \cap F^{i+1}(N_{t_i}) \cap \dots . \diamondsuit$$

Из шага 3.2. и 3.3. следует, что отображение θ является сопрягающим для $F|_{\mathfrak{S}}$ и $\hat{g}$. Теорема 1.1. доказана. $\square$

Доказательство Теоремы 1.2.

Вначале приведем некоторые дополнительные результаты.

Л е м м а 3.1. *Пусть* $\bar{t} = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots,\} \in \prod_g$, $g(t_{i+1}) = t_i$, $i \ge 0$. *Предположим, что* $t_i \in NW(g)$ *для всех* $i \ge 0$. *Тогда* $\bar{t} \in NW(\hat{g})$ *и* $\theta^{-1}(\bar{t}) \in NW(F)$.

Доказательство. Рассмотрим V - (ε, r)-окрестность точки

$$\bar{t} = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots,\} = \{g^r(t_r), g^{r-1}(t_r), \dots, t_r, \dots\}$$

т.е.,

$$V = \{\, \{x_i\}_{i\ge0} \in \prod_g \ : \ x_i \in U_\varepsilon(t_i),\, 0 \le i \le r\} \ =$$

$$= \ \{\, \{g^r(x_r), g^{r-1}(x_r), \dots, x_r, \dots\} \ : \ g^i(x_r) \in U_\varepsilon\left(g^i(t_r)\right),\, 0 \le i \le r\,\}.$$

Так как g, g^2, $\dots$, g^r равномерно непрерывны, существует $0 < \delta \le \varepsilon$ такое, что из принадлежности $x \in U_\delta(y)$ следует $g^i(x) \in U_\varepsilon(g^i(y))$ для всех $0 \le i \le r$. По условию, $t_r \in NW(g)$, значит, существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $g^{n_0}(V_\delta(t_r)) \cap V_\delta(t_r) \ne \emptyset$. Поэтому существует точка $x_0 \in V_\delta(t_r)$ такая, что $g^{n_0}(x_0) \in V_\delta(t_r)$.

Возьмем $\overline{x}_0 = \{g^r(x_0), g^{r-1}(x_0), \dots, x_0, \dots\} \in \prod_g$. Поскольку $x_0 \in V_\delta(t_r)$, $g^i(x_0) \in U_\varepsilon(g^i(t_r))$ для всех $0 \le i \le r$, получаем то, что $\overline{x}_0 \in V$. Так как $g^{n_0}(x_0) \in V_\delta(t_r)$, $g^{n_0+i}(x_0) \in U_\varepsilon(g^i(t_r))$ для всех $0 \le i \le r$. Значит,

$$\hat{g}^{n_0}(\overline{x}_0) = \{\, g^{n_0+r}(x_0), g^{n_0+r-1}(x_0), \dots, g^{n_0}(x_0), \dots\} \in V.$$

Следовательно, $\hat{g}^{n_0}(V) \cap V \ne \emptyset$ и $\bar{t} \in NW(\overline{g})$. Сопрягающее отображение переводит неблуждающее множество в неблуждающее множество. По Теореме 1.1., $\theta^{-1}(\bar{t}) \in NW(F)$.
$\square$

С л е д с т в и е 3.1. *Имеют место следующие равенства*

$$p_1\left[NW(f_{\mathfrak{B}})\right] = p_1\left[NW(F)\right] = NW(g).$$

Доказательство. Так как проекция p_1 непрерывна, $p_1\left[NW(F)\right] \subset NW(g)$. Возьмем точку $t_0 \in NW(g)$. Поскольку g является A-эндоморфизмом, $g\left[NW(g)\right] = NW(g)$ [4], [16]. Таким образом, существует последовательность $t_i \in NW(g)$ такая, что $g(t_{i+1}) = t_i$ для каждого $i \geq 0$. Из Леммы 3.1. следует, что $\bar{t} = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots,\} \in NW(\hat{g})$ и $\theta^{-1}(\bar{t}) \in NW(F)$. По определению отображения θ имеем $\theta^{-1}(\bar{t}) \in p_1^{-1}(t_0)$. Значит, $NW(g) \subset p_1\left[NW(F)\right]$. $\square$

Л е м м а 3.2. *Пусть* $(t_0, z_0) \in \mathfrak{S}$ *неблуждающая точка* f *и* $\theta(t_0, z_0) = \{t_i\}_{i\geq 0}$. *Тогда* $t_i \in NW(g)$ *для всех* $i \geq 0$.

Доказательство. Согласно Следствию 3.1., $p_1\left[NW(f_{\mathfrak{B}})\right] = p_1\left[NW(F)\right] = NW(g)$. Таким образом, $t_0 \in NW(g)$. Поскольку $F_{\mathfrak{S}} : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ является диффеоморфизмом, $F^{-1}\left(NW(F)\right) = NW(F)$ и $F^{-1}(t_0, z_0) = (t_1, z_1) \in NW(F) = NW(f_{\mathfrak{B}})$. Значит, из шага 1, $t_1 \in NW(g)$. Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что $t_i \in NW(g)$ для всех $i \geq 0$. $\square$

С л е д с т в и е 3.2. *Пусть* $(t_0, z_0) \in \mathfrak{S}$ *неблуждающая точка* f *и* $\theta(t_0, z_0) = \{t_i\}_{i\geq 0}$. *Предположим, что* t_0 *принадлежит базисному множеству* Ω *отображения* g. *Тогда* $t_i \in \Omega$ *для всех* $i \geq 0$.

Доказательство. По лемме 3.2., $t_i \in NW(g)$ для всех $i \geq 0$. Так как Ω является вперед g-инвариантным множеством, $t_i \in \Omega$ для всех $i \geq 0$. $\square$

Л е м м а 3.3. *Пусть* Ω *- нетривиальное базисное множество* g *и* $t_0 \in \Omega$. *Предположим, что две точки* (t_0, z_1), $(t_0, z_2) \in \mathfrak{S}$ *принадлежат неблуждающему множеству* f. *Тогда эти точки* (t_0, z_1), (t_0, z_2) *будут принадлежать базисному множеству* f.

Доказательство. Обозначим через Ω_j базисное множество F, содержащее точки (t_0, z_j), $j = 1, 2$. Очевидно, $\Omega_j \subset \mathfrak{S}$. Мы хотим доказать, что $\Omega_1 = \Omega_2$. Для этого достаточно будет показать, что найдется точка $q \in NW(F)$ такая, что каждая из точек (t_0, z_1) и (t_0, z_2) лежит в ω-предельном множестве q.

Пусть $\bar{t}_j = \theta(t_0, z_j) = \{t_0, t_1^{(j)}, \ldots, t_i^{(j)}, \ldots\}$, $j = 1, 2$. По Следствию 3.2., $t_i^{(j)} \in \Omega$ для всех $i \geq 0$, $j = 1, 2$. Так как базисное множество Ω является транзитивным, существует точка $x_0 \in \Omega$ такая, что ее положительная полуорбита $O_g^+(x_0)$ плотна в Ω, $clos\ \left(O_g^+(x_0)\right) = \Omega$.

Из Следствия 3.1., существует $\overline{x}_0 = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots\} \in \prod_g$ такая, что $x_i \in \Omega$ для всех $i \geq 0$. Возьмем произвольную (ε, r)-окрестность $U(\bar{t}_1)$ точки $\bar{t}_1$. Поскольку g, g^2, $\ldots$, g^r - равномерно непрерывные отображения, существует $\delta > 0$ такое, что из $x \in U_\delta(y)$ следует $g^i(x) \in U_\varepsilon(y)$ для всех $0 \leq i \leq r$. Так как полуорбита $O_g^+(x_0)$ плотна Ω, существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $g^{n_0}(x_0) \in U_\delta(t^{(1)})$. Таким образом, $\hat{g}^{n_0}(\overline{x}_0) \in U(\bar{t}_1)$. Поэтому, $\bar{t}_1 = \theta(t_0, z_1)$ принадлежит ω-предельному множеству $\overline{x}_0$. Аналогично можно доказать, что $\bar{t}_2 = \theta(t_0, z_2)$ также лежит в ω-предельном множестве $\overline{x}_0$. Поскольку θ является сопрягающим отображением, точки $(t_0, z_1) = \theta^{-1}(\bar{t}_1)$ и $(t_0, z_2) = \theta^{-1}(\bar{t}_2)$ лежат в ω-предельном множестве точки $q = \theta^{-1}(\overline{x}_0) \in NW(F)$. $\square$

Доказательство Теоремы 1.2.. Мы знаем, что $p_1[NW(F)] = NW(g)$. Таким образом, $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$ содержит базисные множества f. Предположим, что Ω является тривиальным, т.е. Ω - изолированная периодическая орбита

$$\Omega = Orb_g(q) = \{q, g(q), \dots, g^{p-1}(q), g^p(q) = q\}, \quad \text{где} \quad q \in \mathbb{T}^k \text{ и } p \in \mathbb{N} \text{ период } q.$$

По определению Смейла косого отображения, конструкция $F = f|_{\mathfrak{B}}$ на втором множителе N имеет непрерывный растягивающийся аттрактор. Поэтому,

$$N_q \supset f^p(N_q) \supset \cdots \supset f^{mp}(N_q) \supset \cdots$$

$$\text{и пересечение } \bigcap_{m \geq 0} f^{mp}(N_q) \text{ единственная точка, скажем } Q.$$

Аналогично, $\cap_{m \geq 0} f^{mp}(N_{g^i(q)})$ - единственная точка $f^i(Q)$ для каждого $0 \leq i \leq p-1$. Из (1.1) следует, что $\{Q, f(Q), \dots, f^{p-1}(Q), f^p(Q) = Q\}$ является изолированной периодической орбитой $Orb_f(Q)$ такой, что $NW(F) \cap p_1^{-1}(\Omega) = Orb_f(Q)$. Таким образом, $Orb_f(Q) = \Omega_{\mathfrak{S}}$ является единственным базисным множеством F, принадлежащим $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$.

Рассмотрим случай, когда Ω - нетривиальное базисное множество. Из Леммы 3.3. следует, что базисное множество F содержится в $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$. Следовательно, $\Omega_{\mathfrak{S}}$ является единственным базисным множеством f, содержащимся в $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$.

Пусть тепеть Ω - назад g-инвариантное базисное множество g. Заметим, что из равенства $\Omega = g^{-1}(\Omega)$ следует, что Ω может быть тривиальным базисным множеством, так как g является d-накрытием, $d \geq 2$. Из Леммы 3.1. следует, что каждая точка $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$ является неблуждающей точкой f. По Лемме 3.3., $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$ - единственное базисное множество. Теорема 1.2. доказана. □

Доказательство Теоремы 1.3.

Напомним, что d-накрытие $g : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ также является неособым эндоморфизмом окружности $S^1 = \mathbb{T}^1$. Важным результатом в доказательстве Теоремы 1.3. является следующая лемма.

Лемма 3.4. *Пусть $g : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ - неособый А-эндоморфизм, $NW(g)$ - неблуждающее множество g. Тогда $NW(g)$ либо совпадает с $\mathbb{T}^1$, либо $NW(g)$ представляет собой объединение множества канторовского типа Σ, конечного (ненулевого) числа изолированных притягивающих периодических орбит и конечное (возможно, нулевого) числа растягивающих изолированных периодических орбит. Кроме того, в последнем случае, Σ является назад g-инвариантным множеством.*

Доказательство. Предположим, что $NW(g) \neq \mathbb{T}^1$. Из [19] следует, что g полусопряжено растягивающимуся линейному отображению E_d, $E_d(t) = dt \bmod 1$, т.е. существует непрерывное отображение $h : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ такое, что $g \circ h = h \circ E_d$. Кроме того, h монотонное отображение [14], тогда для каждой точки $t \in \mathbb{T}^1$, прообразом $h^{-1}(t)$ является либо точка, либо замкнутый сегмент. С случае, когда $NW(g) \neq \mathbb{T}^1$, h не является гомеоморфизмом. Значит, существуют точки $t \in \mathbb{T}^1$, для которых $h^{-1}(t)$ - нетривиальные замкнутые сегменты. Обозначим множество таких точек через χ. Легко проверить, что полученное множество χ является счетным и инвариантным относительно E_d, $E_d(\chi) = E_d^{-1}(\chi) = \chi$ [3], [14]. Тогда $h^{-1}(\chi)$ также будет инвариантным относително g. В результате получаем множество $\Sigma = \mathbb{T}^1 \setminus clos\ (h^{-1}(\chi))$ канторовского типа, состоящее из неблуждающих точек эндоморфизма g. Кроме того, Σ является инвариантным относительно g (в частности, назад g-инвариантным). Из [15] следует, что неблуждающее множество $NW(g)$ состоит из Σ, конечного (ненулевого) числа изолированных притягивающихся периодических орбит и конечного (возможно, нулевого) числа растягивающихся изолированных периодических орбит. $\square$

Непосредственно Теорема 1.3., кроме части, касающейся реализации, следует из Теоремы 1.2. и Леммы 3.4., идея построения примеров аналогична Теореме 2 [2].

$\square$

Список литературы

1. Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., “О классификации одномерных растягивающихся аттракторов.”, *Матем. зам.,*, **86**:3 (2009), 333-341.

2. Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., “О нульмерных соленоидальных базисных множествах”, *Матем. сб.*, **202**:3 (2011), 47-68..

3. Aranson S.Kh., Belitsky G., Zhuzhoma E., “Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces”, *Translations of Math. Monographs, Amer. Math. Soc.*, **153** (1996).

4. Block L., “Diffeomorphisms obtained from endoomorphisms.”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **214** (1975), 403-413.

5. Bothe H., “The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds”, *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69-102.

6. Bothe H., “Transversally wild expanding attractors”, *Math. Nachr.,*, **157** (1992), 25-49.

7. Boju Jiang, Yi Ni, Shicheng Wang., “3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **356** (2004), 43-82.

8. Childress S., Gilbert A., “Stretch, twist and fold: the fast dynamo”, *Lecture Notes in Physics*, **37** (1995).

9. van Danzig D., “Über topologisch homogene Kontinua.”, *Fund. Math.*, **14** (1930), 102-105.

10. Farrell F., Jones L., “107-133”, *Jour. Diff. Geom.*, **15** (1980).

11. Jiming Ma, Bin Yu., “The realization of Smale solenoid type attractors in 3-manifolds.”, *Topology and its Appl.*, **154** (2007), 3021-3031.

12. Jiming Ma, Bin Yu., “Genus two Smale-Williams solenoids in 3-manifolds”, *J. Knot Theory Ramifications*, **20** (2011), 909-926.

13. Jones L., “Locally strange hyperbolic sets”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **275**:1 (1983), 153-162.

14. de Melo W., van Strien S, *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, NY, 1993.

15. Nitecki Z., “203-220”, *Proc. Symp. Pure Math.*, **14** (1970).

16. Przytycki F., "Anosov endomorphisms", *Studia Math.*, **58**:3 (1977), 249-285.

17. Robinson C., *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. Studies in Adv. Math., Sec. edition,*, CRC Press, 1999.

18. Robinson C., Williams R., "Classification of expanding attractors: an example", *Topology*, **15** (1976), 321-323.

19. Shub M., "Endomorphisms of compact differentiable manifolds", *Amer. Journ. Math.*, **91** (1969), 175-199.

20. Smale S., "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747-817.

21. Takens F., "Multiplications in solenoids as hyperbolic attractors", *Topology and Appl.*, **152** (2005), 219-225.

22. Vietoris L., "Über den höheren Zusammenhahg kompakter Räume und Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen.", *Math. Ann.*, **97** (1927), 454-472.

23. Williams R.F., "473-487", *Topology*, **6** (1967).

24. Williams R., "Expanding attractors", *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 169-203.

Solenoidal basic sets of Smale-Vietoris A-diffeomorphisms

© **N. Isaenkova[4], E. Zhuzhoma[5], L. Kuprina[6]**

Abstract. We introduce Smale-Vietoris diffeomorphisms that include the classical DE-mappings with Smale solenoids. The main result is a correspondence between basic sets of axiom A Smale-Vietoris diffeomorphism and the corresponding nonsingular axiom A endomorphism.

Key Words: hyperbolicity, non-wandering set, nonsingular endomorphism, basic set

[4] Associated professor of Chair of mathematics, computer science and information technology, MIA academy of Nizhnii Novgorod; math-ngaa@yandex.ru, nisaenkova@mail.ru

[5] Professor of Chair of Theory of Control and Dynamics of Machines, Lobachevskii State University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

[6] Associated professor of department of higher mathematic, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math-ngaa@yandex.ru.