УДК 517.9

Энергетическая функция для грубых каскадов на поверхностях с нетривиальными одномерными базисными множествами

© В. З. Гринес[1], Т.М. Митрякова[2], О.В. Починка[3]

Аннотация. В настоящей работе устанавливается существование энергетической функции (гладкой функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с неблуждающим множеством системы) у структурно устойчивых сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов поверхностей с нетривиальными одномерными базисными множествами.
Ключевые слова: структурно устойчивая система, нетривиальное базисное множество, энергетическая функция

Формулировка результатов

В настоящей работе рассматриваются грубые сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы f, заданные на двумерном гладком замкнутом ориентируемом многообразии M. Согласно теореме С. Смейла о спектральном разложении [10], множество неблуждающих точек диффеоморфизма f представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся инвариантных множеств $\Omega_f = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_m$, называемых *базисными множествами*, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию. Базисное множество, отличное от периодической траектории, называется *нетривиальным*.

Обозначим через $S(M)$ множество грубых диффеоморфизмов $f : M \to M$, каждое нетривиальное базисное множество которого является одномерным.

Функцией Ляпунова грубого диффеоморфизма f называется непрерывная функция, убывающая вдоль блуждающих траекторий и постоянная на базисных множествах. Гладкая функция Ляпунова называется *энергетической функцией* для f, если множество её критических точек совпадает с неблуждающим множеством Ω_f.

Основным результатом настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 0.1. *Для любого диффеоморфизма $f \in S(M)$ существует энергетическая функция, являющаяся функцией Морса вне нетривиальных базисных множеств.*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м РФФИ и гранта Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

[1] Профессор кафедры численного и функционального анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского; vgrines@yandex.ru

[2] Старший преподаватель кафедры теории функций, ННГУ им. Н.И. Лобачевского; tatiana.mitryakova@yandex.ru

[3] Доцент кафедры теории функций, ННГУ им. Н.И. Лобачевского; olga-pochinka@yandex.ru

1. Динамические свойства диффеоморфизмов класса $S(M)$

Детальную информацию по этому разделу можно найти, например, в статье [2] или в главе 9 книги [3].

Пусть $f \in S(M)$. Напомним, что пара чисел (a,b), где $a = \dim\ W^u_x,\ b = \dim\ W^s_x,\ x \in \Lambda$ называется *типом базисного множества* Λ диффеоморфизма f. Любое нетривиальное базисное множество диффеоморфизма поверхности имеет тип $(1,1)$. При этом, если базисное множество Λ одномерно, то оно является либо аттрактором, либо репеллером[4], равносильно, либо $W^u_\Lambda = \bigcup\limits_{x\in\Lambda} W^u_x = \Lambda$, либо $W^s_\Lambda = \bigcup\limits_{x\in\Lambda} W^s_x = \Lambda$.

Для любой точки $p \in \Lambda$ хотя бы одна из компонент связности множества $W^s_p \backslash p$ $(W^u_p \backslash p)$ имеет непустое пересечение с Λ. Точка $p \in \Lambda$ называется *s-граничной* (*u-граничной*) точкой аттрактора (репеллера) Λ, если одна из компонент связности множества $W^s_p \backslash p$ $(W^u_p \backslash p)$ не пересекается с Λ, обозначим через $\ell^{s\emptyset}_p$ $(\ell^{u\emptyset}_p)$ такую компоненту. Любой аттрактор (репеллер) Λ имеет конечное множество P_Λ s-граничных (u-граничных) точек и является *отделимым* в смысле следующего определения.

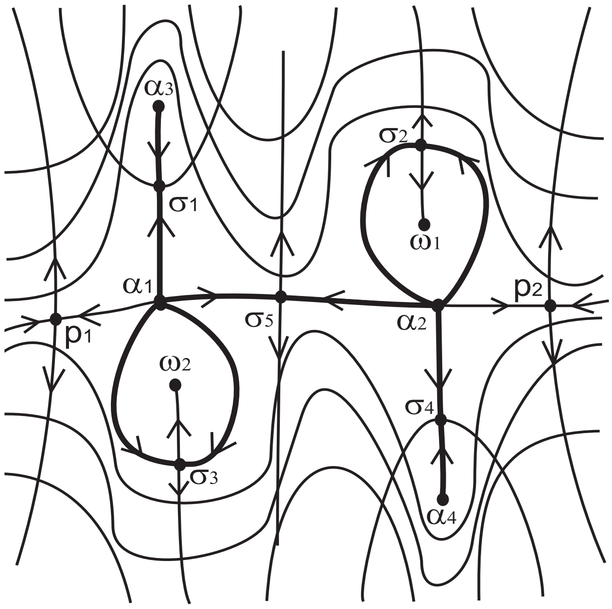

Рис. 1: Отделимый аттрактор

О п р е д е л е н и е 1.1. *Одномерный аттрактор Λ диффеоморфизма f назовем отделимым, если:*

1) $cl\ (W^s_\Lambda) \setminus W^s_\Lambda$ является объединением устойчивых многообразий конечного множества Γ_Λ седловых и источниковых периодических точек из тривиальных базисных множеств диффеоморфизма f;

2) для любой s-граничной точки $p \in P_\Lambda$ имеет место равенство $cl(\ell^{s\emptyset}_p) \setminus \ell^{s\emptyset}_p = p \cup \alpha$, где $\alpha \in \Gamma_\Lambda$ — источниковая точка;

3) для любой седловой точки $\sigma \in \Gamma_\Lambda$ многообразие W^s_σ не пересекается с неустойчивыми многообразиями других седловых периодических точек, а неустойчивая сепаратриса ℓ^u_σ либо не пересекается с W^s_Λ, либо является подмножеством W^s_Λ.

[4] Компактное f-инвариантное множество $A \subset M$ называется *аттрактором* диффеоморфизма f, если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset int\ U_A$ и $A = \bigcap\limits_{k\geq 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется *захватывающей*. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1}.

Аналогично вводится понятие отделимого репеллера.

На рисунке 1 жирным выделен одномерный комплекс $cl\ (W^s_\Lambda) \setminus W^s_\Lambda$ для одномерного аттрактора Λ диффеоморфизма f, заданного на торе $\mathbb{T}^2$. Предполагается, что неблуждающее множество этого диффеоморфизма состоит из одного нетривиального аттрактора Λ, имеющего две s-граничные точки p_1, p_2, и конечного числа неподвижных точек, с асимптотическим поведением сепаратрис седловых точек, указанным на этом рисунке.

Для каждого аттрактора Λ существует множество L_Λ со следующими свойствами:

a) каждая компонента связности множества L_Λ является простой гладкой замкнутой кривой, число которых m_Λ совпадает с числом компонент связности аттрактора Λ и каждая сепаратриса $\ell^{s\emptyset}_p$, $p \in P_\Lambda$ трансверсально пересекает L_Λ в точности в одной точке;

b) $f(L_\Lambda) \cap L_\Lambda = \emptyset$ и кривые множеств L_Λ и $f(L_\Lambda)$ являются границами двумерных попарно не пересекающихся колец $K_1, \ldots, K_{m_\Lambda}$, состоящих из блуждающих точек;

c) поверхность $U_\Lambda = \Lambda \cup \bigcup\limits_{n \geq 1} f^n(K_\Lambda)$, где $K_\Lambda = \bigcup\limits_{b=1}^{m_\Lambda} K_b$ является захватывающей окрестностью аттрактора Λ (см. рисунок 2).

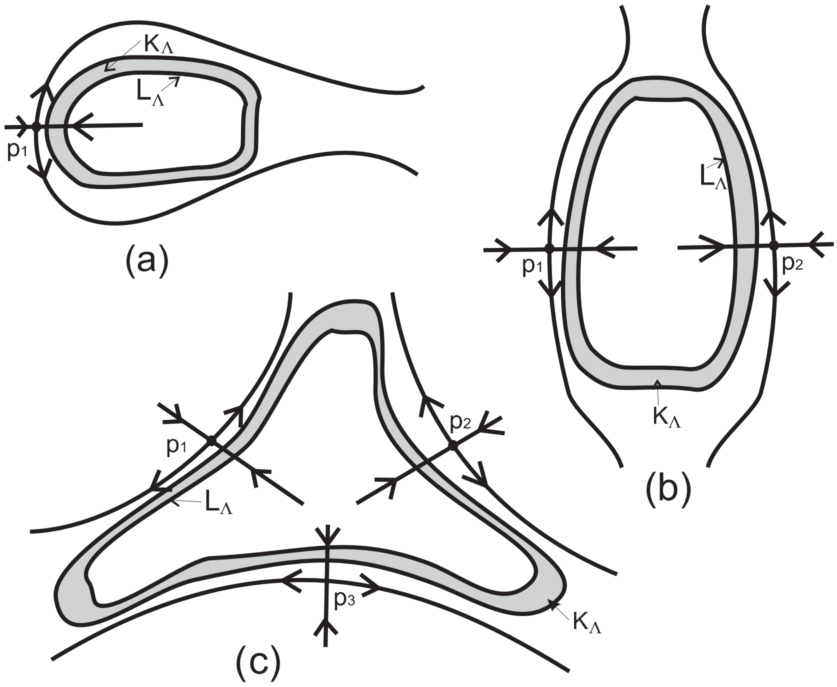

Рис. 2: Построение поверхности U_Λ

2. Энергетическая функция для каскадов Морса-Смейла на поверхностях

Следуя идеям А. М. Ляпунова, К. Конли ввел понятие *функции Ляпунова*, как непрерывной функции, убывающей вдоль траекторий вне цепно реккурентного множества и постоянной на цепных компонентах. Факт существования такой функции у любой динамической системы доказан К. Конли [1] в 1978 году и назван позже *фундаментальной теоремой динамических систем.*

Гладкая функция Ляпунова φ называется *энергетической функцией* для диффеоморфизма f, если множество критических точек функции φ совпадает с цепно рекуррентным множеством R_f.

Первые результаты по построению энергетической функции принадлежат С. Смейлу [9], который в 1961 году доказал существование энергетической функции, являющейся функцией Морса у *градиентно-подобного потока* (потока Морса-Смейла без замкнутых траекторий). К. Мейер [5] в 1968 году обощил этот результат и построил энергетическую функцию, являющуюся функцией Морса-Ботта для потока Морса-Смейла.

В 1977 году Д. Пикстон [8] установил существование энергетической функции, являющейся функцией Морса, для диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхностях. В работе [6] энергетическая функция Морса была построена для диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно реккурентным множеством.

Пусть $f: M \to M$ сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса-Смейла, заданный на ориентируемой замкнутой поверхности M. Пусть Ω_f^q, $q \in \{0,1,2\}$ — подмножество периодических точек r таких, что $\dim\, W_r^u = q$. Пусть U_f^0 (U_f^2) захватывающая окрестность аттрактора Ω_f^0 (репеллера Ω_f^2), каждая компонента связности которой является двумерным диском.

Из конструкции, предложенной в работе [6], в частности вытекает следующий факт.

Предложение 2.1. *Для диффеоморфизма Морса-Смейла $f: M \to M$ существует энергетическая функция Морса $\varphi: M \to [0,2]$ такая, что $\varphi(\Omega_f^0) = 0$, $\varphi(\Omega_f^2) = 2$ и ∂U_f^0, ∂U_f^2 — множества уровня функции φ.*

3. Построение энергетической функции для $f \in S(M)$ (доказательство теоремы 0.1.)

Разобьем построение энергетической функции для $f \in S(M)$ на шаги.

Шаг 1. Обозначим через $A_1, \dots, A_{k_A}$ $(R_1, \dots, R_{k_R})$ нетривиальные одномерные аттракторы (репеллеры) диффеоморфизма f. Пусть $U_{A_1}, \dots, U_{A_{k_A}}$ $(U_{R_1}, \dots, U_{R_{k_R}})$ захватывающие окрестности аттракторов (репеллеров), построенные в разделе 1. с помощью колец $K_{A_1}, \dots, K_{A_{k_A}}$ $(K_{R_1}, \dots, K_{R_{k_R}})$. Положим $A = A_1 \cup \dots \cup A_{k_A}$, $R = R_1 \cup \dots \cup R_{k_R}$, $U_A = U_{A_1} \cup \dots \cup U_{A_{k_A}}$, $U_R = U_{R_1} \cup \dots \cup U_{R_{k_R}}$, $K_A = K_{A_1} \cup \dots \cup K_{A_{k_A}}$, $K_R = K_{R_1} \cup \dots \cup K_{R_{k_R}}$ и $U = U_A \cup U_R$. Обозначим через D дизъюнктное объединение 2-дисков в числе, равном числу компонент связности множества ∂U. Положим $\check{M} = M \setminus U$ и $N = \check{M} \cup_q D$, где $q: \partial U \to \partial D$ — диффеоморфизм. Обозначим через $\pi: \check{M} \cup D \to N$ естественную проекцию.

Шаг 2. По построению N — гладкая поверхность без края, допускающая диффеоморфизм Морса-Смейла $f_N: N \to N$, совпадающий с диффеоморфизмом $\pi f \pi^{-1}$ на множестве $\pi(U)$ и имеющий по одной периодической точке (стоковой или источниковой) на каждой компоненте связности множества $\pi(D)$. В силу предложения 2.1. для диффеоморфизма f_N существует энергетическая функция Морса $\varphi_N: N \to [0,2]$ такая, что $\varphi(\Omega_{f_N}^0) = 0$, $\varphi(\Omega_{f_N}^2) = 2$ и $\pi(\partial U_A)$, $\pi(\partial U_R)$ — множества уровня функции φ_N. Определим на многообразии $\check{M}$ функцию $\varphi_{\check{M}}: \check{M} \to [0,2]$ формулой $\varphi_{\check{M}} = \varphi_N \pi$. Положим $c_A = \varphi_{\check{M}}(\partial U_A)$ и $c_R = \varphi_{\check{M}}(\partial U_R)$.

Шаг 3. Положим $B_A = \bigcup\limits_{z \in \mathbb{Z}} f^n(K_A)$. Пусть b компонента связности множества B_A и A_b — *достижимая изнутри граница множества* b, то есть множество точек $w \in M$, для которых существует путь $c: [0,1] \to M$ такой, что $c(t) \in b$ для $t \in [0,1)$ и $c(1) = w$. Обозначим через $m \in \mathbb{N}$ период b, то есть $f^m(b) = b$ и $f^\mu(b) \neq b$ для натуральных $\mu < m$. Пусть $p \in A_b$ — граничная периодическая точка. Поскольку объединение двумерных колец K_A является фундаментальной областью диффеоморфизма $f|_{B_A}$, то диффеоморфизм $f^m|_b$ гладко сопряжен с гомотетией $g(x,y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$ на $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ посредством некоторого диффеоморфизма $h_b : b \to \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, переводящего кольцо $K_A \cap b$ в кольцо $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\varphi_{\check{M}}(\partial U_A)}{4} \leq x^2+y^2 \leq c_A\}$. Функция $\varphi_g(x,y) = x^2+y^2$ является энергетической функцией диффеоморфизма g. Положим $\varphi_b = \varphi_g h_b$.

Сделав аналогичные построения для каждой компоненты связности множества B_A мы получим набор диффеоморфизмов h_{B_A} и энергетическую функцию φ_{B_A} для диффеоморфизма f_{B_A}.

Положим $B_R = \bigcup\limits_{z\in\mathbb{Z}} f^n(K_R)$. Построим энергетическую функцию φ_{B_R} для диффеоморфизма f_{B_R}, положив $\varphi_{B_R}(z) = 2 - \varphi_{B_{\tilde{A}}}(z),\ z \in B_R$, где $\tilde{A}$ нетривиальный репеллер диффеоморфизма f^{-1}.

Положим $$\tilde{\varphi}(z) = \begin{cases} \varphi_{B_A}(z), \text{ если } z \in \bigcup\limits_{n\geq 1} f^n(K_A); \\ \varphi_{B_R}(z), \text{ если } z \in \bigcup\limits_{n\geq 1} f^{-n}(K_R); \\ \varphi_{\check{M}}, \text{ если } z \in \check{M}; \\ 0, \text{ если } z \in A; \\ 2, \text{ если } z \in R. \end{cases}$$

Шаг 4. По построению функция $\tilde{\varphi} : M \to [0,2]$ является функцией Морса на множестве $M \setminus (A \cup R)$. Покажем, что функция $\tilde{\varphi}$ является непрерывной на M.

Для этого рассмотрим любую точку $a \in A$ и покажем, что $\lim\limits_{z_n \to a} \tilde{\varphi}(z_n) = 0$ для любой последовательности точек $\{z_n \in U_A, n \in \mathbb{N}\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} d(z_n, a) = 0$, где d — метрика на многообразии M (для точек репеллера доказательство аналогичное). Поскольку $\tilde{\varphi}(A) = 0$, то достаточно доказать утверждение для последовательности $\{z_n \in B_A\}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует натуральное число k_n такое, что $z_n \in f^{k_n}(K_A)$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} d(z_n, a) = 0$, то $k_n \to \infty$. Тогда по построению последовательность $\{h_{B_A}(z_n) \in \mathbb{R}^2\}$ сходится к точке $(0,0)$. Откуда $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_g(h_{B_A}(z_n)) = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{z_n\to a} \tilde{\varphi}(z_n) = 0$.

Шаг 5. Покажем, как сгладить функцию $\tilde{\varphi}$ на множестве $A \cup R$, сохранив при этом линии уровня. Проведём модификацию в окрестности аттрактора (в окрестности репеллера построения аналогичные).

Положим $\tilde{\psi}_A = \tilde{\varphi}|_{cl\ U_A} : cl\ U_A \to [0, c_A]$. На отрезке $[0, c_A]$ зададим функцию $\nu : [0, c_A] \to [0, \infty)$ формулой $\nu(s) = inf\{e^{-\frac{1}{d(z,w)}},\ z, w \in cl\ U_A : |\tilde{\psi}(z) - \tilde{\psi}(w)| \geq s\}$. По построению ν — непрерывная функция такая, что $\lim\limits_{s\to+0} \nu(s) = +0$. В силу лемм 1 и 3 работы [7], существует бесконечно гладкая монотонно возрастающая функция $q : [0, c_A] \to [0, c_A]$ такая, что функция $\psi_A = q\tilde{\psi}_A : cl\ U_A \to [0, c_q]$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \frac{|q(x)-q(y)|}{\nu(|x-y|)} = 0$. Непосредственно проверяется, что функция ψ_A является гладкой на A и $d\psi_A(A) = 0$.

Положим $\tilde{\psi}_R = \tilde{\varphi}|_{cl\ U_R} : cl\ U_R \to [c_R, 2]$ и аналогичным образом сгладим функцию $\tilde{\psi}_R$, получив функцию ψ_R такую, что $d\psi_R(R) = 0$.

Искомая функция $\varphi : M \to [0,2]$ определяется формулой
$$\varphi(z) = \begin{cases} \psi_A(z), \text{ если } z \in cl\ \ U_A; \\ \psi_R(z), \text{ если } z \in cl\ U_R; \\ \varphi_{\check{M}}, \text{ если } z \in \check{M}. \end{cases}$$

Список литературы

1. Conley C., *Isolated Invariant Sets and Morse Index*, CBMS Regional Conference Series in Math, 1978.

2. Гринес В.З., “О топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами и репеллерами”, *Математический сборник*, **1**:4 (1997), 57–94.

3. Гринес В.З., Починка О.В., *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Ижевский институт компьютерных исследований, М. - Ижевск, 2011.

4. Косневски Ч., *Начальный курс алгебраической топологии*, М. - Мир, 1983.

5. Meyer K. R., “Energy functions for Morse-Smale systems”, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 1031 – 1040.

6. Митрякова Т.М., Починка О.В., Шишенкова А.Е., “Энергетическая функция для диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством”, *Журнал СВМО*, **14**:1 (2012), 98 – 107.

7. Norton A., Pugh Ch., “Critical sets in the plane”, *Michigan Journal of Math.*, **38** (1991), 441–459.

8. Pixton D., “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.

9. Smale S., “On gradient dynamical systems”, *Ann. Math.*, 1961, 199 – 206.

10. Smale S., “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747 – 817.

Energy function for rough cascades on surfaces with nontrivial one-dimensional basic sets

© V. Z. Grines[5], T. M. Mitryakova[6], O. V. Pochinka[7]

Abstract. In this paper we prove the existence of the energy function, that is, a smooth Lyapunov function, whose the set of critical points is the same as the nonwandering set of the system, for structurally stable orientation preserving diffeomorphisms of surfaces with nontrivial one-dimensional basic sets.

Key Words: structurally stable system, a non-trivial basic set energy function

[5] Professor of Chair of numerical and functional analysis, Lobachevskii State University, Nizhny Novgorod, vgrines@yandex.ru

[6] Assistant Professor of Chair of Theory of Functions, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; tatiana.mitryakova@yandex.ru

[7] Associated Professor of Chair of Theory of Functions, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, olga-pochinka@yandex.ru