УДК 517.95

О разрешимости смешанной задачи для дифференциальных уравнений параболического типа со смешанными максимумами

© **Т. К. Юлдашев**[1], **А. И. Середкина**[2]

Аннотация. В данной работе изучаются вопросы однозначной разрешимости смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных высшего порядка, содержащего смешанные максимумы по времени в нелинейной правой части уравнения.

Ключевые слова: смешанная задача, уравнение высокого порядка, метод разделения переменных, однозначная разрешимость, смешанные максимумы по времени

1. Постановка задачи и сведение её к счетным системам нелинейных интегральных уравнений

В области D рассматривается нелинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - (-1)^m \nu \frac{\partial^{2m+1} u(t,x)}{\partial t\, \partial x^{2m}} + \frac{\partial^{4m} u(t,x)}{\partial x^{4m}} =$$

$$= f\left(t, x, u(t,x), \max\left\{u(\tau,x) | \tau \in \left[\sigma_1(t) \bar{:} \sigma_2(t)\right]\right\}\right) \tag{1.1}$$

с начальными

$$u(t,x)_{|t=0} = \varphi(x) \tag{1.2}$$

и граничными условиями

$$u(t,x)_{|x=0} = u_{x\,x}(t,x)_{|x=0} = \cdots = \frac{\partial^{2(2m-1)}}{\partial\, x^{2(2m-1)}} u(t,x)_{|x=0} =$$

$$= u(t,x)_{|x=l} = u_{x\,x}(t,x)_{|x=l} = \cdots = \frac{\partial^{2(2m-1)}}{\partial\, x^{2(2m-1)}} u(t,x)_{|x=l} = 0, \tag{1.3}$$

где $f(t,x,u,\vartheta) \in C(D \times \mathbb{R}^2)$, $\varphi(x) \in C^{4m+1}(D_l)$, $\varphi(x)_{|x=0} = \varphi''(x)_{|x=0} = \cdots = \varphi^{4m-2}(x)_{|x=0} = \varphi(x)_{|x=l} = \varphi''(x)_{|x=l} = \cdots = \varphi^{4m-2}(x)_{|x=l} = 0$, $\sigma_k = \sigma_k(t) \in C(D_T)$, $k = 1, 2$, $D \equiv D_T \times D_l$, $D_T \equiv [0, T]$, $D_l \equiv [0, l]$, $0 < T < \infty$, $0 < l < \infty$, $0 < m$ – натуральное число, $0 < \nu$ – малый параметр, $[\sigma_1 \bar{:} \sigma_2] = [\min\{\sigma_1, \sigma_2\}, \max\{\sigma_1, \sigma_2\}]$.

Отметим, что качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений с максимумами впервые систематически исследовались в работах [1], [2]. А обыкновенные дифференциальные уравнения со смешанными максимумами были рассмотрены в работах [3-6].

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск; tursunbay@rambler.ru

[2] Магистрант кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск; anytik888@yandex.ru

Исследование решений дифференциальных уравнений со смешанными максимумами требует привлечения ряда новых соображений. В [6], в частности, показано, что дифференциальные уравнения со смешанными максимумами имеют специфические особенности в вопросе постановки задач и их разрешимости.

Пусть функции σ_1 и σ_2 пересекаются в двух точках t_1 и t_2 отрезка D_T : $\sigma_1(t_i) = \sigma_2(t_i)$, $i = 1, 2$, $0 < t_1 < t_2 < T$.

Рассмотрим случай $0 \leq \sigma_1(t) < \sigma_2(t) \leq t_1$ на левом отрезке $D_T^1 \equiv [0, t_1]$, $t_1 \leq \sigma_2(t) < \sigma_1(t) \leq t_2$ на среднем отрезке $D_T^2 \equiv [t_1, t_2]$ и $t_2 \leq \sigma_1(t) < \sigma_2(t) \leq T$ на правом отрезке $D_T^3 \equiv [t_2, T]$, $D_T \equiv D_T^1 \bigcup D_T^2 \bigcup D_T^3$.

Для однозначной разрешимости смешанной задачи (1.1)-(1.3) не хватают дополнительные условия склеивания в точках t_1 и t_2. Смешанную задачу (1.1)-(1.3) будем решать с непрерывными условиями склеивания:

$$u(+t_i, x) = u(-t_i, x), i = 1, 2. \tag{1.4}$$

В данной работе используется метод разделения переменных, основанный на поиске решения смешанной задачи (1.1)-(1.4) в виде ряда Фурье [7]

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\, b_n(x), \tag{1.5}$$

где $b_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \sin \lambda_n x$, $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{l}, n = 1, 2, \ldots$.

Множество $\Big\{a(t) = (a_n(t))\, | a_n(t) \in C\,[0, T]\,,\, n = 1, 2, 3, \ldots\Big\}$ введением нормы

$$\|a(t)\|_{B_2(D_T)} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in D_T} |a_n(t)|^2\right]^{\dfrac{1}{2}}$$

становится банаховым пространством и его обозначают так $B_2(D_T)$.

Для каждого $a(t) \in B_2(T)$ определяется оператор

$$Qa(t) = u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) b_n(x).$$

Через $E_2(D)$ обозначается множество значений этого оператора. Очевидно, что $Q\colon B_2(T) \to E_2(D)$ и $E_2(D) \subset L_2(D)$.

Нетрудно показать, что коэффициенты разложения $a_n(t)$ удовлетворяют следующим счетным системам нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ):

$$a_n(t) = A_{1n}(t; a_n(t)) \equiv \omega_n(t) +$$

$$+ \frac{1}{\rho_n} \int_0^t \int_0^l f\Big(s, y, Qa(s), \max\big\{Qa(\tau) | \tau \in [\sigma_1(s); \sigma_2(s)]\big\}\Big) \times$$

$$\times b_n(y) \cdot e^{-\mu_n(t-s)} dy ds,\ t \in D_T^1,\ \omega_n(t) = \varphi_n\, e^{-\mu_n t}, \tag{1.6}$$

$$a_n(t) = A_{2n}(t; a_n(t)) \equiv A_{1n}(t; a_n(t_1)) e^{-\mu_n(t-t_1)} +$$

$$+\frac{1}{\rho_n}\int\limits_{t_1}^{t}\int\limits_{0}^{l} f\Big(s, y, Qa(s), \max\big\{Qa(\tau)|\tau\in[\sigma_2(s);\sigma_1(s)]\big\}\Big)\times$$

$$\times b_n(y)\cdot e^{-\mu_n(t-s)}dyds,\ t\in D_T^2, \tag{1.7}$$

$$a_n(t)=A_{3n}(t;a_n(t))\equiv A_{2n}(t;a_n(t_2))e^{-\mu_n(t-t_2)}+$$

$$+\frac{1}{\rho_n}\int\limits_{t_2}^{t}\int\limits_{0}^{l} f\Big(s, y, Qa(s), \max\big\{Qa(\tau)|\tau\in[\sigma_1(s);\sigma_2(s)]\big\}\Big)\times$$

$$\times b_n(y)\cdot e^{-\mu_n(t-s)}dyds,\ t\in D_T^3,\ \mu_n=\frac{\lambda_n^{4m}}{\rho_n},\ \rho_n=1+\lambda_n^{2m}\nu. \tag{1.8}$$

Действительно, подстановка ряда (1.5) в уравнение (1.1) дает

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(t)\,b_n(x)-(-1)^m\nu\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(t)\,b_n^{(2m)}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\,b_n^{(4m)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)\,b_n(x), \tag{1.9}$$

где $F_n(t)=\int\limits_0^l f\Big(t, y, Qa(t), \max\big\{Qa(\tau)|\tau\in[\sigma_1(t)\bar{;}\sigma_2(t)]\big\}\Big)\,b_n(y)dy$.

Учитывая, что $(-1)^m b_n^{(2m)}(x)=-\lambda_n^{2m}\,b_n(x),\ b_n^{(4m)}(x)=\lambda_n^{4m}\,b_n(x)$, из соотношения (1.9) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big(1+\lambda_n^{2m}\nu\big)a_n'(t)\,b_n(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{4m}a_n(t)\,b_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)\,b_n(x). \tag{1.10}$$

Так как функции $b_n(x)$ ортонормированны в $L_2(D_l)$, то из (1.10) следует

$$\big(1+\lambda_n^{2m}\nu\big)a_n'(t)+\lambda_n^{4m}a_n(t)=$$

$$=\int\limits_0^l f\Big(t, y, Qa(t), \max\big\{Qa(\tau)|\tau\in[\sigma_1(t)\bar{;}\sigma_2(t)]\big\}\Big)\,b_n(y)dy. \tag{1.11}$$

Решая счетную систему нелинейных дифференциальных уравнений (1.11) при следующих условиях

$$a_n(0)=\varphi_n,\ a_n(+t_i)=a_n(-t_i),\ i=1,2,$$

где $\varphi_n=\int\limits_0^l\varphi(y)b_n(y)dy$, получаем ССНИУ (1.6) - (1.8).

2. Однозначная разрешимость ССНИУ со смешанными максимумами

Сначала будем изучать однозначную разрешимость ССНИУ (1.6).

Л е м м а 2.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. $\int\limits_0^{t_1} \|f\,(t,x,Qw(t),Qw(t))\|_{L_2(D_l)}\,dt \le \Delta_1 < \infty$ *;*

2. $f\,(t,x,u,\vartheta) \in Lip\Big\{L_1(t,x)_{|\,u,\vartheta}\Big\}$, $0 < \int\limits_0^{t} \|L_1(t,x)\|_{L_2(D_l)}ds < \infty$ *;*

3. $\|\varphi\|_{l_2} < \infty$ *.*

Тогда ССНИУ (1.6) *имеет единственное решение в пространстве* $B_2(D_T^1)$ *. Кроме того, имеет место оценка*

$$\left\|a(t) - a^k(t)\right\|_{B_2(D_T^1)} \le$$

$$\le \frac{\chi_1}{(k-1)!}\left[\int\limits_0^t \left\|L(s,x)\right\|_{L_2(D_l)} ds\right]^{k-1} \exp\left\{\chi_2\int\limits_0^t \left\|L(s,x)\right\|_{L_2(D_l)} ds\right\}, \qquad (2.1)$$

где $L(s,x) = 2L_1(s,x)$ *,* χ_1 *,* χ_2 *– некоторые положительные постоянные.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем метод последовательных приближений:

$$\begin{cases} a_n^0(t) = w_n(t), \\ a_n^{k+1}(t) = A_{1n}\Big(t; a_n^k(t)\Big), \; k = 0,1,2,3,\ldots,\; t \in D_T^1. \end{cases} \qquad (2.2)$$

В силу условий леммы для первой разности $a_n^1(t) - a_n^0(t)$ из (2.2) получим

$$\left\|a^1(t) - a^0(t)\right\|_{B_2(D_T^1)} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_n}\int\limits_0^t\int\limits_0^l \Big|f_0\Big|\cdot|b_n(y)|dyds \le$$

$$\le M_1M_2\int\limits_0^t\int\limits_0^l \Big|f_0\Big|dyds \le M_1M_2\sqrt{l}\Delta_1, \qquad (2.3)$$

где $f_k \equiv f\Big(t,y,Qa^k(t), \max\big\{Qa^k(\tau)|\tau \in [\sigma_1(t);\sigma_2(t)]\big\}\Big)$, $k = 0,1,2,3,\ldots$,
$M_1 = \left\|\frac{1}{\rho}\right\|_{l_2}$, $M_2 = \|b(x)\|_{B_2(l)}$.

Для второй разности $a_n^2(t) - a_n^1(t)$ из (2.2) имеем

$$\left\|a^2(t) - a^1(t)\right\|_{B_2(D_T^1)} \le M_1M_2\int\limits_0^t\int\limits_0^l \Big|f_1 - f_0\Big|dyds.$$

Так как в силу второго условия леммы

$$\Big|f\Big((t,x,Qa^1(t), \max\big\{Qa^1(\tau)|\tau \in [\sigma_1;\sigma_2]\big\}\Big) -$$

$$-f\Big((t,x,Qa^0(t), \max\big\{Qa^0(\tau)|\tau \in [\sigma_1;\sigma_2]\big\}\Big)\Big| \le L_1(t,x)\Big[\Big|Qa^1(t) - Qa^0(t)\Big| +$$

$$+\Big|\max\big\{Qa^1(\tau)|\tau \in [\sigma_1;\sigma_2]\big\} - \max\big\{Qa^0(\tau)|\tau \in [\sigma_1;\sigma_2]\big\}\Big|\Big],$$

то из последнего неравенства с учетом (2.3) получим следующую оценку

$$\left\|a^2(t) - a^1(t)\right\|_{B_2(D_T^1)} \le M_1M_2\int\limits_0^t\int\limits_0^l L(s,y)\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_i^1(s) - a_i^0(s)\right|\cdot|b_i(y)|dyds \le$$

$$\leq M_1 M_2^2 \int\limits_0^t \int\limits_0^l L(s,y) \left\| a^1(s) - a^0(s) \right\|_{B_2(D_T^1)} dyds \leq$$

$$\leq \left(M_1 \sqrt{l} \right)^2 M_2^3 \Delta_1 \int\limits_0^t \left\| L(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} ds, \ t \in D_T^1, \tag{2.4}$$

где $L(t,x) = 2L_1(t,x)$.

Продолжая этот процесс для произвольного натурального числа $k \geq 2$, из (2.4) по индукции получим

$$\left\| a^{k+1}(t) - a^k(t) \right\|_{B_2(D_T^1)} \leq \left(M_1 \sqrt{l} \right)^{k+1} M_2^{2k+1} \Delta_1 \frac{\left[\int\limits_0^t \left\| L(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} ds \right]^k}{k!}. \tag{2.5}$$

Далее, в силу (2.5) имеем

$$\left\| a(t) - a^k(t) \right\|_{B_2(D_T^1)} \leq M_1 M_2^2 \int\limits_0^t \int\limits_0^l L(s,y) \left\| a(s) - a^{k-1}(s) \right\|_{B_2(D_T^1)} dyds \leq$$

$$\leq M_1 M_2^2 \int\limits_0^t \int\limits_0^l L(s,y) \left\| a(s) - a^k(s) \right\|_{B_2(D_T^1)} dyds +$$

$$+ M_1 M_2^2 \int\limits_0^t \int\limits_0^l L(s,y) \left\| a^k(s) - a^{k-1}(s) \right\|_{B_2(D_T^1)} dyds \leq$$

$$\leq \left(M_1 \sqrt{l} \right)^k M_2^{2k} \Delta_1 \frac{\left[\int\limits_0^t \left\| L(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} ds \right]^{k-1}}{(k-1)!} +$$

$$+ M_1 M_2^2 \sqrt{l} \int\limits_0^t \left\| L(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} \left\| a(s) - a^k(s) \right\|_{B_2(D_T^1)} ds. \tag{2.6}$$

Применяя к (2.6) неравенство типа Гронуолла-Беллмана, получим (2.1).

Существование решения ССНИУ (1.6) следует из оценки (2.5), так как при $k \to \infty$ последовательность функций $\{a^k(t)\}$ сходится равномерно по t к функции $a(t) \in B_2(D_T^1)$. Покажем единственность этого решения в пространстве $B_2(D_T^1)$. Пусть ССНИУ (1.6) имеет два решения: $a(t) \in B_2(D_T^1)$ и $\vartheta(t) \in B_2(D_T^1)$. Тогда для их разности справедлива оценка

$$\| a(t) - \vartheta(t) \|_{B_2(D_T^1)} \leq M_1 M_2^2 \sqrt{l} \int\limits_0^t \left\| L(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} \| a(s) - \vartheta(s) \|_{B_2(D_T^1)} ds. \tag{2.7}$$

Применение к (2.7) неравенства Гронуолла-Беллмана, дает, что $\| a(t) - \vartheta(t) \|_{B_2(D_T^1)} \equiv 0$ для всех $t \in D_T^1$. Отсюда следует единственность решения ССНИУ (1.6) в пространстве $B_2(D_T^1)$.

Доказательство закончено.

Изучим однозначную разрешимость ССНИУ (1.7).

Л е м м а 2.2. *Пусть выполняются условия леммы 2.1. и*

1. $\int\limits_{t_1}^{t_2} \|f(t,x,u,\vartheta)\|_{L_2(D_l)}\,dt \le \Delta_2 < \infty$ *;*

2. $f(t,x,u,\vartheta) \in Lip\Big\{L_2(t,x)_{|\,u,\vartheta}\Big\}$, $0 < \int\limits_{t_1}^{t} \|L_2(t,x)\|_{L_2(D_l)} ds < \infty$ *;*

3. $q_1 < 1,\ q_1 = M_1 M_2^2 \sqrt{l}\left(\int\limits_0^{t_1} \Big\|L(s,x)\Big\|_{L_2(D_l)} ds + \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big\|\overline{L}(s,x)\Big\|_{L_2(D_l)} ds\right)$,

$L(t,x) = 2L_1(t,x)$, $\overline{L}(t,x) = 2L_2(t,x)$.

Тогда ССНИУ (1.7) *имеет единственное решение в пространстве* $B_2(D_T^2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем метод последовательных приближений. Итерационный процесс Пикара определим следующим образом:

$$\begin{cases} a_n^0(t) = w_n(t),\ t \in D_T^2 \\ a_n^{k+1}(t) = A_{2n}\Big(t; a_n^k(t)\Big),\ k = 0,1,2,3,\dots,\ t \in D_T^2. \end{cases} \tag{2.8}$$

В силу условий леммы для первой разности $a_n^1(t) - a_n^0(t)$ из (2.8) имеем

$$\big\|a^1(t) - a^0(t)\big\|_{B_2(D_T^2)} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_n} \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{l} \Big|f_{01}\Big| \cdot |b_n(y)| dy ds + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_n} \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^{l} \Big|f_{02}\Big| \cdot |b_n(y)| dy ds \le$$

$$\le M_1 M_2 \left(\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{l} \Big|f_{01}\Big| dy ds + \int\limits_{t_1}^{t}\int\limits_0^{l} \Big|f_{02}\Big| dy ds\right) \le M_1 M_2 \sqrt{l}\big(\Delta_1 + \Delta_2\big), \tag{2.9}$$

где $f_{k1} \equiv f\Big(t, y, Qa^k(t), \max\big\{Qa^k(\tau) | \tau \in [\sigma_1(t); \sigma_2(t)]\big\}\Big)$, $k = 0,1,2,3,\dots,$

$f_{k2} \equiv f\Big(t, y, Qa^k(t), \max\big\{Qa^k(\tau) | \tau \in [\sigma_2(t); \sigma_1(t)]\big\}\Big)$, $k = 0,1,2,3,\dots$.

Для разности $a_n^{k+1}(t) - a_n^k(t)$ имеем

$$\big\|a^{k+1}(t) - a^k(t)\big\|_{B_2(D_T^2)} \le M_1 M_2 \left(\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{l} \Big|f_{k1} - f_{(k-1)1}\Big| dy ds + \int\limits_{t_1}^{t}\int\limits_0^{l} \Big|f_{k2} - f_{(k-1)2}\Big| dy ds\right).$$

Так как в силу второго условия леммы

$$\Big| f\Big((t, x, Qa^k(t), \max\big\{Qa^k(\tau) | \tau \in [\sigma_2; \sigma_1]\big\}\Big) -$$

$$- f\Big((t, x, Qa^{k-1}(t), \max\big\{Qa^{k-1}(\tau) | \tau \in [\sigma_2; \sigma_1]\big\}\Big)\Big| \le L_2(t,x)\Big[\big|Qa^k(t) - Qa^{k-1}(t)\big| +$$

$$+ \big| \max\big\{Qa^k(\tau) | \tau \in [\sigma_2; \sigma_1]\big\} - \max\big\{Qa^{k-1}(\tau) | \tau \in [\sigma_2; \sigma_1]\big\}\big|\Big],$$

то из последнего неравенства получим следующую оценку

$$\big\|a^{k+1}(t) - a^k(t)\big\|_{B_2(D_T^2)} \le M_1 M_2 \Big[\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{l} L(s,y) \sum_{i=1}^{\infty} \Big|a_i^k(s) - a_i^{k-1}(s)\Big| \cdot |b_i(y)| dy ds +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t}\int\limits_0^{l} \overline{L}(s,y) \sum_{i=1}^{\infty} \Big|a_i^k(s) - a_i^{k-1}(s)\Big| \cdot |b_i(y)| dy ds\Big] \le$$

$$\leq M_1 M_2^2 \sqrt{l} \Big\{ \int\limits_0^{t_1} \Big\| L(s,x) \Big\|_{L_2(D_l)} \big\| a^k(s) - a^{k-1}(s) \big\|_{B_2(D_T^1)} ds +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \Big\| \overline{L}(s,x) \Big\|_{L_2(D_l)} \big\| a^k(s) - a^{k-1}(s) \big\|_{B_2(D_T^2)} ds \Big\} \leq q_1 \big\| a^k(t) - a^{k-1}(t) \big\|_{B_2(D_T^2)}, \ t \in D_T^2. \quad (2.10)$$

В силу последнего условия леммы из оценок (2.9) и (2.10) следует, что оператор в правой части (2.8) является сжимающим. Следовательно, ССНИУ (1.7) имеет единственное решение в пространстве $B_2(D_T^2)$.

Доказательство закончено.

Изучим однозначную разрешимость ССНИУ (1.8).

Лемма 2.3. *Пусть выполняются условия леммы 2.2. и*

1. $\int\limits_{t_2}^{T} \| f(t,x,u,\vartheta) \|_{L_2(D_l)} dt \leq \Delta_3 < \infty$;

2. $f(t,x,u,\vartheta) \in Lip\Big\{ L_3(t,x)_{|\,u,\vartheta} \Big\}$, $0 < \int\limits_{t_2}^{t} \| L_3(t,x) \|_{L_2(D_l)} ds < \infty$;

3. $q_2 < 1$, $q_2 = q_1 + M_1 M_2^2 \sqrt{l} \int\limits_{t_2}^{T} \Big\| \overline{\overline{L}}(s,x) \Big\|_{L_2(D_l)} ds$, $\overline{\overline{L}}(t,x) = 2L_3(t,x)$.

Тогда ССНИУ (1.8) *имеет единственное решение в пространстве* $B_2(D_T^3)$.

Доказательство. Используем метод последовательных приближений. Итерационный процесс Пикара определим следующим образом:

$$\begin{cases} a_n^0(t) = w_n(t), \ t \in D_T^3 \\ a_n^{k+1}(t) = A_{3n}\Big(t; a_n^k(t)\Big), \ k = 0,1,2,3,\ldots, \ t \in D_T^3. \end{cases} \quad (2.11)$$

В силу условий леммы в пространстве $B_2(D_T^3)$ для первой разности $a_n^1(t) - a_n^0(t)$ из (2.11) имеем

$$\big\| a^1(t) - a^0(t) \big\|_{B_2(D_T^3)} \leq M_1 M_2 \left(\int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^{l} \Big| f_{01} \Big| dy ds + \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_0^{l} \Big| f_{02} \Big| dy ds \right) +$$

$$+ M_1 M_2 \int\limits_{t_2}^{t} \int\limits_0^{l} \Big| f_{03} \Big| dy ds \leq M_1 M_2 \sqrt{l} \big(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \big), \quad (2.12)$$

где $f_{k3} \equiv f\Big(t, y, Qa^k(t), \max\big\{ Qa^k(\tau) | \tau \in [\sigma_1(t); \sigma_2(t)] \big\}\Big)$, $k = 0,1,2,3,\ldots$.

Для произвольной разности $a_n^{k+1}(t) - a_n^k(t)$ в пространстве $B_2(D_T^3)$ имеем

$$\big\| a^{k+1}(t) - a^k(t) \big\|_{B_2(D_T^3)} \leq \Big\| A_{2n}\Big(t; a_n^k(t_2)\Big) - A_{2n}\Big(t; a_n^{k-1}(t_2)\Big) \Big\|_{B_2(D_T^2)} +$$

$$+ M_1 M_2 \int\limits_{t_2}^{t} \int\limits_0^{l} \Big| f_{k3} - f_{(k-1)3} \Big| dy ds \leq$$

$$\leq q_1 + M_1 M_2^2 \sqrt{l} \int\limits_{t_2}^{t} \Big\| \overline{\overline{L}}(s,x) \Big\|_{L_2(D_l)} \big\| a^k(s) - a^{k-1}(s) \big\|_{B_2(D_T^3)} ds \leq$$

$$\leq q_2 \left\| a^k(t) - a^{k-1}(t) \right\|_{B_2(D_T^3)}, \; t \in D_T^3. \tag{2.13}$$

В силу последнего условия леммы из оценок (2.12) и (2.13) следует, что оператор в правой части (2.11) является сжимающим. Следовательно, ССНИУ (1.8) имеет единственное решение в пространстве $B_2(D_T^3)$.

Доказательство закончено.

Из доказанных трех лемм следует, что справедлива следующая

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия леммы 2.3. Тогда счетная система нелинейных дифференциальных уравнений* (1.11) *при условиях*

$$a_n(0) = \varphi_n, \; a_n(+t_i) = a_n(-t_i), \; i = 1, 2$$

имеет единственное непрерывное решение, которое на отрезке представимо в виде

$$a_n(t) = \begin{cases} A_{1n}\Big(t; a_n(t)\Big), \; t \in D_T^1; \\ A_{2n}\Big(t; a_n(t)\Big), \; t \in D_T^2; \\ A_{3n}\Big(t; a_n(t)\Big), \; t \in D_T^3. \end{cases} \tag{2.14}$$

3. Однозначная разрешимость смешанной задачи (1.1)- (1.4)

Подставляя ССНИУ (2.14) в ряд (1.5), получим формальное решение смешанной задачи (1.1)- (1.4).

Теорема 3.1. *Пусть выполняются условия теоремы 2.1. Если* $a(t) \in B_2(D_T)$ *является решением ССНИУ* (2.14), *то ряд* (1.5) *является решением смешанной задачи* (1.1)- (1.4).

Доказательство. Пусть $a(t) \in B_2(D_T)$ решение ССНИУ (2.14). Мы покажем, что в области D справедливо соотношение

$$\lim_{k\to\infty} u^k(t,x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k(t)\, b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\, b_n(x) = u(t,x) \in E_2(D),$$

где $a_n(t)$ определяется из (2.14), $b_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \sin \lambda_n x$, $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{l}, n = 1, 2, \ldots$.

Действительно, в силу условий теоремы получим

$$\left| u(t,x) - u^k(t,x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n(t) - a_n^k(t) \right| \cdot \left| b_n(x) \right| \leq$$

$$\leq \left\| a(t) - a^k(t) \right\|_{B_2(D_T)} \cdot \left\| b_n(x) \right\|_{B_2(l)} < \frac{\varepsilon}{M_2} \cdot M_2 = \varepsilon.$$

Доказательство закончено.

Список литературы

1. Петухов В. Р., “Вопросы качественного исследования решений уравнений с максимумами”, *Известия вузов. Математика*, 1964, № 3, 116–119.

2. Магомедов А. Р., *Обыкновенные дифференциальные уравнения с максимумами*, Элм, Баку, 1991, 220 с.

3. Юлдашев Т. К., “Функционально-дифференциальные уравнения с одноточечными смещениями максимума”, *Труды средневолжского мат. общества*, **8**:1 (2006), 377–383.

4. Юлдашев Т. К., “Краевая задача для системы функционально-дифференциальных уравнений с одноточечными нелинейными интегральными смешанными максимумами”, *Сб. научн. трудов: «Прикладная математика и механика»*, 2007, 279–285.

5. Юлдашев Т. К., “Краевая задача с нелинейными трехточечными смешанными максимумами”, *Вестник СибГАУ*, 2007, № 2, 22–24.

6. Юлдашев Т. К., “Предельная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений с двухточечными смешанными максимумами”, *Вестник СамГТУ. Серия «Физико-математические науки»*, **16**:1 (2008), 15–22.

7. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка”, *Журнал средневолжского мат. общества*, **14**:2 (2012), 137–142.

On solvability of mixed value problem for differential equations of parabolic type with mixed maxima

© T. K. Yuldashev[3], A. I. Seredkina[4]

Abstract. In this article it is studied the questions of single-valued solvability of mixed value problem for nonlinear partial differential equation of higher order, consisting mixed time maxima in nonlinear right-hand side.

Key Words: mixed value problem, partial equation of higher order, method of separation variable, single-valued solvability, mixed time maxima

[3] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk; tursunbay@rambler.ru

[4] Graduate Student of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk; anytik888@yandex.ru