УДК 517.988.67

Комментарии к задачам о возмущениях линейного уравнения малым линейным слагаемым и спектральных характеристик фредгольмова оператора

© А. А. Кяшкин[1], Б. В. Логинов[2], П. А. Шаманаев[3]

Аннотация. В монографии [1] и статье [2] исследована задача о возмущении линейного уравнения малым линейным слагаемым вида $(B-\varepsilon A)x=h$ с фредгольмовым, плотно заданным на D_B оператором $B:E_1\supset D_B\to E_2$, $D_A\supset D_B$, или $A\in L\{E_1,E_2\}$, $\varepsilon\in\mathbb{C}^1$ - малый параметр, E_1, E_2 - банаховы пространства. Применение результатов [3, 4], сформулированных в виде леммы о биортогональности обобщенных жордановых цепочек позволяет дать уточнение результатов, полученных в [1, 2]. Эта задача рассмотрена здесь также в общем случае достаточно гладкой (аналитической) по ε оператор-функции $A(\varepsilon)$. Дано также приложение леммы о биортогональности и уравнения разветвления в корневом подпространстве к задаче о возмущении фредгольмовых точек в C-спектре оператора $A(0)$.

Ключевые слова: линейные операторы в банаховых пространствах, теория возмущений

1. Введение

Пусть $B:E_1\to E_2$ - плотно заданный фредгольмов оператор, $D_A\supset D_B$, или, для простоты изложения, $A\in L\{E_1,E_2\}$, $N(B)=span\{\varphi_1^{(1)},\ldots,\varphi_n^{(1)}\}\in E_1$, $N^*(B)= =span\{\psi_1^{(1)},\ldots,\psi_n^{(1)}\}\in E_2^*$ - соответствующие подпространство нулей и дефектных функционалов, $\{\gamma_k^{(1)}\}_1^n\in E_1^*$ и $\{z_s^{(1)}\}_1^n\in E_2$ - соответствующие биортогональные системы, т. е. $\langle\varphi_i^{(1)},\gamma_k^{(1)}\rangle=\delta_{ik}$, $\langle z_s^{(1)},\psi_l^{(1)}\rangle=\delta_{sl}$. Эти условия порождают проекторы $P=\sum\limits_{i=1}^{n}\langle\cdot,\gamma_i\rangle\varphi_i$ и $Q=\sum\limits_{k=1}^{n}\langle\cdot,\gamma_k\rangle z_k$ и соответствующие им разложения банаховых пространств E_1 и E_2 в прямые суммы $E_1=E_1^n\dot{+}E_1^{\infty-n}$, $E_1^n=N(B)$, $E_2=E_{2,n}\dot{+}E_{2,\infty-n}$, $E_1^n=PE_1$, $E_1^{\infty-n}=(I-P)E_1$, $E_{2,n}=QE_2$, $E_{2,\infty-n}=(I-Q)E_2$. Всюду далее использована терминология и обозначения [1].

Определение 1.1. [1-4]. *Элементы $\{\varphi_i^{(s)}\}_{i=\overline{1,n},\,s=\overline{1,p_i}}$ образуют полный канонический жорданов набор (ОЖН) аналитической (достаточно гладкой) по ε оператор-функции $B-A(\varepsilon)$, $A(\varepsilon)=\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon^kA_k$, если*

$$\begin{aligned}
&B\varphi_k^{(s)}=\sum_{j=1}^{s-1}A_j\varphi_k^{(s-j)},\ \langle\varphi_k^{(s)},\gamma_l^{(1)}\rangle=0,\ s=\overline{2,p_k},\\
&D_p=det\left[\langle\sum_{j=1}^{p_k}A_j\varphi_k^{(p_k+1-j)},\psi_l^{(1)}\rangle\right]\neq0,\ k,\,l=\overline{1,n}.
\end{aligned}\tag{1.1}$$

[1] Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; andrej_kjashkin@list.ru.

[2] Профессор кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; loginov@ulstu.ru

[3] Заведующий кафедрой прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; korspa@yandex.ru.

Этот ОЖН биканонический, если ОЖН сопряженной оператор-функции $B^* - A^*(\varepsilon)$, *отвечающий элементам* $\{\psi_j^{(1)}\}_1^n$, *также канонический; и триканонический, если более того:*

$$\begin{gathered}\langle\varphi_i^{(k)}, \gamma_k^{(l)}\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl},\ \langle z_i^{(j)}, \psi_k^{(l)}\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}, \\ \gamma_k^{(l)} = \sum_{s=1}^{p_k+1-l} A_s^*\psi_k^{(p_k+2-l-s)},\ z_k^{(l)} = \sum_{s=1}^{p_k+1-l} A_s\varphi_k^{(p_k+2-l-s)}.\end{gathered} \tag{1.2}$$

З а м е ч а н и е 1.1. *При* $A(\varepsilon) = \varepsilon A$ *подпространства* $N(B)$ *и* $N^*(B)$ *могут быть всегда выбраны так, чтобы соответствующие им элементы* A *- и* A^* *-жордановых наборов оператор-функций* $B - \varepsilon A$ *и* $B^* - \varepsilon A^*$ *были триканоническими, т.е. удовлетворяли условиям биортогональности*

$$\begin{gathered}\langle\varphi_i^{(j)}, \gamma_k^{(l)}\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl},\ \langle z_i^{(j)}, \psi_k^{(l)}\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl},\ j(l) = \overline{1, p_i(p_k)}, \\ \gamma_k^{(l)} = A^*\psi_k^{(p_k+1-l)},\ z_i^{(j)} = A\varphi_i^{(p_i+1-j)},\ i, k = \overline{1, n}.\end{gathered} \tag{1.3}$$

В п.2 на основе соотношения биортогональности (1.3) приведены комментарии к задаче ([1] §31)

$$Bx = \varepsilon Ax + h, \quad dim\, N(B) \geq 1 \tag{1.4}$$

Приведен пример с конечномерными операторами B и A. П. 3 содержит обобщение на аналитическую зависимость от ε $A(\varepsilon)$, $A(\varepsilon) = 0$. Указано приложение к задачам с возмущенной границей. В п. 4 рассмотрено приложение УРК к задаче о возмущении спектра вида $A(\varepsilon)y = C(\lambda_0 + \mu)y$, где λ_0 - фредгольмова точка C-спектра оператора $A_0 = A(0)$, т. е. $B = A_0 - \lambda C$ - фредгольмов оператор.

2. Комментарии к задаче (1.4) при $n \geqslant 1$

Вводя регуляризатор Шмидта $\widetilde{B} = B + \sum\limits_{k=1}^{n}\langle\cdot, \gamma_k^{(1)}\rangle z_k^{(1)}$, запишем (1.4) в виде системы

$$\widetilde{B}x = \varepsilon Ax + h + \sum_{i=1}^{n}\xi_i z_i^{(1)}, \quad \xi_k = \langle x, \gamma_k^{(1)}\rangle, \tag{2.1}$$

откуда по лемме Шмидта следует $x = (I - \varepsilon\Gamma A)^{-1}\varphi_i^{(1)}$. Подстановка x во второе уравнение системы (2.1) дает аналог уравнения разветвления - разрешающую систему

$$\xi_k = \langle(I - \varepsilon A\Gamma)^{-1}h, \psi_k^{(1)}\rangle + \sum_{i=1}^{n}\xi_i\langle(I - \varepsilon\Gamma A)^{-1}\varphi_i^{(1)}, \gamma_k^{(1)}\rangle.$$

Согласно определению ОЖЦ (1.1),(1.3) $\varphi_i^{(j)} = (\Gamma A)^{j-1}\varphi_j^{(1)}$, $j = 1, 2, \ldots$, $i = \overline{1, n}$, где $\langle\varphi_i^{(j)}, \gamma_k^{(l)}\rangle = \delta_{jk}$, если j делится на p_i и $\langle\varphi_i^{(j)}, \gamma_k\rangle = 0$ - в противном случае, т. е. $\varphi_i^{(j)} = \varphi_i^{\left(j - p_i\left[\frac{j}{p_i}\right]\right)}$, $\varphi_i^{(0)} = \varphi_i^{(p_i)}$, и разрешающая система для определения ξ_k, $k = \overline{1, n}$, принимает вид

$$\begin{gathered}-\xi_k\frac{\varepsilon^{p_k}}{1 - \varepsilon^{p_k}} = \langle(I - \varepsilon A\Gamma)^{-1}h, \psi_k^{(1)}\rangle = \langle h, \psi_k^{(1)}\rangle + \sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l\langle(A\Gamma)^{l-1}h, \varphi_k^{(1)}\rangle = \\ = \langle h, \psi_k^{(1)}\rangle + \sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l\langle h, (\Gamma^* A^*)^{l-1}\psi_k^{(1)}\rangle.\end{gathered}$$

В последней сумме согласно определению ОЖЦ сопряженной оператор-функции $B^* - \varepsilon A^*$, $(\Gamma^* A^*)^{l-1}\psi_k^{(1)} = \psi_k^{(l)} = \psi_k^{\left(l-p_k\left[\frac{l}{p_k}\right]\right)}$, $\psi_k^{(0)} = \psi_k^{(p_k)}$.

Таким образом, при учете определения ОЖЦ сопряженной оператор-функции получаем разрешающую систему в виде

$$-\xi_k \frac{\varepsilon^{p_k}}{1-\varepsilon^{p_k}} = \left[\langle h, \psi_k^{(1)}\rangle + \varepsilon\langle h, \psi_k^{(2)}\rangle + \ldots + \varepsilon^{p_k-1}\langle h, \psi_k^{(p_k)}\rangle\right] \frac{1}{1-\varepsilon^{p_k}}, \quad k = \overline{1, n},$$

откуда следует

$$\xi_k = -\frac{1}{\varepsilon^{p_k}} \sum_{s=1}^{p_k} \varepsilon^{s-1}\langle h, \psi_k^{(s)}\rangle, \quad k = \overline{1, n} \tag{2.2}$$

Тем самым доказано утверждение.

Т е о р е м а 2.1. *Решение уравнения* (1.4) *аналитично по* ε, *если для всех* k $\langle h, \psi_k^{(s)}\rangle = 0$, $s = \overline{1, p_k}$, *и имеет полюс порядка не выше* $\max\limits_k p_k$ *в противном случае.*

Действительно, пусть q_k есть номер первого ненулевого члена в множестве слагаемых $\langle h, \psi_k^{(1)}\rangle, \langle h, \psi_k^{(2)}\rangle, \ldots, \langle h, \psi_k^{(p_k)}\rangle$. Тогда ξ_k имеет полюс порядка $p_k - q_k + 1$, а решение уравнения (1.4) - полюс порядка $\max\limits_k (p_k - q_k + 1)$. Если все $\langle h, \psi_k^{(s)}\rangle = 0$, $s = \overline{1, p_k}$, $k = \overline{1, n}$, то решение уравнения (1.4) аналитично по ε.

П р и м е р 2.1. $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N(B) = \{\bar{e_1} = (1\,0\,0\,0)$, $\bar{e_2} = (0\,1\,0\,0)\}$, $N^*(B) = \{\bar{e_3} = (0\,0\,1\,0),\ \bar{e_4} = (0\,0\,0\,1)\}$.

Такой выбор базиса приводит к неполному ОЖН, когда определитель полноты D_p равен нулю, но ОЖЦ обрываются. Осуществляя перестройку ОЖН согласно [1, 3], приходим к базисным элементам ОЖН следующего вида

$$\begin{array}{llll}
\varphi_1^{(1)} = e_1, & \varphi_2^{(1)} = e_2, & \varphi_2^{(2)} = -e_1 + e_4, & \varphi_2^{(3)} = -e_3, \\
A\varphi_1^{(1)} = z_1^{(1)} = e_1 + e_3, & A\varphi_2^{(1)} = z_2^{(3)} = e_2, & A\varphi_2^{(2)} = z_2^{(2)} = -e_1, & A\varphi_2^{(3)} = z_2^{(1)} = -e_4, \\
\psi_1^{(1)} = e_3, & \psi_2^{(1)} = -e_4, & \psi_2^{(2)} = -e_1 + e_3, & \psi_2^{(3)} = e_2, \\
A^*\psi_1^{(1)} = \gamma_1^{(1)} = e_1 + e_4, & A^*\psi_2^{(1)} = \gamma_2^{(3)} = -e_3, & A^*\psi_2^{(2)} = \gamma_2^{(2)} = e_4, & A^*\psi_2^{(3)} = \gamma_2^{(1)} = e_2,
\end{array}$$

удовлетворяющим условиям биортогональности $\langle \varphi_i^{(k)}, \gamma_j^{(l)}\rangle = \delta_{ij}\delta_{kl}$, $\langle z_i^{(k)}, \psi_j^{(l)}\rangle = \delta_{ij}\delta_{kl}$. Разрешающая система определяет ξ_1 и ξ_2 в виде

$$\xi_1 = -\frac{1}{\varepsilon}\langle h, \psi_1^{(1)}\rangle, \quad \xi_2 = -\frac{1}{\varepsilon^3}\left[\langle h, \psi_2^{(1)}\rangle + \varepsilon\langle h, \psi_2^{(2)}\rangle + \varepsilon^2\langle h, \psi_2^{(3)}\rangle\right].$$

З а м е ч а н и е 2.1. *Решение задачи* (1.4) *в каждом отдельном случае теоремы 2.1. ищется методом неопределенных коэффициентов* [1].

З а м е ч а н и е 2.2. *В работе* [5] *теорема 2.1. доказана с помощью техники уравнений разветвления в корневых подпространствах.*

3. Уравнение (1.4) с аналитическим оператором $A(\varepsilon)$

Л е м м а 3.1. [5, 6]. *Соотношения* (1.2), (1.3) *определяют проекторы*

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\gamma_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(j)} = \langle\cdot,\gamma\rangle\Phi : E_1 \to E_1^K = K(B,A),$$
$$\boldsymbol{Q} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle z_i^{(j)} = \langle\cdot,\psi\rangle z : E_2 \to E_{2,K} = span\,\{z_i^{(j)}\},$$

где $\Phi = (\varphi_1^{(1)},...,\varphi_1^{(p_1)},...,\varphi_n^{(1)},...,\varphi_n^{(p_n)})$, *векторы* γ, φ *и* z *определяются аналогично, порождающие разложения пространств* E_1, E_2 *в прямые суммы* $E_1 = E_1^K \dot{+} E_1^{\infty-K}$, $E_2 = E_{2,K} \dot{+} E_{2,\infty-K}$. *Здесь* $E_1^K = span\{\varphi_1^{(1)},...,\varphi_n^{(p_n)}\}$, $E_{2,K} = span\{z_1^{(1)},...,z_n^{(p_n)}\}$, $K = \sum\limits_{s=1}^{n} p_s$ *- размерность корневого подпространства* E_1^K. *При этом справедливы соотношения сплетения*

$$\begin{array}{l} B\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}B \text{ на } D_B,\ A\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}A \text{ на } D_A,\\ B\Phi = \mathcal{A}_B z,\ A\Phi = \mathcal{A}_A z,\ A^*\psi = \mathcal{A}_A\gamma, \end{array} \tag{3.1}$$

где $\mathcal{A}_B$ *и* $\mathcal{A}_A$ *- клеточно-диагональные матрицы* $\mathcal{A}_B = (B_1,...,B_n)$ *и* $\mathcal{A}_A = (A_1,...,A_n)$ *с* $p_i \times p_i$ *-клетками* $B_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, $A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Операторы A *и* B, *действуют в инвариантных парах подпространств* E_1^K, $E_{2,K}$ *и* $E_1^{\infty-K}$, E_2 *и* $B : D_B \cap E_1^{\infty-K} \to E_{2,\infty-K}$ *и* $A : E_1^K \to E_{2,K}$, *являются изоморфизмами.*

Введение регуляризатора Э.Шмидта [1] позволяет записать уравнение $(B - A(\varepsilon))\,x = h$ в виде системы

$$\widetilde{B}x = h + A(\varepsilon)x + \sum_{i=1}^{n}\xi_{i1}z_i^{(1)}, \quad \xi_{s\sigma} = \langle x,\gamma_s^{(\sigma)}\rangle, \quad s = \overline{1,n},\ \sigma = \overline{1,p_s}, \tag{3.2}$$

решение которой ищется в виде $x = w + \xi\cdot\Phi = w + v$, $v \in E_1^K$. Тогда

$$\widetilde{B}x = \widetilde{B}w + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=2}^{p_j}\xi_{jk}B\varphi_j^{(k)} = h + A(\varepsilon)w + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{p_j}\xi_{jl}A(\varepsilon)\varphi_j^{(l)}. \tag{3.3}$$

Согласно (1.1) при $k \geqslant 2$ $B\varphi_j^{(k)} = \sum\limits_{r=1}^{k-1}A_r\varphi_j^{(k-r)} = z_j^{(p_j+2-k)}$, $\sum\limits_{k=2}^{p_j}\xi_{jk}B\varphi_j^{(k)} = \sum\limits_{k=2}^{p_j}\xi_{jk}z_j^{(p_j+2-k)} = \xi_{j2}z_j^{(p_j)} + \xi_{j3}z_j^{(p_j-1)} + \ldots + \xi_{jp_j}z_j^{(2)}$ и т. к. $\Gamma z_j^{(p_j)} = \varphi_j^{(2)}$, $\Gamma z_j^{(p_j-1)} = \varphi_j^{(3)}$, ..., $\Gamma z_j^{(2)} = \varphi_j^{(p_j)}$, $\Gamma z_j^{(1)} = \varphi_j^{(1)}$; $\varphi_j^{(p_j+1)} = \varphi_j^{(1)}$, $z_j^{(p_j+1)} = z_j^{(1)}$, получаем, обращая в (3.3) оператор $\widetilde{B}$

$$w = (I - \Gamma A(\varepsilon))^{-1}\Gamma h - \sum_{j=1}^{n}(I - \Gamma A(\varepsilon))^{-1}(\xi_{j2}\varphi_j^{(2)} + \xi_{j3}\varphi_j^{(3)} + \ldots + \xi_{jp_j}\varphi_j^{(p_j)}) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{p_j}\xi_{jl}(I - \Gamma A(\varepsilon))^{-1}\Gamma A(\varepsilon)\varphi_{jl}.$$

Поскольку $(I-\Gamma A(\varepsilon))^{-1}\Gamma A(\varepsilon) = \Gamma A(\varepsilon)(I-\Gamma A(\varepsilon))^{-1}$, $(I-\Gamma A(\varepsilon))^{-1} = I + \Gamma A(\varepsilon)(I-$ $-\Gamma A(\varepsilon))^{-1}$ и $-\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=2}^{p_j}\xi_{jk}(I-\Gamma A(\varepsilon))^{-1}\varphi_j^{(k)}+\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{p_j}\xi_{jl}\Gamma A(\varepsilon)(I-\Gamma A(\varepsilon))^{-1}\varphi_j^{(l)} = -\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=2}^{p_j}\xi_{jk}\varphi_j^{(k)}-$ $-\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=2}^{p_j}\xi_{jk}\Gamma A(\varepsilon)(I-\Gamma A(\varepsilon))^{-1}\varphi_j^{(k)} + \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{p_j}\xi_{jl}\Gamma A(\varepsilon)(I-\Gamma A(\varepsilon))^{-1}\varphi^{(l)} = -\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=2}^{p_j}\xi_{jk}\varphi_j^{(k)} +$ $+\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_{j1}\Gamma A(\varepsilon)(I-\Gamma A(\varepsilon))^{-1}\varphi_j^{(1)}$, то выражение для w преобразуется к виду

$$w = \Gamma(I-A(\varepsilon)\Gamma)^{-1}h - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=2}^{p_j}\xi_{jk}\varphi_j^{(k)} + \sum_{j=1}^{n}\xi_{j1}\Gamma A(\varepsilon)(I-\Gamma A(\varepsilon))^{-1}\varphi_j^{(1)}. \tag{3.4}$$

Так как $\Gamma^*\gamma_j^{(1)} = \psi_j^{(1)}$ и $\Gamma^*\gamma_j^{(s)} = \psi_j^{(p_j+2-s)}$ при $s \geqslant 2$, подстановка $x = v + w$ во второе уравнение системы (3.2) дает

$$-\langle w, \gamma_s^{(\sigma)}\rangle = 0,\ \sigma = \overline{1,p_s},\ s = \overline{1,n}\ \Rightarrow$$

$$-\langle (I-A(\varepsilon)\Gamma)^{-1}h, \psi_s^{(1)}\rangle - \sum_{j=1}^{n}\xi_{j1}\langle A(\varepsilon)(I-\Gamma A(\varepsilon))^{-1}\varphi_j^{(1)}, \psi_s^{(1)}\rangle = 0 \text{ при } \sigma = 1,$$
$$\xi_{s\sigma} = \langle (I-A(\varepsilon)\Gamma)^{-1}h, \psi_s^{(1)}\rangle + \sum_{j=1}^{n}\xi_{j1}\langle A(\varepsilon)(I-\Gamma A(\varepsilon))^{-1}\varphi_j^{(1)}, \psi_s^{(p_j+2-\sigma)}\rangle \text{ при } \sigma > 1,$$

или, учитывая, что $A^*(\varepsilon)(I-\Gamma^*A^*(\varepsilon))^{-1} = (I-A^*(\varepsilon)\Gamma^*)^{-1}A^*(\varepsilon)$

$$\begin{gathered}\langle h, (I-\Gamma^*A^*(\varepsilon))^{-1}\psi_s^{(1)}\rangle + \sum_{j=1}^{n}\xi_{j1}\langle\varphi_j^{(1)}, (I-\Gamma^*A^*(\varepsilon))^{-1}A^*(\varepsilon)\psi_s^{(1)}\rangle = 0,\\ \xi_{s\sigma} = \langle h, (I-\Gamma^*A^*(\varepsilon))^{-1}\psi_s^{(1)}\rangle + \\ +\sum_{j=1}^{n}\xi_{j1}\langle\varphi_j^{(1)}, (\varepsilon)(I-\Gamma^*A^*(\varepsilon))^{-1}A^*(\varepsilon)\psi_s^{(p_j+2-\sigma)}\rangle, \quad \sigma = \overline{2,p_s},\ s = \overline{1,n}.\end{gathered} \tag{3.5}$$

Замечание 3.1. *Считая $A^*(\varepsilon)$, $A(0) = 0$ агрегатом, не учитывающим зависимость от ε, т.е. вводя ОЖЦ сопряженного оператора для оператор-функции $B^* - \mu A^*(\varepsilon)$, приходим к заключению теоремы 2.1.. Более тонкая структура решения может быть получена при исследовании системы* (3.5) *при конкретной зависимости от ε оператора $A(\varepsilon)$.*

Пример 3.1. *В качестве применения укажем уравнение Пуассона $\Delta u = h$ с граничными условиями Неймана $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$ в области эллипса $\Omega = \left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\}$. Осуществляя отображение области эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (при $a - b < \varepsilon$ $a = b$) на круг $T(x,y) = \left(\frac{b}{\mu}x, y\right) = (\xi, \eta)$, получаем задачу вида* (1.4) *с аналитическим оператором $A(\varepsilon)$. Оператор B - оператор Лапласа в круге с граничным условием Неймана.*

4. Применение уравнения разветвления в корневом подпространстве при возмущении спектра

Для семейства операторов $A(\varepsilon): E_1 \to E_2$, $A(0) = A_0$, зависящих от малого параметра $\varepsilon \in \mathbb{C}^1$ рассматривается обобщенная задача на собственные значения $A(\varepsilon)y = \lambda C y$,

$C : L(E_1 \to E_2)$, λ_0 - n-кратная фредгольмова точка спектра оператора A_0, т. е. $A_0 - \lambda_0 C$ - Ф-оператор. Ставится задача определения собственных чисел $\lambda = \lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \mu(\varepsilon)$ оператор-функции $A(\varepsilon) - \lambda(\varepsilon)C$, ответвившихся от собственного значения λ_0 и собственных элементов, им соответствующих, на основе применения уравнений разветвления в корневых подпространствах.

Поставленная задача сводится к уравнению $By = H(\varepsilon)y + \mu Cy$, $B = A_0 - \lambda_0 C$, $H(\varepsilon) = A_0 - A(\varepsilon)$, в предположении $N(B) = \{\varphi_i\}_1^n$, $N^*(B) = \{\psi_j\}_1^n$. Согласно [1, 4], C-жорданов набор, отвечающий $N(B)$ всегда можно считать триканоническим, т. е. $B\varphi_k^{(s)} = C\varphi_k^{(s-1)}$, $B^*\psi_k^{(s)} = C^*\psi_k^{(s-1)}$, $s = \overline{2, p_k}$, $k = \overline{1, n}$ со свойствами (1.2), т. е.

$$\langle \varphi_i^{(j)}, \gamma_k^{(l)} \rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}, \quad \langle z_i^{(j)}, \psi_k^{(l)} \rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}, \quad \gamma_k^{(l)} = C^*\psi_k^{(p_k+1-l)}, \quad z_k^{(l)} = C\varphi_k^{(p_k+1-l)}.$$

Вводя регуляризатор Шмидта $\widetilde{B}$, $\widetilde{B}^{-1} = \Gamma$, запишем эквивалентную поставленной задаче систему

$$\widetilde{B}y = H(\varepsilon)y + \mu Cy + \sum_{i=1}^{n} \xi_{i1} z_i^{(1)}, \quad \xi_{s\sigma} = \langle y, \gamma_s^{(\sigma)} \rangle. \tag{4.1}$$

Полагая $y = w + v$, $v = \xi \cdot \Phi \in E_1^K$, находим $\widetilde{B}w + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_i} \xi_{ij} B\varphi_i^{(j)} - \mu Cw - H(\varepsilon)w = \mu\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \xi_{ij} C\varphi_i^{(j)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \xi_{ij} H(\varepsilon)\varphi_i^{(j)}$, и обращая оператор $\widetilde{B}$ с учетом соотношений $C\varphi_i^{(j)} = z_i^{(p_i+1-j)}$, $\Gamma z_k^{(p_i+1-s)} = \varphi_k^{(s+1)}$, получаем $(I - \mu\Gamma C - \Gamma H(\varepsilon))w = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_i} \xi_{ij}\Gamma C\varphi_i^{(j-1)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \xi_{ij}(\mu\Gamma C + \Gamma H(\varepsilon))\varphi_i^{(j)} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_i} \xi_{ij}\varphi_i^{(j)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \xi_{ij}\Gamma(\mu C + H(\varepsilon))\varphi_i^{(j)} \Rightarrow$
$w = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_i} \xi_{ij}[I - \Gamma(\mu C + H(\varepsilon))]^{-1}\varphi_i^{(j)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \xi_{ij}[I - \Gamma(\mu C + H(\varepsilon))]^{-1}\Gamma(\mu C + H(\varepsilon))\varphi_i^{(j)} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_i} \xi_{ij}\varphi_i^{(j)} - \Gamma\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_i} \xi_{ij}[I - (\mu C + H(\varepsilon))\Gamma]^{-1}(\mu C + H(\varepsilon))\varphi_i^{(j)} + \Gamma\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \xi_{ij}[I - (\mu C + H(\varepsilon))\Gamma]^{-1}(\mu C + H(\varepsilon))\varphi_i^{(j)} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_i} \xi_{ij}\varphi_i^{(j)} + \Gamma\sum_{i=1}^{n} \xi_{i1}[I - \mu C + H(\varepsilon)\Gamma]^{-1}(\mu C + H(\varepsilon))\varphi_i^{(j)}$.

Подставляя найденное w во второе уравнение системы (4.1) и учитывая равенства $\Gamma^*\gamma_s^{(1)} = \psi_s^{(1)}$, $\Gamma^*\gamma_s^{(\sigma)} = \psi_s^{(p_s+2-\sigma)}$, $\sigma \geqslant 2$, приходим к уравнению разветвления в корневом подпространстве (УРК)

$$\begin{aligned}
&-\langle w, \gamma_s^{(\sigma)} \rangle = 0, \ \sigma = \overline{1, p_s}, \ s = \overline{1, n} \Rightarrow \\
&-\sum_{i=1}^{n} \xi_{i1}\langle [I - (\mu C + H(\varepsilon))\Gamma]^{-1}(\mu C + H(\varepsilon))\varphi_i^{(j)}, \psi_s^{(1)} \rangle = 0, \\
&\xi_s^{(2)} - \sum_{i=1}^{n} \xi_{i1}\langle [I - (\mu C + H(\varepsilon))\Gamma]^{-1}(\mu C + H(\varepsilon))\varphi_i^{(1)}, \psi_s^{(p_s)} \rangle = 0, \\
&\xi_s^{(3)} - \sum_{i=1}^{n} \xi_{i1}\langle [I - (\mu C + H(\varepsilon))\Gamma]^{-1}(\mu C + H(\varepsilon))\varphi_i^{(1)}, \psi_s^{(p_s-1)} \rangle = 0, \\
&\ldots \\
&\xi_s^{(p_s)} - \sum_{i=1}^{n} \xi_{i1}\langle [I - (\mu C + H(\varepsilon))\Gamma]^{-1}(\mu C + H(\varepsilon))\varphi_i^{(1)}, \psi_s^{(2)} \rangle = 0, \quad s = \overline{1, n}.
\end{aligned}$$

Выделяя главные члены по степеням μ при использовании формул $C\varphi_i^{(j)} = z_i^{(p_i+1-j)}$, $\Gamma z_k^{(p_k+1-s)} = \varphi_k^{(s+1)}$, получаем разложение $[I - (\mu C + H(\varepsilon))\Gamma]^{-1}(\mu C + H(\varepsilon))\varphi_i^{(1)} = [\mu C + \mu^2 C\Gamma C + \mu^3 (C\Gamma)^2 C + \ldots + \mu^{p_i-1}(C\Gamma)^{p_i-2}C + \mu^{p_i}(C\Gamma)^{p_i-1}C + \mu^{p_i+1}(C\Gamma)^{p_i}C + \mu^{p_i+2}(C\Gamma)^{p_i+1}C +$

$+\ldots]\varphi_i^{(1)}+H(\varepsilon)[I-\Gamma(\mu C+H(\varepsilon))]^{-1}\varphi_i^{(1)}=\dfrac{1}{1-\mu^{p_i}}[\mu z_i^{(p_i)}+\mu^2 z_i^{(p_i-1)}+\ldots+\mu^k z_i^{(p_i-k+1)}+\ldots+$ $+\mu^{p_i}z_i^{(1)}]+H(\varepsilon)[I-\Gamma(\mu C+H(\varepsilon))]^{-1}\varphi_i^{(1)}$. УРК принимает вид

$$\begin{aligned}
&-\frac{\mu^{p_s}}{1-\mu^{p_s}}\xi_{s1}-\sum_{i=1}^{n}\xi_{i1}\langle H(\varepsilon)[I-\Gamma(\mu C+H(\varepsilon))]^{-1}\varphi_i^{(1)},\psi_s^{(1)}\rangle=0,\\
&\xi_s^{(2)}-\frac{\mu}{1-\mu^{p_s}}\xi_{s1}-\sum_{i=1}^{n}\xi_{i1}\langle H(\varepsilon)[I-\Gamma(\mu C+H(\varepsilon))]^{-1}\varphi_i^{(1)},\psi_s^{(p_s)}\rangle=0,\\
&\xi_s^{(3)}-\frac{\mu^2}{1-\mu^{p_s}}\xi_{s1}-\sum_{i=1}^{n}\xi_{i1}\langle H(\varepsilon)[I-\Gamma(\mu C+H(\varepsilon))]^{-1}\varphi_i^{(1)},\psi_s^{(p_s-1)}\rangle=0,\\
&\ldots\\
&\xi_s^{(p_s)}-\frac{\mu^{p_s-1}}{1-\mu^{p_s}}\xi_{s1}-\sum_{i=1}^{n}\xi_{i1}\langle H(\varepsilon)[I-\Gamma(\mu C+H(\varepsilon))]^{-1}\varphi_i^{(1)},\psi_s^{(2)}\rangle=0.
\end{aligned}\tag{4.2}$$

Подобно [1] УРК (4.2) определяет асимптотику разветвляющихся решений на основе метода диаграммы Ньютона.

Замечание 4.1. *Данная работа написана с целью исследования устойчивости разветвляющихся решений* [6]. *Укажем здесь недавно опубликованные обзоры результатов* [8-10] *по теории ветвления решений нелинейных уравнений, полученные в школе профессора В. А. Треногина.*

Полученные результаты поддержаны ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"(соглашение 14.B37.21.0373).

Список литературы

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А., *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, Наука, М., 1964, Engl. transl. Wolter Noordorf, Leyden, 1974.

2. Треногин В. А., “Возмущение линейного уравнения малым линейным слагаемым”, *ДАН СССР*, **140**:2 (1961), 311-313.

3. Русак Ю. Б., *Обобщенная жорданова структура в теории ветвления*, кандидатская диссертация, Ташкент. Инст. математики им. В. М. Романовского АН Узб. ССР, 1979, 126 с.

4. Логинов Б. В., Русак Ю. Б., “Обобщенная жорданова структура в теории ветвления”, *Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными*, сб. н. работ, ред. М. С. Салахитдинов, Фан, Ташкент, 1978, 133-148.

5. Karasözen B., Konopleva I., Loginov B., “Hereditary symmetry of resolving systems in nonlinear equations with Fredholm operators”, *Nonlinear Analysis and Applications: To V. Lakshmikantham on his 80-th Birthday*, **2**, eds. Ravi P. Agarwal, Donal O’Regan, Kluver Acad. publ., Dordrectit, 2003, 617-644.

6. Loginov B. V., Rousak Yu. B., “Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions”, *Nonlinear Analysis: TMA*, **17**:3 (1991), 219-232.

7. Loginov B. V., “Branching equation in the root subspace”, *Nonlinear Analysis: TMA*, **32**:3 (1998), 439-448.

8. Логинов Б. В., “Ветвление решений нелинейных уравнений и групповая симметрия”, *Вестник Самарского гос. ун-та*, 1998, № 4(10), 15-70.

9. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M., *Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications*, MIA, **550**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.

10. *Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения*, Коллективная монография, ред. В. А. Треногин, А. Ф. Филипов, Физматлит, М., 2003.

Comments to the problems of small perturbations of linear equations and linear term of the spectral characteristics of a Fredholm operator

© A. A. Kyashkin[4], B. V. Loginov[5], P. A. Shamanaev[6]

Abstract. In the monograph [1] and the article [2] the problem on perturbation of linear equation by small linear summand of the form $(B - \varepsilon A)x = h$ were investigated with closely defined on D_B Fredholmian operator $B : E_1 \supset D_B \to E_2$, $D_A \supset D_B$, or $A \in L\{E_1, E_2\}$, $\varepsilon \in \mathbb{C}^1$ - small parameter, E_1 and E_2 - are Banach spaces. The application of the results [3, 4] formulated in the form of the lemma on the biorthogonality of generalized Jordan chains allows to give some retainings of the results [1, 2]. This problem is considered here in the general case of sufficiently smooth (analytic) by ε operator-function $A(\varepsilon)$. It is given also the application of the biorthogonality lemma and branching equation in the root subspaces to the problem on perturbation of Fredholm points in C-spectrum of the operator $A(0)$.

Key Words: linear operators in Banach spaces, perturbation theory

[4] Graduate student of chair of an applied mathematics, Mordovian State University of a name of N. P. Ogarev, Saransk; andrej_kjashkin@list.ru.

[5] Professor department of Mathematics, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; loginov@ulstu.ru

[6] Head of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; korspa@yandex.ru.