УДК 517.938.5

Реализация градиентно-подобных диффеоморфизмов на поверхностях посредством автоморфизмов трехцветных графов

© С. Х. Капкаева[1]

Аннотация. Данная статья является продолжением работ [5], [4], в которых найдены условия топологической сопряженности градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей. В настоящей работе решена проблема реализации, то есть в каждом классе топологически сопряженных градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхности построен стандартный представитель

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса-Смейла, градиентно-подобный диффеоморфизм, топологически сопряженные диффеоморфизмы, трехцветный граф, реализация диффеоморфизмов

1. Основные понятия и формулировка результатов

Целью нашей работы является решение проблемы реализации градиентно-подобных диффеоморфизмов, заданных на двумерных поверхностях, то есть в каждом классе топологически сопряженных градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхности строится стандартный представитель.

Решение задачи реализации является частью топологической классификации диффеоморфизмов из рассматриваемого класса, где под топологической классификацией понимается решение следующих задач:

1. нахождение топологических инвариантов диффеоморфизмов из заданного класса;

2. доказательство полноты множества найденных инвариантов, то есть доказательство того, что совпадение множеств топологических инвариантов является необходимым и достаточным условием топологической сопряженности диффеоморфизмов из рассматриваемого класса;

3. реализация, то есть построение по заданному множеству топологических инвариантов стандартного представителя.

В работах [5], [4] были решены первая и вторая задачи, данная работа посвящена решению третьей задачи.

Пусть $f : M^2 \to M^2$ — диффеоморфизм Морса-Смейла[2]. Неблуждающее множество диффеоморфизма f представим в виде $\Omega_f = \bigcup\limits_{i=0}^{2} \Omega_f^i$, где Ω_f^i — множество периодических точек диффеоморфизма f, *индекс Морса* (размерность неустойчивого многообразия W_p^u) которых равен i ($i = 0, 1, 2$). Точки с индексом Морса 2 называются *источниками*, точки с индексом Морса 0 называются *стоками*, точки с индексом Морса 1 — *седлами.*

[1] Магистрантка кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; kapkaevasvetlana@yandex.ru

[2] Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$, заданный на гладком замкнутом n-многообразии M^n называется диффеоморфизмом *Морса-Смейла*, если:

1) неблуждающее множество Ω_f гиперболично и конечно (то есть состоит из конечного числа периодических точек, для которых модули собственных значений матрицы Якоби не равны единице);

2) для любых периодических точек p, q устойчивое многообразие W_p^s и неустойчивое многообразие W_q^u либо не пересекаются, либо трансверсальны в каждой точке пересечения.

Если для различных седловых периодических точек p, q диффеоморфизма f пересечение $W^s_p \cap W^u_q$ непусто, то оно является бесконечным множеством. При этом, если $dim\, W^s_p + dim\, W^u_q = n$, то каждая точка, принадлежащая $W^s_p \cap W^u_q$, называется *гетероклинической точкой*, а если $dim\, W^s_p + dim\, W^u_q > n$, то каждая компонента связности $W^s_p \cap W^u_q$ называется *гетероклинической компонентой*. Диффеоморфизм Морса-Смейла называется *градиентно-подобным*, если он не имеет гетероклинических точек.

В настоящей работе рассматривается класс G сохраняющих ориентацию градиентно-подобных диффеоморфизмов, заданных на поверхности M^2. Заметим, что в этом случае условие градиентно-подобности эквивалентно тому, что пересечение $W^s_p \cap W^u_q$ является пустым, для различных седловых точек p, q.

Пусть $f \in G$. Везде далее мы будем предполагать, что f имеет хотя бы одну седловую точку[3].

Удалим из поверхности M^2 замыкание объединения устойчивых и неустойчивых многообразий всех седловых точек диффеоморфизма f и обозначим получившееся множество через $\tilde{M}$, то есть $\tilde{M} = M^2 \setminus (W^u_{\Omega^0_f} \cup W^u_{\Omega^1_f} \cup W^s_{\Omega^1_f} \cup W^s_{\Omega^1_f})$.

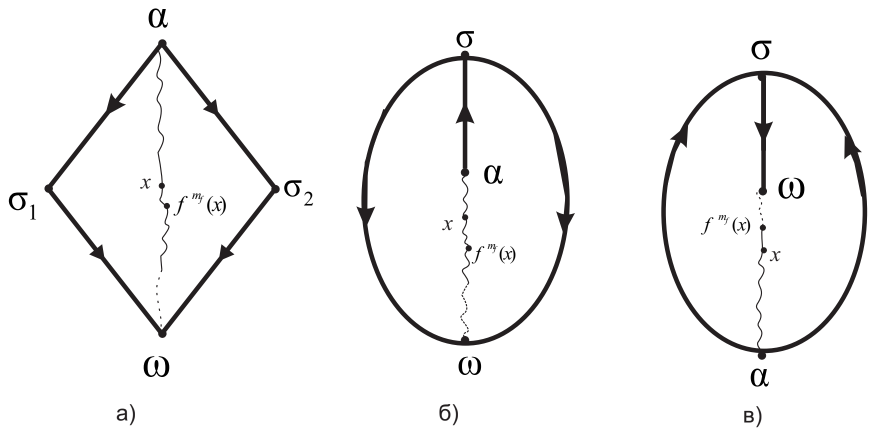


Рисунок **1.1**

Виды ячеек

Тогда множество $\tilde{M}$ представляется в виде объединения областей (*ячеек*), гомеоморфных открытому двумерному диску, граница каждой из которых имеет один из видов, изображенных жирными линиями на рисунке 1.1 и содержит в точности один источник, один сток, одну или две седловые точки и некоторые из их сепаратрис[4]

Пусть A — любая ячейка из множества $\tilde{M}$, α и ω — источник и сток, входящие в ее границу. Простую кривую $\tau \subset A$, граничными точками которой являются источник α и сток ω, будем называть t*-кривой* (см. рисунок 1.1). Обозначим через $\mathcal{T}$ множество, являющееся f-инвариантным и состоящее из t-кривых, взятых по одной из каждой ячейки. Способ построения такого множества приведен в разделе 2. (см. предложение 2.1.).

Любую компоненту связности множества $M_\Delta = \tilde{M} \setminus \mathcal{T}$ назовем *треугольной областью*. Обозначим через Δ_f множество всех треугольных областей диффеоморфизма f. В границу каждой треугольной области $\delta \in \Delta_f$ входят три периодические точки: источник α,

[3] Если диффеоморфизм Морса-Смейла $f : M^n \to M^n$ не имеет седловых точек, то его неблуждающее множество состоит из одного источника и одного стока. Все диффеоморфизмы "источник-сток" топологически сопряжены и доказательство этого факта, например, приведено в книге [3] (Теорема 2.2.1).

[4] Этот факт доказывается аналогично соответствующему результату для грубых потоков на поверхностях (см., например, [1]).

седло σ, сток ω, а также устойчивая сепаратриса l_σ^s (будем называть ее s*-кривой*) с граничными точками α и σ, неустойчивая сепаратриса l_σ^u (будем называть ее u*-кривой*) с граничными точками ω и σ и кривая τ (t-кривая) с граничными точками α и ω. *Стороной* треугольной области назовем замыкание одной из s, u или t компонент связности границы. Будем говорить, что две треугольные области, *имеют общую сторону*, если эта сторона принадлежит замыканиям обеих областей. *Периодом треугольной области* δ называется наименьшее натуральное число $k \in \mathbb{N}$, такое что $f^k(\delta) = \delta$.

Для того, чтобы ввести комбинаторный топологический инвариант диффеоморфизма $f \in G$, напомним следующие определения.

Конечным графом называется упорядоченная пара (V, E), для которой выполнены следующие условия: V — непустое конечное множество *вершин*; E — множество пар вершин, называемых *рёбрами*.

Если граф содержит ребро $e = (a, b)$, то каждую из вершин a, b — называют *инцидентной* ребру e и говорят, что вершины a и b соединены ребром $e = (a, b)$.

Путем в графе называют конечную последовательность вершин и ребер $a_0, e_0, a_1, \cdots, a_{i-1}, e_{i-1}, a_i, \cdots a_{n-1}, e_{n-1}, a_n$ (где $n \geq 1$), в которой вершины a_{i-1} и a_i соединены ребром e_{i-1}, $i \in \overline{1;n}$. *Длиной пути* называется число входящих в него ребер.

Граф называют *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём.

Циклом называют путь, в котором вершина a_0 совпадает с вершиной a_n. *Простым циклом* называют цикл, у котого нет повторяющихся вершин, кроме a_0 и a_n.

Определение 1.1. *Граф T называется трехцветным графом, если:*

1) множество ребер графа T является объединением трех подмножеств, каждое из которых состоит из ребер одного и того же определенного цвета (цвета ребер из разных подмножеств не совпадают, будем обозначать эти цвета буквами s, t, u, а ребра для краткости будем называть s-, t-, u- ребрами);

2) каждая вершина графа T инцидентна в точности трем ребрам различных цветов;

3) граф не содержит циклов длины один.

Простой цикл трехцветного графа T назовем *двухцветным* циклом типа *su*, *tu* или *st*, если он содержит ребра в точности двух цветов s и u, t и u или s и t.

Взаимно-однозначное отображение P графа T на себя, переводящее вершины в вершины с сохранением отношений инцидентности и цветности (то есть вершина, инцидентная s, t или u-ребру переходит в вершину, инцидентную ребру того же цвета), называется *автоморфизмом графа* T. В дальнейшем мы будем понимать под символом (T, P) граф T, оснащенный автоморфизмом P.

Два трехцветных графа (T, P) и (T', P') назовем *изоморфными*, если существует взаимно-однозначное соответствие ξ между множествами их вершин, сохраняющее отношения инцидентности и цветности, а также сопрягающее автоморфизмы P и P' (то есть $P'\xi = \xi P$).

Автоморфизм P трехцветного графа T назовём *периодическим* периода $m \in \mathbb{N}$, если $P^m(a) = a$ и $P^\mu(a) \neq a$ при натуральных $\mu < m$ для любой вершины a графа T.

Построим трехцветный граф T_f, соответствующий диффеоморфизму $f \in G$ следующим образом:

1) вершины графа T_f взаимно-однозначно соответствуют треугольным областям множества Δ;

2) две вершины графа инцидентны ребру цвета s, t или u, если соответствующие этим вершинам треугольные области имеют общую s, t или u кривую.

Обозначим через B_f множество вершин графа T_f. Так как стороны любой треугольной области раскрашены в разные цвета, то в вершине, соответствующей треугольной области, сходятся ребра трех различных цветов. Таким образом, граф T_f удовлетворяет определению трехцветного графа. Обозначим через $\pi_f : \Delta_f \to B_f$ взаимно-однозначное отображение множества треугольных областей диффеоморфизма f на множество вершин графа T_f. Диффеоморфизм f индуцирует на множестве вершин и ребер графа T_f автоморфизм $P_f = \pi_f f \pi_f^{-1}$. В силу конструкции, трехцветные графы, полученные по различным разбиениям на треугольные области (зависящим от выбора t-кривых), изоморфны.

В работе [4] доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Для того чтобы диффеоморфизмы f, f' из класса G были топологически сопряжены необходимо и достаточно, чтобы их графы (T_f, P_f) и $(T_{f'}, P_{f'})$ были изоморфны.*

В настоящей работе решается проблема реализации.

Определение 1.2. *Трехцветный граф (T, P) назовём допустимым, если он обладает следующими свойствами:*

1) граф T связен;

2) длина любого su-цикла графа T равна 4;

3) автоморфизм P является периодическим.

Лемма 1.1. *Пусть $f \in G$. Тогда трехцветный граф (T_f, P_f) является допустимым.*

Теорема 1.2. *Пусть (T, P) — допустимый трехцветный граф. Тогда существует диффеоморфизм $f : M^2 \to M^2$ из класса G, граф (T_f, P_f) которого изоморфен графу (T, P). При этом*

i) Эйлерова характеристика поверхности M^2 вычисляется по формуле $\chi(M^2) = \nu_0 - \nu_1 + \nu_2$, где ν_0, ν_1, ν_2 число tu-, su-, st-циклов графа T, соответственно;

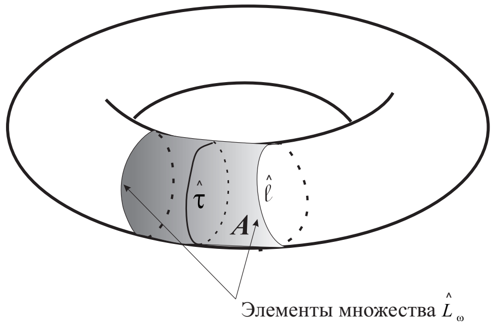
ii) поверхность M^2 ориентируема тогда и только тогда, когда в графе T существуют две вершины, соединяющиеся путями четной и нечетной длины.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 13-01-12452-офи-м). Автор также благодарит В. З. Гринеса за постановку задачи и О. В. Починку за плодотворные обсуждения.

2. Свойства трехцветного графа $(T_f; P_f)$

Предложение 2.1. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ существует f-инвариантное множество $\mathcal{T}$, состоящее из t-кривых, каждая из которых принадлежит в точности одной ячейке множества $\tilde{M}$.*

Доказательство. Пусть A — любая ячейка из множества $\tilde{M}$, α и ω — источник и сток, входящие в ее границу. Обозначим через L_ω объединение седловых сепаратрис, содержащих ω в своем замыкании. Положим $\hat{L}_\omega = p_{_\omega}(L_\omega)$, $\hat{L}_\omega$ — непустое подмножество, двумерного тора $\hat{V}_\omega$, состоящее из конечного числа попарно непересекающихся гомотопически нетривиальных гладких окружностей. По построению множество $\hat{A} = p_{_\omega}(A)$ является компонентой связности множества $\hat{V}_\omega$ и, следовательно, является двумерным кольцом (см. рисунок 2.1). Выберем простую замкнутую гомотопически нетривиальную гладкую кривую $\hat{\tau} \subset \hat{A}$. Множество $p_{\omega}^{-1}(\hat{\tau})$ является f-инвариантным объединением t-кривых, по одной на каждой из ячеек множества $p_{\omega}^{-1}(\hat{A})$.



Р и с у н о к **2.1**

Проекция ячейки A

Если множество $p_{\omega}^{-1}(\hat{A})$ исчерпывает всё множество ячеек диффеоморфизма f, то предложение доказано. В противном случае повторим рассуждения выше для ячеек множества $\tilde{M} \setminus p_{\omega}^{-1}(\hat{A})$. Продолжая процесс, мы исчерпаем все ячейки диффеоморфизма f и построим искомое множество $\mathcal{T}$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Предложение 2.1. позволяет построить трехцветный граф T_f, по полученному разбиению фазового пространства на треугольные области, как это было описано при формулировке результатов.

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Любая треугольная область $\delta \in \Delta_f$ диффеоморфизма $f \in G$ имеет период m_f.*

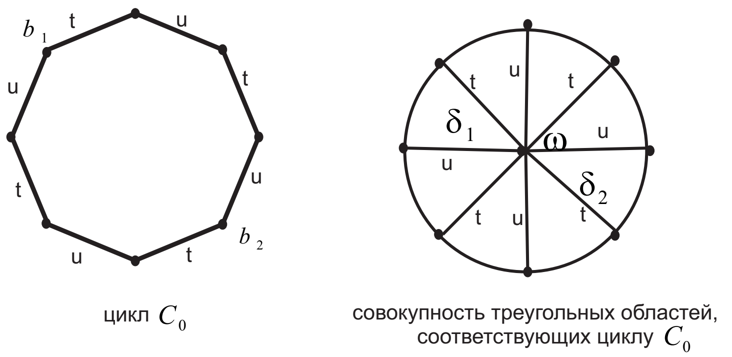
Д о к а з а т е л ь с т в о. Любая седловая сепаратриса ℓ диффеоморфизма f имеет период m_f (см., например, лемму 3.1.1. книги [3]), то есть $f^{m_f}(\ell) = \ell$ и $f^{\mu}(\ell) \neq \ell$ для натуральных $\mu < m_f$. Покажем, что любая t-кривая τ имеет период m_f. Пусть τ содержит сток ω в своем замыкании. Кривая $\hat{\tau}$ имеет тот же гомотопический тип на торе $\hat{V}_{\omega}$, что и компонента связности множества $\hat{L}_{\omega}$. Что означает, что любая t-кривая τ имеет тот же период, что и неустойчивые седловые сепаратрисы диффеоморфизма f, содержащие ω в своем замыкании.

Таким образом, граница любой треугольной области, а, следовательно, и сама треугольная область имеет период m_f.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

С л е д с т в и е 2.1. *Автоморфизм P_f, индуцированный диффеоморфизмом f на графе T_f, является периодическим периода m_f.*

Пусть $\mathcal{C}_0$ — множество всех tu-циклов графа T_f, $\mathcal{C}_1$ — множество всех su-циклов, $\mathcal{C}_2$ — множество всех st-циклов. Для двухцветного цикла $C_i \in \mathcal{C}_i$ обозначим через B_{C_i} множество его вершин.

Из определения треугольных областей следует, что для $i = 0, 1, 2$ корректно определено отображение $p_i : \Delta_f \to \Omega_f^i$, ставящее в соответствие треугольной области $\delta \in \Delta_f$ единственную периодическую точку из множества Ω_f^i, принадлежащую её замыканию. Положим $q_i = p_i \pi_f^{-1} : B_f \to \Omega_f^i$.



Р и с у н о к **2.2**

Пример tu- цикла C_0 и соответствующих ему треугольных областей

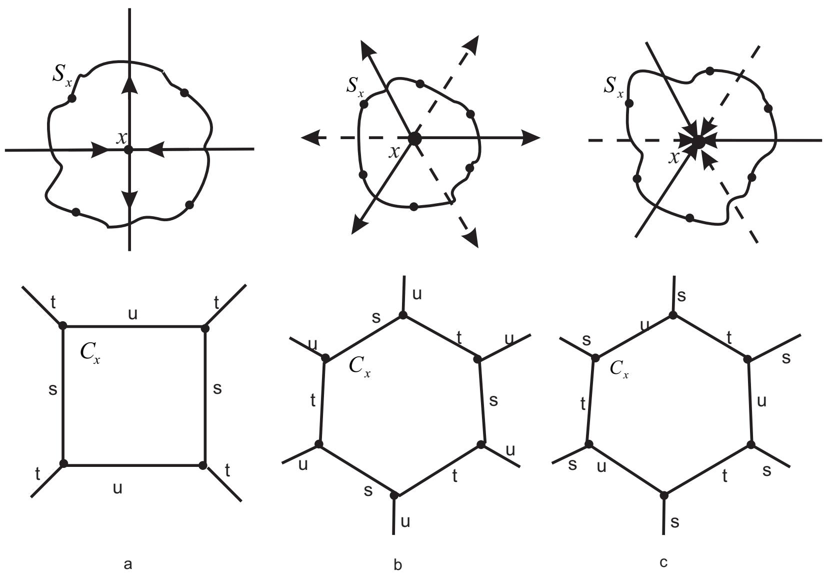
П р е д л о ж е н и е 2.3. *Для любых вершин* $b_1, b_2 \in B_{C_i}$ *имеет место равенство* $q_i(b_1) = q_i(b_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведём доказательство для B_{C_0} (в остальных случаях доказательства аналогичные). Вершинам $b_1, b_2 \in B_{C_0}$ соответствуют треугольные области $\delta_1 = \pi_f^{-1}(b_1)$ и $\delta_2 = \pi_f^{-1}(b_2)$ (см. рисунок 2.2)). Поскольку b_1 и b_2 вершины цикла B_{C_0} , то существует последовательность $\delta_1 = \beta_1, \dots, \beta_k = \delta_2$ треугольных областей таких, что β_i и $\beta_{i+1}, i = 1, \dots, k-1$ имеют общую u- или t-кривую. Поскольку каждое из таких рёбер содержит единственную стоковую точку, принадлежащую замыканию обеих областей, то $\pi_f(\beta_1) = \dots = \pi_f(\beta_k)$. Откуда следует, что $q_0(b_1) = q_0(b_2)$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

В силу предложения 2.3., корректно определено отображение Q_i , ставящее в соответствие множеству $B_{C_i}, C_i \in \mathcal{C}_i$ точку $x \in \Omega_f^i$ такую, что $x = q_i(b)$ для некоторой вершины $b \in B_{C_i}$.

Л е м м а 2.1. *Отображение* Q_i *является взаимно-однозначным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сюръективность отображения Q_i . Для точки $x \in \Omega_f^i$ обозначим через Δ_x объединение всех треугольных областей, содержащих x в своём замыкании, то есть $\Delta_x = \{\delta_x \in \Delta_x \subset \Delta_f | p_i(\delta_x) = x\}$. В окрестности точки x построим замкнутую кривую S_x , которая пересекает каждое ребро, содержащие точку x в своем замыкании, в единственной точке и не пересекает других ребер. Тогда существует единственный цикл C_x такой, что $B_{C_x} = \pi_f(\bigcup\limits_{\delta_x \in \Delta_x} \delta_x)$ (см. рисунок 2.3 на котором показано соответствие между кривой S_x и циклом C_x в окрестности седла, источника и стока). Рассмотрим произвольную точку $b = \pi_f(\delta_x) \in B_{C_x}$, тогда $q_i(b) = q_i(\pi_f(\delta_x)) = p_i(\pi_f^{-1}(\pi_f(\delta_x)) = p_i(\delta_x) = x$. Откуда следует, что $Q_i(C_x) = x$



Р и с у н о к **2.3**

Соответствие между кривой S_x и циклом C_x графа T_f в окрестности седла, стока и источника

Покажем инъективность отображения Q_i. Предположим противное, для некоторых циклов C_i и C'_i таких, что $C_i \neq C'_i$, $Q_i(C_i) = Q_i(C'_i) = x \in \Omega^i_f$. Положим $\Delta_x = p_i^{-1}(x)$ полный прообраз точки x, тогда $\pi_f(\Delta_x) = B_{C_x}$, где цикл C_x определяется способом, описанным выше. В силу конструкции $C_x = C_i = C'_i$. Получили противоречие.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

В силу леммы 2.1., каждой периодической точке $x \in \Omega^i_f$ взаимно-однозначно соответствует двухцветный цикл C, любая вершина $b \in B_C$ посредством отображения π_f^{-1} переводится в треугольную область $\pi_f^{-1}(b)$, содержащую периодическую точку x в своём замыкании.

З а м е ч а н и е 2.1. *Таким образом, стоковой точке $\omega \in \Omega^0_f$ соответствует tu-цикл; седловой точке $\sigma \in \Omega^1_f$ — su-цикл; источниковой точке $\alpha \in \Omega^2_f$ — st-цикл графа T_f.*

Выберем во внутренности каждой треугольной области произвольную точку. Точки, находящиеся в смежных областях, соединим кривой, пересекающей общую сторону треугольных областей в единственной точке. Этой кривой припишем цвет стороны, которую она пересекает. Отсюда следует, что граф T_f вкладывается в поверхность M^2 в том смысле, что существует взаимно однозначное соответствие между вершинами графа и точками в треугольных областях (по одной в каждой), а также между ребрами графа и отрезками, соединяющими эти точки (см. рисунок 2.4).

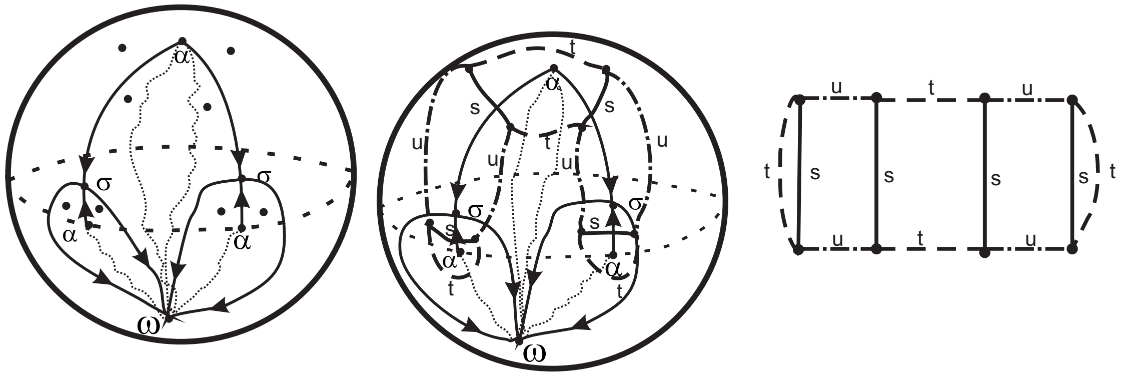


Рисунок **2.4**

Вложение графа T_f в поверхность

Доказательство леммы 1.1.

Докажем, что трехцветный граф (T_f, P_f) обладает следующими свойствами:

1) граф T_f связен;

2) длина su-циклов графа T_f равна 4;

3) автоморфизм P_f является периодическим с периодом m_f.

Доказательство. Пусть $f \in G$. Докажем последовательно все вышеприведенные свойства графа T_f.

1) Пусть b_1, b_2 различные вершины графа T_f. Покажем, что существует путь, их соединяющий.

Для $i = 1,2$ положим $\delta_i = \pi_f^{-1}(b_i)$ и выберем точку $x_i \in int\ \delta_i$. Поскольку 2-многообразие M^2 связно, а множество $\bigcup\limits_{i=0}^{2} \Omega_f^i$ нульмерно, то множество $M_\Omega = M^2 \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{2} \Omega_f^i$ связно (в силу теоремы о разбивающих множествах[5]). Тогда существует гладкий путь $H : [0,1] \to M_\Omega$ такой, что $H(0) = x_1$ и $H(1) = x_2$ (см., например, [10]). Можно считать этот путь трансверсальным объединению s,t,u-кривых[6]. Обозначим через $\delta_1 = \beta_1, \dots, \beta_k = \delta_2$ последовательность треугольных областей из множества Δ_f, пронумерованных в порядке пересечения их кривой $H([0,1])$ при возрастания параметра $t \in [0,1]$. Треугольные области β_i и β_{i+1} граничат по кривым γ_i. Положим $d_i = \pi_f(\beta_i)$. Из построения графа T_f следует, что последовательность вершин и ребер $d_1, e_1, d_2, \dots d_{k-1}, e_{k-1}, d_k$ (где вершины b_i и b_{i+1} инцидентны ребру e_i, $i \geq 1$, причем цвет кривой γ_i и ребра e_i совпадает), является путем на графе T_f, соединяющим вершины b_1 и b_2.

2) Согласно лемме 2.1., каждой седловой точке $\sigma \in \Omega_f^1$ соответствует цикл $C_1 \in \mathcal{C}_1$, в который входят в точности те вершины, которые являются образами треугольных областей, под действием отображения π_f, содержащими σ в своем замыкании. Так как число таких областей в точности четыре, следовательно и длина любого su-цикла равна четырем.

3) В силу следствия 2.1. автоморфизм P_f является периодическим с периодом m_f. Доказательство закончено.

[5] **Теорема о разбивающих множествах:** Любое n-мерное связное многообразие не может быть разбито подмножеством топологической размерности $\leq n-2$.

[6] Множество $H([0,1])$ является компактным как непрерывный образ компакта. Тогда существует открытая окрестность $U(\Omega_f)$ неблуждающего множества Ω_f, не пересекающаяся с множеством $H([0,1])$. Обозначим через R объединение s,t,u-кривых и положим $\hat{R} = R \setminus U(\Omega_f)$. Поскольку множество $\hat{R}$ замкнуто, то, согласно теореме о трансверальности (см., например, теорема 10.3.29 книги [3]), мы можем аппроксимировать гладкий путь H таким образом, что множество $H([0,1])$ будет трансверсально множеству $\hat{R}$

3. Реализация (Доказательство теоремы 1.2.)

Пусть (T,P) допустимый трехцветный граф. Разобьем доказательство теоремы 1.2. на три шага, которые составят доказательства предложений 3.1., 3.3., 3.4..

Предложение 3.1. *Существует диффеоморфизм $f: M^2 \to M^2$ из класса G, граф (T_f, P_f) которого изоморфен графу (T,P).*

Доказательство. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ векторное поле $v = (\sin(\pi x), \sin(\pi y))$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Непосредственно проверяется, что неблуждающее множество потока, определенного векторным полем v, совпадает с множеством точек целочисленной решетки плоскости (x,y), причем точки с двумя четными (нечетными) координатами являются источниками (стоками) потока, а точки с координатами разной четности — седловыми состояниями потока. Объединение замыкания седловых сепаратрис образуют семейство целочисленных горизонтальных и вертикальных прямых. Диагонали соответствующих квадратов, соединяющие вершину с четными координатами с вершиной с нечетными координатами, являются инвариантными относительно построенного потока. Обозначим через d треугольник ΔOBC с вершинами $O(0,0), C(1,0), B(1,1)$ и будем называть внутренности отрезков, соединяющих попарно точки O и C, O и B, B и C, соответственно OC, OB, BC - сторонами. соответственно, $s-, t-, u-$ сторонами ΔOBC (см. рисунок 3.1). Обозначим через $g: d \to d$ диффеоморфизм, являющийся сдвигом на единицу времени потока, определяемого на треугольнике d векторным полем v.

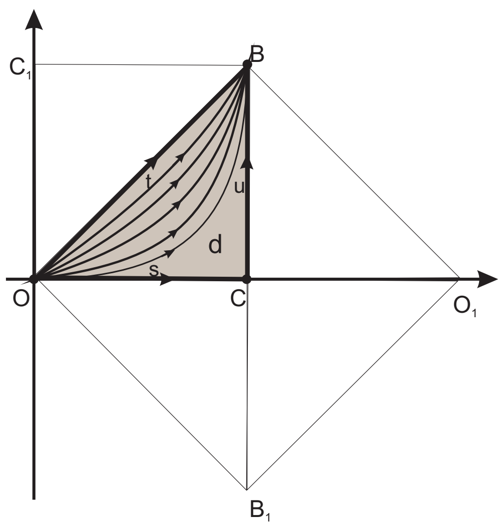


Рисунок **3.1**

Траектории потока, порождённого векторным полем v

Рассмотрим теперь допустимый трехцветный граф (T,P) и обозначим через n число его вершин. Положим $D = d \times \mathbb{Z}_n$, где $\mathbb{Z}_n = \{0, \ldots, n-1\}$ и обозначим через $p_d : D \to d$ проекцию на первую координату, то есть $p_d(d,i) = d$. Множество B вершин графа T пронумеруем следующим образом: $b_0, \ldots, b_{n-1}$. Введем на множестве D минимальное отношение эквивалентности $\sim$, удовлетворяющее следующему правилу: если вершины b_i, b_j графа T соединены s, t или u-ребром, то $(\rho, i) \sim (\rho, j)$ для любой точки $\rho \in d$, принадлежащей s, t или u-стороне, соответственно. Из свойств допустимого графа следует, что факторпространство $M^2 = D/\sim$ является замкнутым топологическим 2-многообразием. Обозначим через $q: D \to M^2$ естественную проекцию.

Автоморфизм P индуцирует на множестве D отображение $\Pi : D \to D$, переводящее точку $(\rho, i), \rho \in d, i \in \mathbb{Z}_n$ в точку (ρ, j), где $j \in \mathbb{Z}_n$ выбирается таким образом, что $b_j = P(b_i)$. Поскольку изоморфизм P сохраняет отношение инцидентности и цветности, то на топологическом пространстве M^2 коректно определён гомеоморфизм $f : M^2 \to M^2$ формулой $f(z) = q(g(\Pi(q^{-1}(z)))), z \in M^2$. Следуя идеям работы [7], определим на M^2 гладкую структуру, относительно которой отображение f является диффеоморфизмом. Что и завершит доказательство теоремы реализации.

Покроем многообразие M^2 конечным числом карт $(U_z, \psi_z), z \in M^2$, где $U_z \subset M^2$ открытая окрестность точки z и $\psi : U_z \to \mathbb{R}^2$ гомеоморфизм на образ, следующих трёх типов (см. рисунок 3.1 для наглядности).

1. Для точки $z = q(C, i_1), i_1 \in \mathbb{Z}_n$ существуют еще три треугольника $d \times \{i_2\}, d \times \{i_3\}, d \times \{i_4\}, i_2, i_3, i_4 \in \mathbb{Z}_n$ таких, что $(\rho, i_{2k-1}) \sim (\rho, i_{2k})$ для любой точки $\rho \in OC$ и $(\rho, i_{2k}) \sim (\rho, i_{2k+1})$ для любой точки $\rho \in BC$, где $k = 1, 2$ и $i_5 = i_1$. Положим $U_z = int\ q(d \times \{i_1, i_2, i_3, i_4\})$, $\psi_z(w) = p_d((q|_{d\times\{i_1\}})^{-1}(w))$ для $w \in q(d \times \{i_1\})$; $\psi_z(w) = M_{OC}(p_d((q|_{d\times\{i_2\}})^{-1}(w)))$ для $w \in q(d \times \{i_2\})$, где $M_{OC}(x, y) = (x, -y)$ для $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; $\psi_z(w) = M_C(p_d((q|_{d\times\{i_3\}})^{-1}(w)))$ для $w \in q(d \times \{i_3\})$, где $M_C(x, y) = (2 - x, -y)$ для $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; $\psi_z(w) = M_{BC}(p_d((q|_{d\times\{i_4\}})^{-1}(w)))$ для $w \in q(d\times\{i_4\})$, где $M_{BC}(x, y) = (2-x, y)$ для $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Для точки $z = q(O, i_1), i_1 \in \mathbb{Z}_n$ существует еще $2m-1$ треугольника $d\times\{i_2\}, \ldots, d\times\{i_{2m}\}, i_2, \ldots, i_{2m} \in \mathbb{Z}_n$ таких, что $(\rho, i_{2k-1}) \sim (\rho, i_{2k})$ для любой точки $\rho \in OB$ и $(\rho, i_{2k}) \sim (\rho, i_{2k+1})$ для любой точки $\rho \in OC$, где $k = 1, \ldots, m$ и $i_{2m+1} = i_1$. Положим $U_z = int\ q(d \times \{i_1, \ldots, i_{2m}\})$, $\psi_z(w) = \nu_k(p_d((q|_{d\times\{i_{2k-1}\}})^{-1}(w)))$ для $w \in q(d \times \{i_{2k-1}\})$ и $\psi_z(w) = \nu_k(M_{OB}(p_d((q|_{d\times\{i_{2k}\}})^{-1}(w))))$ для $w \in q(d \times \{i_{2k}\})$, где $\nu_k(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (r\cos(\frac{4\varphi+2\pi(k-1)}{m}), r\sin(\frac{4\varphi+2\pi(k-1)}{m}))$ для $(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2$ и $M_{OB}(x, y) = (y, x)$ для $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Для точки $z = q(B, i_1), i_1 \in \mathbb{Z}_n$ существует еще $2l-1$ треугольника $d\times\{i_2\}, \ldots, d\times\{i_{2l}\}, i_2, \ldots, i_{2l} \in \mathbb{Z}_n$ таких, что $(\rho, i_{2j-1}) \sim (\rho, i_{2j})$ для любой точки $\rho \in OB$ и $(\rho, i_{2j}) \sim (\rho, i_{2j+1})$ для любой точки $\rho \in OC$, где $j = 1, \ldots, l$ и $i_{2l+1} = i_1$. Положим $U_z = int\ q(d \times \{i_1, \ldots, i_{2l}\})$, $\psi_z(w) = \mu_j(p_d((q|_{d\times\{i_{2k-1}\}})^{-1}(w)))$ для $w \in q(d \times \{i_{2j-1}\})$ и $\psi_z(w) = \mu_j(M_{OB}(p_d((q|_{d\times\{i_{2j}\}})^{-1}(w))))$ для $w \in q(d \times \{i_{2j}\})$, где $\mu_j((r-1)\cos\varphi, (r-1)\sin\varphi) = ((r-1)\cos(\frac{4(\varphi+\frac{\pi}{2})-2\pi(j-1)}{l}), (r-1)\sin(\frac{4(\varphi+\frac{\pi}{2})-2\pi(j-1)}{l}))$ для $((r-1)\cos\varphi, (r-1)\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2$.

Покажем, что введённые карты задают гладкую структуру на M^2. Для этого проверим гладкость отображений перехода для карт разных типов, так как различные карты одного типа не пересекаюся между собой.

1.2. Если (U_{z_1}, ψ_{z_1}) и (U_{z_2}, ψ_{z_2}) — карты первого и второго типов, соответственно, такие, что $U_{z_1} \cap U_{z_2} \neq \emptyset$. Тогда отображение $\varphi_{1,2} = \psi_{z_2}\psi_{z_1}^{-1} : \psi_{z_1}(U_{z_1} \cap U_{z_2}) \to \psi_{z_2}(U_{z_1} \cap U_{z_2})$ имеет следующий вид для $k \in \{1, \ldots, m\}$:

$\varphi_{1,2}(x, y) = \nu_k(x, y)$ или $\varphi_{1,2}(x, y) = \nu_k(y, x)$ для $(x, y) \in int \triangle OBC$;
$\varphi_{1,2}(x, y) = \nu_k(x, -y)$ или $\varphi_{1,2}(x, y) = \nu_k(-y, x)$ для $(x, y) \in int \triangle OB_1C$;
$\varphi_{1,2}(x, y) = \nu_k(2 - x, -y)$ или $\varphi_{1,2}(x, y) = \nu_k(-y, 2 - x)$ для $(x, y) \in int \triangle O_1B_1C$;
$\varphi_{1,2}(x, y) = \nu_k(2 - x, y)$ или $\varphi_{1,2}(x, y) = \nu_k(y, 2 - x)$ для $(x, y) \in int \triangle O_1BC$.

1.3. Если (U_{z_1}, ψ_{z_1}) и (U_{z_3}, ψ_{z_3}) — карты первого и третьего типов, соответственно, такие, что $U_{z_1} \cap U_{z_3} \neq \emptyset$. Тогда отображение $\varphi_{1,3} = \psi_{z_3}\psi_{z_1}^{-1} : \psi_{z_1}(U_{z_1} \cap U_{z_3}) \to \psi_{z_3}(U_{z_1} \cap U_{z_3})$ имеет следующий вид для $j \in \{1, \ldots, l\}$:

$\varphi_{1,3}(x, y) = \mu_j(x, y)$ или $\varphi_{1,3}(x, y) = \mu_j(y, x)$ для $(x, y) \in int \triangle OBC$;
$\varphi_{1,3}(x, y) = \mu_j(x, -y)$ или $\varphi_{1,3}(x, y) = \mu_j(-y, x)$ для $(x, y) \in int \triangle OB_1C$;
$\varphi_{1,3}(x, y) = \mu_j(2 - x, -y)$ или $\varphi_{1,3}(x, y) = \mu_j(-y, 2 - x)$ для $(x, y) \in int \triangle O_1B_1C$;
$\varphi_{1,3}(x, y) = \mu_j(2 - x, y)$ или $\varphi_{1,3}(x, y) = \mu_j(y, 2 - x)$ для $(x, y) \in int \triangle O_1BC$.

2.3. Если (U_{z_2}, ψ_{z_2}) и (U_{z_3}, ψ_{z_3}) — карты второго и третьего типов, соответственно, такие, что $U_{z_2} \cap U_{z_3} \neq \emptyset$. Тогда отображение $\varphi_{2,3} = \psi_{z_3}\psi_{z_2}^{-1} : \psi_{z_2}(U_{z_2} \cap U_{z_3}) \to \psi_{z_3}(U_{z_2} \cap U_{z_3})$ имеет следующий вид для $k \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, l\}$:
$\varphi_{2,3}(x, y) = \mu_j(\nu_k^{-1}(x, y))$ для $(x, y) \in int\ \nu_k(d)$.
Доказательство закончено.

Предложение 3.2. *Пусть a_f^0, a_f^1, a_f^2 — число стоковых, седловых, источниковых точек диффеоморфизма $f \in G$, заданного на ориентируемой (неориентируемой) поверхности рода g (q), тогда $a_f^0 - a_f^1 + a_f^2 = 2 - 2g$ ($a_f^0 - a_f^1 + a_f^2 = 2 - q$).*

Доказательство. Хорошо известно, что эйлерова характеристика для ориентируемой поверхности выражается формулой: $\chi(X) = 2 - 2g$, где g — число ручек; а для неориентируемой поверхности формула — выглядит следующим образом: $\chi = 2 - q$, где q — число плёнок Мёбиуса (см., например, [3]). С другой стороны, в силу [11], многобразие M^2 является двумерным клеточным комплексом $M^2 = \bigcup\limits_{p \in \Omega_f} W_p^u$ с числом a_f^0, a_f^1, a_f^2 нульмерных, одномерных, двумерных клеток, соответственно. Тогда эйлерова характеристика данного комплекса вычисляется по формуле: $\chi(M^2) = \sum\limits_{q=0}^{2} (-1)^q c_q$, где c_q — число его q-мерных клеток (см., например, Теорему 9 книги [9]). Откуда $\chi(M^2) = a_f^0 - a_f^1 + a_f^2$.
Доказательство закончено.

Предложение 3.3. *Эйлерова характеристика поверхности M^2, построенной по допустимому графу (T, P) в предложении 3.1., вычисляется по формуле $\chi(M^2) = \nu_0 - \nu_1 + \nu_2$, где ν_0, ν_1, ν_2 число tu-, su-, st-циклов графа T, соответственно.*

Доказательство. В силу леммы 2.1., $\nu_i = a_f^i$ для $i = 0, 1, 2$. Откуда, с учетом предложения 3.2., $\chi(M^2) = \nu_0 - \nu_1 + \nu_2$.
Доказательство закончено.

Введем понятие согласованной ориентации треугольных областей многообразия M^2, сконструированного в доказательстве предложения 3.1. Для этого ориентируем каждую его треугольную область. Ориентацию будем задавать, выбирая один из двух возможных порядков обхода вершин треугольной области: 1) если при обходе вершин, треугольная область остается слева, то припишем области метку $\theta = +1$; 2) если при обходе вершин, треугольная область остается справа, то припишем области метку $\theta = -1$. Ориентацию треугольных областей будем называть *согласованной*, если двум смежным треугольным областям приписаны различные метки, то есть направление обхода на общей границе совпадает.

Поверхность M^2, ориентируема тогда и только тогда, когда все треугольные области на ней можно согласованно ориентировать.

Предложение 3.4. *Поверхность M^2, построенная по допустимому графу (T, P) в предложении 3.1., ориентируема тогда и только тогда, когда в графе T все циклы имеют четную длину.*

Доказательство.

Необходимость Пусть поверхность M^2 ориентируема, тогда мы можем задать согласованную ориентацию треугольных областей. Рассмотрим произвольную треугольную область $\delta \in \Delta$, для определенности положим, что ей приписана метка $\theta_\delta = +1$. По правилу согласования всем треугольным областям будут приписаны метки. Так как между треугольными областями множества Δ и множеством вершин B графа T существует взаимно-однозначное соответствие π, то каждой вершине $b \in B$ можно приписать метку $\theta_b = \theta_\delta$, где $b = \pi(\delta)$.

Рассмотрим произвольный цикл C графа T, содержащий вершину b, положим $b = b_1, b_2, \cdots b_n, b_{n+1} = b$ - вершины цикла C. Правило согласования меток на треугольных областях индуцирует правило согласования меток на вершинах: любые две вершины, инцидентные одному ребру, имеют различные метки.

Приписав метку θ_b вершине $b = b_1$, правило согласования однозначно определяет метку на вершине b_2, от нее на вершине b_3 и далее по цепочке до b_n и снова на $b = b_{n+1}$. Таким образом, вершине b приписаны две метки. Так как по правилу согласования метки совпадают, то цикл C имеет четную длину.

Достаточность

Предположим все циклы графа T имеют четную длину. В силу того, что путь четной длины соединяет вершины с одинаковыми метками, можно ввести следующее правило согласования меток на вершинах: любые две вершины, инцидентные одному ребру, имеют различные метки.

Припишем метку θ_{b^*} произвольной вершине b^*, в силу связности графа правило согласования однозначно определяет метки на всех вершинах графа T. Тогда произвольной треугольной области $\delta = \pi^{-1}(b)$ однозначно приписывается метка $\theta_\delta = \theta_b$. Так как метки на вершинах введены согласованно, то треугольные области можно согласованно ориентировать в соответствии с приписанными им метками, значит, поверхность M^2 ориентируема.

Доказательство закончено.

Список литературы

1. А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер., *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Наука, Москва, 1966, 568 с.

2. Безденежных А. Н., Гринес В. З., “Динамические свойства и топологическая классификация градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях”, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений: межвуз. тематич. сб. науч. тр.*. Т. Ч. 2, ред. Е. А. Леонтович-Андронова, ГГУ, Горький, 1987, 24–32.

3. Гринес В. З., Починка О. В, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 424 с.

4. Гринес В. З., Капкаева С. Х., “Классификация градиентно-подобных диффеоморфизмов посредством трехцветного графа”, *Журнал СВМО*, **2**, 15 (2013), 12-22.

5. Капкаева С. Х., “О топологической сопряженности градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей посредством трехцветного графа”, *Журнал СВМО*, **4**, 14 (2012), 34-43.

6. Леонтович Е., Майер А. О, “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, *Доклады академии наук СССР*, **4**, 103 (1955), 557–560.

7. Ошемков А. А., Шарко В. В., “О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях”, *Математический сборник*, **8**, 189 (1998), 93-140.

8. Peixoto M. M., “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical systems*, 1973, 389-419.

9. Л. С. Понтрягин, *Основы комбинаторной топологии.*, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1947, 142 с.

10. М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия.*, Наука, Москва, 1987, 480 с.

11. С. Смейл, “Дифференцируемые динамические системы”, *УМН*, **25**:1(151) (1970), 113–185.

Realization of gradient-like diffeomorphisms on surfaces by means of automorphisms of three-color graphs

© **S. H. Kapkaeva**[7]

Abstract. This paper is a continuation of the papers [5], [4] which contain the conditions of topological conjugacy of gradient-like diffeomorphisms on surfaces. In the present paper the realization problem is solved. That is a standard representative is constructed in each class of topologically conjugated gradient-like diffeomorphisms

Key Words: Morse-Smale diffeomorphisms, gradient-like diffeomorphisms, topological conjugate diffeomorphisms, three-color graph, realization of diffeomorphisms

[7] Student, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; kapkaevasvetlana@yandex.ru.