УДК 517.929

Устойчивость неограниченных решений

© Л. Д.Блистанова[1], В.И. Зубов[2], И.В. Зубов[3], С.А. Стрекопытов[4]

Аннотация. В статье изучаются неограниченные решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь получены условия устойчивости неограниченных решений и оценки на скорость приближения траекторий возмущенного движения к траектории невозмущенного

Ключевые слова: вектор, собственное число, матрица, строка, число, решение, параметр, уравнение

1. Введение

Интуитивно очевидно, что системы с простой структурой легче реализуются в инженерном смысле. Конечно, понятие простоты весьма относительно, но, скажем, квадратичные системы вызовут предпочтение у любого конструктора перед системами, включающими более сложные нелинейности. Рассмотрение нелинейных систем с простой структурой, имеющих несколько неустойчивых положений равновесия, но имеющих заданным образом геометрически локализованное ограниченное инвариантное множество, к тому же глобально асимптотически устойчивое, позволяет создавать весьма эффективные системы управления. По сути это предельное множество является аналогом устойчивого положения равновесия для линейных и линеаризованных систем. Но в данном случае алгебраические критерии устойчивости, основанные на анализе собственных чисел матрицы линейного приближения, беспомощны. Это связано с тем, что аналитическая природа этих предельных множеств, как правило, весьма сложна. Для составления возмущенной системы требуется интегрирование уравнений движения, что в общем случае не осуществимо.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = PX + Q + \mu F(X), \tag{2.1}$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)^\star$ - вектор фазовых переменных, P, Q - постоянные матрицы размерностей $n \times n$ и $n \times 1$ соответственно, $F = (f_1, \dots, f_n)^\star$ - векторная функция, μ - малый параметр. *Равновесным решением (движением)* мы будем называть такое решение (движение)

$$x(t, X_0) = (x_1(t, X_0), \dots, x_n(t, X_0))^\star$$

в n - мерном пространстве, у которого одна из координат неограниченно возрастает при $t \to \infty$, а остальные постоянны, например,

$$x_j(t, X_0) \equiv x_j^0, \quad j = 1, \dots, n-1; \quad x_n \to \infty \, \text{при} \, t \to \infty.$$

[1] Профессор кафедры Теории управления, СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Аспирант кафедры Теории управления, СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] Профессор кафедры Теории управления, СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[4] Доцент кафедры Теории управления, СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Поставим вопрос о существовании равновесного решения системы (2.1) и о поведении решений этой системы уравнений, начинающихся в некоторой окрестности равновесного решения. Пусть выполнены условия: собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы P таковы, что $\lambda_n = 0$, $Re\lambda_j < 0$ для $j = 1, \dots, n-1$, $F(\bar{X})$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица. Сделаем замену $X = SY$, где S - невырожденная матрица размерности $n \times n$, и подставим это выражение в (2.1):

$$\dot{Y} = S^{-1}PSY + S^{-1}Q + \mu S^{-1}F(SY). \tag{2.2}$$

Отметим, что $x_i = (S_i^\star Y)$, где $S_i - i-$я строка матрицы S. Матрица S выбирается так, чтобы матрица $A = S^{-1}PS$ имела последнюю строку и последний столбец нулевыми. Существование такой матрицы очевидно. Например, в качестве S можно взять хотя бы матрицу, составленную из корневых векторов матрицы P; в этом случае матрица A будет жордановой. Перепишем систему (2.2) в виде

$$\dot{Y} = AY + R + \mu\Phi(Y), \tag{2.3}$$

где $R = S^{-1}Q = (y_1, \dots, y_n)^\star$,

$$\Phi(Y) = S^{-1}F(SY) = (\varphi_1(Y), \dots, \varphi_n(Y))^\star.$$

Разделим систему (2.3) на две группы уравнений:

$$\dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n-1}y_{n-1} + r_1 + \mu\varphi_1(Y),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dot{y}_{n-1} = a_{n-1\,1}y_1 + a_{n-1\,2}y_2 + \ldots + a_{n-1\,n}y_{n-1} + r_{n-1} + \mu\varphi_{n-1}(Y),$$
$$\dot{y}_n = r_n + \mu\varphi_n(Y). \tag{2.4}$$

При $\mu = 0$ у системы (2.4) существует положение равновесия $Y_0 = (Y_1^0, \dots, Y_{n-1}^0)$ в силу того, что матрица $\{a_{ij}\}$ $(i = 1, \dots, n-1,\ j = 1, \dots, n-1)$ невырожденная. Следовательно, по теореме о существовании неявной функции у системы (2.4) есть положение равновесия $Y(\mu)$ и при любом μ, которое по модулю должно быть меньше некоторого положительного μ_0. Это прямо следует из теоремы о существовании неявной функции, если учесть, что якобиан совпадает с определителем матрицы $\{a_{ij}\}$, $i, j = 1, \dots, n-1$. Отметим, что если правые части $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ не будут зависеть от y_n, то положение равновесия системы (2.4) будет асимптотически устойчиво по Ляпунову и y_n будет меняться по линейному закону

$$y_n = y_{n_0} + (r + \mu\varphi_n(Y_\mu))t.$$

Следовательно, равновесное решение системы (2.3) будет устойчиво по Ляпунову. Посмотрим, какие ограничения на систему (2.1) наложит условие независимости Φ от y_n, т.е.

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_n} = 0,\ i = 1, \dots, n. \tag{2.5}$$

Так как

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial y_n} = (\nabla\varphi_i, S_n),$$

где $S_n - n-$ й столбец матрицы S, то (2.5) эквивалентно уравнению

$$(\nabla\varphi_i, S_n) = 0. \tag{2.6}$$

Вектор S_n ортогонален всем строкам матрицы P, т.е. ортогонален подпространству, натянутому на строки матрицы P, и так как

$$\nabla\varphi_i = \sum \sigma_{ij}\nabla f_i,$$

где σ_{ij} - элементы матрицы S^{-1}, то выполнено (2.6), а следовательно, будет справедливо и соотношение (2.5), если ∇f лежат в подпространстве, натянутом на строки матрицы P. Рассмотрим равновесное решение $X(t)$. Пусть точка $M \in E_n$. Введем в рассмотрение величину $\rho(M, X(t))$ - расстояние от точки M до траектории $X(t) : \rho(M, X(t)) = \min_{\tau\geq t_0} \|M - X(t)\|$.

Определение 2.1. *Равновесное решение $X(t)$ называется орбитально устойчивым (орбитально асимптотически устойчивым), если для любого сколь угодно малого положительного ε найдется $\delta > 0$ такое, что при $\rho(X_0, X(t)) < \delta$ будет выполняться*

$$\rho(X(t, X_0), X(t)) < \varepsilon \, npu \, t \geq 0 \quad (\rho(X(t, X_0), X(t)) \underset{t\to\infty}{\to} 0).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть для системы* (2.1) *собственные числа матрицы P таковы, что $Re\lambda_j < 0$ $(j = 1, \ldots, n-1)$, $\lambda_n = 0$, векторы $\nabla f_j (j = 1, \ldots, n)$ существуют и лежат в подпространстве, натянутом на строки матрицы P. Тогда существует такое $\mu_0 > 0$, что для любого μ, по модулю превосходящего μ_0, существует орбитально асимптотически устойчивое неограниченное равновесное решение системы* (2.1), *устойчивое по Ляпунову.*

Далее будем рассматривать систему вида

$$\begin{aligned} \dot{X} &= PX + \mu F(X, z), \\ \dot{z} &= r + \mu h(X, z), \end{aligned} \tag{2.7}$$

в которую переходит система вида (2.1), если матрица P имеет хотя бы одно нулевое собственное число. Здесь $X = (x_1, \ldots, x_N)^\star$, $P - N \times N-$ матрица, $r > 0$, μ - малый параметр, $F = (f_1, \ldots, f_n)$ - векторная, $h(X, z)$ - скалярная функция переменных $x_1, \ldots, x_N, z$. Если $F(0, z) \equiv 0$, $h(0, z) \equiv 0$, то у системы (2.7) существует семейство неограниченных равновесных решений

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0, \, z = z_0 + rt, \tag{2.8}$$

представляющее плоскость в $(N+1)$-мерном пространстве. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$. Задача состоит в изучении свойства этого решения. Здесь и далее будем предполагать относительно функций F, h следующее: 1) функции $f_1, \ldots, f_n, h$ разлагаются в ряды по целым положительным степеням переменных $x_1, \ldots, x_N$, равномерно сходящимся относительно z, когда величина $\|X\|$ достаточно мала; 2) разложения функций $f_1, \ldots, f_N, h$ не содержат членов, линейных относительно $x_1, \ldots, x_N$; 3) имеет место оценка $|h| \leq k_0|z|^b(\sum_{j=1}^N |x_j|)^a$, где $k_0 > 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$. Рассмотрим следующий случай.

2.1. Случай нескольких пар чисто мнимых корней

Система (2.7) линейным преобразованием приводится к виду

$$\dot{x_s} = -\lambda_s y_s + \mu F_s, \quad \dot{y_s} = \lambda_s x_s + \mu G_s, \tag{2.9}$$

$$\dot{\xi_j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ji}\xi_i + \mu g_i, \quad \dot{z} = r + \mu h,$$

$$s = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, n.$$

Здесь N - мерный $(2k+n = N)$ вектор X перешел в вектор $(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k, \xi_1, \dots, \xi_n)$. Собственные числа матрицы $\{p_{ij}\}$, $i, j = 1, \dots, n$, имеют отрицательные вещественные части. А.М. Ляпунов в своей знаменитой диссертации [1] отмечал, что, если вместо времени взять какую-либо непрерывную вещественную функцию, вместе со временем возрастающую, то последняя при решении вопроса об устойчивости может играть такую же роль, как и время. Исследуем, как ведут себя переменные x_k, y_k, ξ_j в качестве функции z. Разделим первые $2k + n$ уравнений системы (2.9) на последнее уравнение:

$$\frac{dx_s}{dz} = -\bar{\lambda}_s y_s + \mu \bar{F}_s, \quad \frac{dy_s}{dz} = \bar{\lambda}_s x_s + \mu \bar{G}_s, \tag{2.10}$$

$$\frac{f\xi_j}{dz} = \sum_{i=1}^{n} p_{ji}\xi_i + \mu \bar{g}_j.$$

Очевидно, что $\bar{\lambda}_s > 0$. Собственные числа матрицы $\{p_{ji}\}$ имеют отрицательные вещественные части, и у системы (2.10) имеется нулевое решение. Функции $\bar{F}_s$, $\bar{G}_s$, $\bar{g}_j$, удовлетворяют следующим условиям: 1) они разлагаются в ряды по целым положительным степеням величин x_k, y_k, ξ_j, равномерно сходящиеся относительно z при достаточно малых $|x_k|$, $|y_k|$, $|\xi_j|$; 2) разложения функций $\bar{F}_s$, $\bar{G}_s$, $\bar{g}_s$ не содержат членов, линейных относительно x_k, y_k, ξ_j. Если мы имеем дело с общим по классификации А.М. Ляпунова случаем [2], то с помощью преобразований Ляпунова

$$x_s = r_s \cos\theta_s, \quad y_s = r_s \sin\theta_s,$$

$$r_s = \rho_s + \sum_{i=z}^{m} r_s^i(\theta_1, \dots, \theta_k, \rho_1, \dots, \rho_k, z),$$

а затем

$$\xi_j = \sum_{i=1}^{m} r_s^{(i)}(\theta_1, \dots, \theta_k, \rho_1, \dots, \rho_k, z) + \eta_i,$$

не нарушающих вопроса об устойчивости, где $r_j^{(i)}$, $\xi_j^{(i)}$ - однородные формы относительно $\rho_1, \dots, \rho_k$ степени l с периодическими коэффициентами относительно $\theta_1, \dots, \theta_k, m$ - положительное целое число, система (2.10) в общем случае приводима к виду

$$\frac{d\rho_s}{dz} = \mu R_s, \quad \frac{d\theta_s}{dz} = \bar{\lambda}_s + \mu\theta_s, \frac{d\eta_i}{dz} = \sum_{i=1}^{m} p_{ji}\eta_i + \mu p_j. \tag{2.11}$$

Напомним, что m определяется как наинизшая степень форм относительно $\rho_1, \dots, \rho_k$, обладающих периодическими по $\theta_1, \dots, \theta_k$ коэффициентами, вычмсляемыми подстановкой в систему (2.10) выражений

$$r_s = \rho_s + \sum_{i=z}^{\infty} r_s^{(i)}(\theta_1, \dots, \theta_k, \rho_1, \dots, \rho_k, z)$$

и приравниванием членов одного порядка в получившихся выражениях [3]. Разложение функций R_s в ряды по степеням $\rho_1, \ldots, \rho_k$ при $\eta_1 = 0, \ldots, \eta_n = 0$ начинается с форм степени m, которые обладают не зависящими от θ_k коэффициентами. Разложение функций p_j по степеням $\rho_1, \ldots, \rho_k$ при $\eta_1 = 0$, $\ldots$, $\eta_n = 0$ начинаются с форм степени $v \geq m+1$. Ряды, в которые разлагаются функции R_s, θ_s, p_j, сходятся равномерно относительно z. Обозначим $R^{(0)}$ форму порядка m, с которой начинается разложение функции R_s при $\eta_1 = 0, \ldots, \eta_n = 0$.

Теорема 2.2. *Если нулевое решение системы*

$$\frac{d\rho_s}{dz} = \mu R^{(0)}, \quad s = 1, \ldots, k, \tag{2.12}$$

асимптотически устойчиво, то нулевое решение системы (2.10) *также асимптотически устойчиво. При этом имеют место оценки при* $z \geq 0$

$$|\rho_s| \leq \psi(z),\ |\eta_j| \leq \psi(z), \tag{2.13}$$

где

$$\psi(z) = c_1(\sum_{s=1}^{k} \rho_s^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} |\eta_j^{(0)}|) \times (1 + c_2(\sum_{s=1}^{k} |\rho_s^{(0)}| + \sum_{j=1}^{n} |\eta_j^{(0)}|)^{m-1} z)^{-1/m-1}.$$

Здесь c_1, c_2 *- положительные постоянные,* $\rho_s^{(0)}$ *,* $\eta_j^{(0)}$ *- значения* ρ_s, η_j *при* $z = 0$.

Доказательство. В силу асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (2.12) существуют положительно определенные функции V и W, обладающие свойствами: 1) функция V имеет порядок $l + 1 - m$, функция W имеет порядок l; 2) $\frac{\partial V}{\partial z} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial V}{\partial \rho_s} - R_s^{(0)} = -W$. Построим положительно определенную квадратичную форму V_1, удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial \eta_j} \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ji}\eta_i = -\sum_{i=1}^{m} \eta_i^2.$$

Рассмотрим полную производную функции $U = V + V_1$ в силу системы (2.12):

$$\frac{dU}{dz} = \frac{dV}{dz} + \frac{dV_1}{dz} = -W - \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial V}{\partial \rho_s} \times (R_s - R_s^{(0)}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial \eta_j} p_j.$$

В малой окрестности начала координат справедливы оценки [1]

$$|\sum_{s=1}^{k} \frac{\partial V}{\partial \rho_s}(R_s - R_s^{(0)})| \leq a[\sum_{s=1}^{k} |\rho_s|]^{i+1},$$

$$|\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial n_j}| \leq a[\sum_{s=1}^{k} |p_s|]^{m+1} \sum_{s=1}^{k} |\eta_j| + b \sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^2 \sum_{s=1}^{k} |\rho_s|,$$

где $a > 0, b > 0$. Функция U является положительно определенной, а ее производная dU/dz, вычисленная в силу системы (2.12), является отрицательно определенной функцией при $l = m + 1$. Следовательно, решение

$$\rho_1 = \ldots \rho_k = 0,\ \eta_1 = \ldots = \eta_m = 0,$$

$$\theta_1 = \lambda_1 z, \quad \theta_2 = \lambda_2 z, \ldots, \theta_k = \lambda_k z$$

системы (2.12) асимптотически устойчиво при $l = m+1$, и U удовлетворяет неравенствам

$$a_1(\sum_{j=1}^{k} |\rho_s|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^2) \leq U \leq a^2(\sum_{s=1}^{k} |\rho_s|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^2), \tag{2.14}$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. В малой окрестности начала координат справедливы неравенства

$$-b_1 U \leq \frac{dU}{dz} \leq -b_2 U^{(m+1)/2}, \tag{2.15}$$

где $b_1 > 0$, $b_2 > 0$. Отсюда следует

$$U \leq U_0(1 + \frac{m-1}{2} b_2 U_0^{(m-1)/2} z)^{-2/(m-1)}. \tag{2.16}$$

Из (2.14), (2.16) следует

$$U \leq a_2(\sum_{j=1}^{k} |\rho_s^{(0)}|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\eta_j^{(0)}|^2) \times (1 + \frac{m+1}{2} b_2 a_1 \times (\sum_{s=1}^{k} |\rho_s^{(0)}|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\eta_j^{(0)}|^2)^{(m-1)/2} z)^{-2/(m-1)}.$$

Отсюда и из неравенства (2.16) и следуют доказываемые оценки (2.13).
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

З а м е ч а н и е 2.1. *Из теоремы и определения величин ρ_s, η_j следует, что при $z \geq 0$ справедливы оценки*

$$|x_s| \leq \bar{\psi}(z), \ |y_s| \leq \bar{\psi}(z), \tag{2.17}$$

$$|\xi_j| \leq \bar{\psi}(z), \quad s = 1, \ldots, k, \ j = 1, \ldots, k,$$

где

$$\bar{\psi}(z) = c_1(\sum_{s=1}^{k}(|x_s^{(0)}| + |y_s^{(0)}|) + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(0)}|) \times (1 + c_2(\sum_{s=1}^{k}(|x_s^{(0)}| + |y_s^{(0)}|) + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(0)}|)^{m-1} z)^{-1/(m-1)};$$

параметры c_1, c_2 в функции $\bar{\psi}(z)$ будут зависеть от коэффициентов в разложениях r_s, $\bar{\xi}_j$ [3]. Получив оценки для $|x_s|$, $|y_s|$, $|\xi_j|$, вернемся к уравнению $\dot{z} = r + \mu h$. Оценим величину h:

$$h \leq k_0 z^b c_1(\sum_{s=1}^{k}(|x_s^{(0)}| + |y_s^{(0)}|) + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(0)}|) \times (1 + c_2(\sum_{s=1}^{k}(|x_s^{(0)}| + |y_s^{(0)}|) + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(0)}|)^{m-1} z)^{-a/(m-1)}.$$

Исследуем, при каких условиях $z \to \infty$ при $t \to \infty$. Возможны три случая: 1) $D = b - a/(m-1) = 0$; 2) $D < 0$; 3) $D > 0$. В первых двух случаях за счет выбора $x_s^{(0)}$, $y_s^{(0)}$, $\xi_j^{(0)}$, μ можно сделать $|\mu h| < r/2$. Тогда $z \to \infty$ при $t \to \infty$. В третьем случае можно показать [3], что для любого конечного $\bar{z}$ найдется такое μ_0, что при $|\mu| \leq \mu_0$ на любом движении, начинающемся в области $|x_s^{(0)}| < \delta$, $|y_s^{(0)}| < \delta$, $|\xi_j^{(0)}| < \delta$, будут сохраняться неравенства (2.17), а z будет постоянно возрастать от 0 до $\bar{z}$ при возрастании времени. Таким образом, мы доказали следующие теоремы.

Т е о р е м а 2.3. *Если выполнены условия теоремы 2.2. и $D \leq 0$, то равновесное решение системы (2.7) орбитально асимптотически устойчиво.*

Т е о р е м а 2.4. *Если выполнены условия теоремы 2.2. и* $D > 0$, *то для любого конечного* $\bar{z}$ *за счет выбора* x_s^0, y_s^0, ξ_j, μ *величины* $|x_s|$, $|y_s|$, $|\xi_j|$ *становятся сколь угодно малыми при возрастании времени [4].*

Исследуем теперь равновесное решение на устойчивость. Обозначим равновесное решение $Z(t)$, а гиперплоскость, проходящую через точку $Z(t)$ при фиксированном t перпендикулярно оси z, $-P(t)$. Эта гиперплоскость определяется уравнением

$$(X - Z(t), \dot{Z}(t)) = 0.$$

Интегральная кривая $X(t, X_0)$ достигает $P(t)$ за время $\tau = \tau(t, X_0)$, следовательно, вектор $Y = X(\tau, X_0) - Z(t)$ лежит в $P(t)$. таким образом, выполняется $(Y, \dot{Z}(t)) = 0$. Дифференцируя последние два равенства, получим

$$\dot{\tau} = \frac{r}{r + \mu h}, \quad \dot{x}_s = (-\lambda_s y_s + \mu F_s)\frac{r}{r + \mu h},$$

$$\dot{y}_s = (\lambda_s x_s + \mu G_s)\frac{r}{r + \mu h}, \ \dot{\xi}_j = (\sum_{i=1}^{n} p_{ji}\xi_i + \mu g_i)\frac{r}{r + \mu h}, \tag{2.18}$$

$$s = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Сделаем замену $\tau = t_\theta$. Первое уравнение (2.18) примет вид

$$\dot{\theta} = -\frac{\mu h}{r + \mu h}. \tag{2.19}$$

К системе (2.18) применим теорему 2.2.. Получим оценки

$$|x_s| \le \psi(t), \quad |y_s| \le \psi(t), \quad |\xi_j| \le \psi(t),$$

где

$$\psi(t) = c_1(\sum_{s=1}^{k}(|x_s^{(0)}| + |y_s^{(0)}|) + \sum_{j=1}^{n}|\xi_j^{(0)}|) \times (1 + c_2(\sum_{s=1}^{k}(|x_s^{(0)}| + |y_s^{(0)}|) + \sum_{j=1}^{n}|\xi_j^{(0)}|)^{m-1}t)^{-1/(m-1)}.$$

Интегрируя уравнение (2.19), получим

$$\theta - \theta_0 = \int_0^t -\frac{\mu h}{r + \mu h}d\tau.$$

Величина подынтегральной функции ограничена:

$$|\frac{\mu h}{r + \mu h}| \le c_0(\sum_{s=1}^{k}|x_s^{(0)}| + |y_s^{(0)}|) + \sum_{j=1}^{n}|\xi_j^{(0)}|t^D,$$

где $c_0 > 0$. При $D < -1$ интеграл сходится за счет выбора x_s^0, y_s^0, ξ_j^0, μ; величина $\theta - \theta_0$ становится сколь угодно мала, поэтому верна следующая теорема [5].

Т е о р е м а 2.5. *если выполнены условия теоремы 2.2. и* $D < -1$, *то равновесное решение системы* (2.7) *устойчиво по Ляпунову.*

3. Выводы

Результаты, полученные в настоящей статье, относятся к тому случаю, когда параметр μ мал. Но учитывая, что функция Ляпунова будет представлять собой ряд по степеням параметра, результаты будут оставаться верными и в том случае, когда функция Ляпунова существует (соответствующие ряды сходятся), отрицательна и $z \to \infty$ и при $t \to \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-000624).

Список литературы

1. С. В. Зубов, М. Б. Авдеева, И. С. Стрекопытов, “Последовательная локализация инвариантных множеств”, *«Дифференциальные уравнения»*, Известия Российской академии естественных наук (Рязань), **17**, Рязанский гос. университет, 390000, г. Рязань, ул. Свободы, 46, 2012, 9-12.

2. А. В. Зубов, ,К. А. Пешехонов, С. А. Стрекопытов, М. В. Стрекопытова, “Трехмерные квадратичные системы”, *«Дифференциальные уравнения»*, Известия Российской академии естественных наук (Рязань), **17**, Рязанский гос. университет, 390000, г. Рязань, ул. Свободы, 46, 2012, 13-16.

3. В. И. Зубов, И. В. Зубов, А. Ф. Зубова, А. И. Иванов, “Уравнение для регулярного интеграла”, *«Дифференциальные уравнения»*, Известия Российской академии естественных наук (Рязань), **17**, Рязанский гос. университет, 390000, г. Рязань, ул. Свободы, 46, 2012, 17-20.

4. А. Ф. Зубова, *Математические методы моделирования промышленных процессов и технологий*, СПбГУ, СПб., 2004, 472 с.

5. А. В. Зубов, С. В. Зубов, *Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений*, АООТ «Мобильность-плюс», СПб., 2012, 357 с.

The stability of inlimiting solutions

© L.D. Blistanova[5], V.I. Zubov[6], I.V. Zubov[7], S.A. Strecopitov[8]

Abstract. In article is learning in limiting solutions of systems ordinary differential equations. Here is receiving conditions of stability in limiting solutions estimates on speed approximation trajectories indignant motion from trajectory in indignant

Key Words: vector, own number, matrix, line, number, solution, parameter, equation

[5] Professor, chair of theory control faculty AM-PC, SPbGU; t. Saint-Petersburg
[6] Post-graduate, chair of theory control faculty AM-PC SPbGU; t. Saint-Petersburg
[7] Professor chair of theory control faculty AM-PC, SPbGU; t. Saint-Petersburg
[8] Docent chair of theory control faculty AM-PC, SPbGU; t. Saint-Petersburg