УДК 517.95

О разрешимости смешанной задачи для линейного параболо-гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

© Т. К. Юлдашев[1]

Аннотация. В данной работе рассматриваются вопросы однозначной разрешимости смешанной задачи для линейного параболо-гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в бесконечной полосе.

Ключевые слова: смешанная задача, уравнение смешанного типа, интегро-дифференциальное уравнение, однозначная разрешимость, вырожденные ядра

В области $D \equiv D^+ \cup D^-$ рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма смешанного типа

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\, u(t,x)}{\partial\, t} = \int\limits_0^T K_1(t,s)\dfrac{\partial^2 u(s,x)}{\partial\, x^2}ds + f_1(t,x),\ (t,x)\in D^+, \\ \dfrac{\partial^2\, u(t,x)}{\partial\, t^2} = \int\limits_{-T}^0 K_2(t,s)\dfrac{\partial^2 u(s,x)}{\partial\, x^2}ds + f_2(t,x),\ (t,x)\in D^- \end{cases} \tag{1.1}$$

с условиями

$$u(T,x)=\varphi_1(x),\ u(-T,x)=\varphi_2(x),\ u(+0,x)=u(-0,x),\ x\in R, \tag{1.2}$$

$$u(t,0)=\begin{cases} \varphi_1(0) - M_1\int\limits_t^T a_1(s)ds - \int\limits_t^T f_1(s,0)ds,\ t\in D_T^+, \\ \varphi_1(0)+\varphi_2(0)(t+T)+N_1\int\limits_{-T}^t (t-s)a_2(s)ds + \\ +\int\limits_{-T}^t (t-s)f_2(s,0)ds,\ t\in D_T^-, \end{cases} \tag{1.3}$$

$$u_x(t,0)=\begin{cases} \varphi_1'(0) - M_2\int\limits_t^T a_1(s)ds - \int\limits_t^T f_{1\,x}(s,0)ds,\ t\in D_T^+, \\ \varphi_1'(0)+\varphi_2'(0)(t+T)+N_2\int\limits_{-T}^t (t-s)a_2(s)ds + \\ +\int\limits_{-T}^t (t-s)f_{2\,x}(s,0)ds,\ t\in D_T^-, \end{cases} \tag{1.4}$$

где $f_i(t,x)\in C^{0,2}(D)$, $\varphi_i(x)\in C^2(R)$, $K_i(t,s)=a_i(t)\cdot b_i(s)$, $i=1,2$, $a_1(t),b_1(s)\in C(D_T^+)$, $a_2(t),b_2(s)\in C(D_T^-)$, M_i, N_i – заданные постоянные, $i=1,2$, $D^+\equiv D_T^+\times R$, $D^-\equiv D_T^-\times R$, $D_T^+\equiv[0,T]$, $D_T^-\equiv[-T,0]$, $R\equiv(-\infty,\infty)$, $0<T<\infty$.

Отметим, что изучению дифференциальных уравнений смешанного типа посвящено много работ (см., напр. [1] - [4]). Но, изучению интегро-дифференциальных уравнений смешанного типа посвящено сравнительно мало. Интегро-дифференциальные уравнения имеют особенностей в вопросе однозначной разрешимости [5], [6]. В работе [7] изучена

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursunbay@rambler.ru.

краевая задача для параболо-гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредьгольма в прямоугольнике.

В данной работе рассматриваются вопросы однозначной разрешимости смешанной задачи для линейного параболо-гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в бесконечной полосе. При этом предполагается, что интегральные ядра у заданных уравнений - вырожденные.

Под решением задачи (1.1)-(1.4) в области $D \equiv D^+ \cup D^-$ понимается функция $u(t,x)$, которая в областях D^+ и D^- является регулярным решением соответствующего уравнения и удовлетворяет заданным условиям (1.2)-(1.4).

Сначала рассматривается первое уравнение из (1.1) в области D^+

$$\frac{\partial\, u(t,x)}{\partial\, t} = \int\limits_0^T K_1(t,s)\frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial\, x^2}ds + f_1(t,x),\ (t,x) \in D^+. \tag{1.5}$$

Используется метод интегральных уравнений Фредгольма с вырожденными ядрами. При помощи обозначения

$$c_1(x) = \int\limits_0^T b_1(s)\frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial\, x^2}ds \tag{1.6}$$

интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма (1.5) перепишется в простейшем виде

$$\frac{\partial\, u(t,x)}{\partial\, t} = a_1(t)c_1(x) + f_1(t,x),\ (t,x) \in D^+.$$

С учетом условия (1.2) интегрирование последнего равенства по t дает

$$u(t,x) = \varphi_1(x) - c_1(x)\int\limits_t^T a_1(s)ds - \int\limits_t^T f_1(s,x)ds,\ (t,x) \in D^+. \tag{1.7}$$

Теперь определим $c_1(x)$ в (1.7). Дифференцируя (1.7) два раза по x, получаем

$$u_x(t,x) = \varphi_1'(x) - c_1'(x)\int\limits_t^T a_1(s)ds - \int\limits_t^T f_{1x}(s,x)ds,\ (t,x) \in D^+, \tag{1.8}$$

$$u_{xx}(t,x) = \varphi_1''(x) - c_1''(x)\int\limits_t^T a_1(s)ds - \int\limits_t^T f_{1xx}(s,x)ds,\ (t,x) \in D^+. \tag{1.9}$$

Подстановка (1.9) в (1.6) дает следующее дифференциальное уравнение относительно $c_1(x)$

$$c_1(x) = \int\limits_0^T b_1(s)\left[\varphi_1''(x) - c_1''(x)\int\limits_s^T a_1(\theta)d\theta - \int\limits_s^T f_{1xx}(\theta,x)d\theta\right]ds$$

или

$$c_1(x) = -A\cdot c_1''(x) + F_0(x), \tag{1.10}$$

где

$$A = \int\limits_0^T b_1(s)q_1(s)ds,\ q_1(t) = \int\limits_t^T a_1(s)ds,$$

$$F_0(x) = \varphi_1''(x)\int\limits_0^T b_1(s)ds - \int\limits_0^T b_1(s)\int\limits_s^T f_{1xx}(\theta, x)d\theta ds.$$

Пусть

$$A = \int\limits_0^T b_1(s)q_1(s)ds > 0. \tag{1.11}$$

Тогда уравнение (1.10) запишется в виде

$$c_1''(x) + B\cdot c_1(x) = F(x), \tag{1.12}$$

где $B = A^{-1}$, $F(x) = B\cdot F_0(x)$.

Решая дифференциальное уравнение (1.12) методом вариации произвольных постоянных, получаем

$$c_1(x) = D_1\cos\mu x + D_2\sin\mu x + \frac{1}{\mu}\int\limits_0^x F(y)Q(x,y)dy, \tag{1.13}$$

где $Q(x,y) = \sin\mu(x-y)$, $\mu = \sqrt{B}$, коэффициенты D_i подлежат определению, $i = 1, 2$.

Из (1.13) имеем

$$c_1(0) = D_1,\ c_1'(0) = \mu D_2. \tag{1.14}$$

С учетом (1.14) из (1.7) и (1.8) получаем, что

$$u(t,0) = \varphi_1(0) - D_1\int\limits_t^T a_1(s)ds - \int\limits_t^T f_1(s,0)ds, \tag{1.15}$$

$$u_x(t,0) = \varphi_1'(0) - \mu D_2\int\limits_t^T a_1(s)ds - \int\limits_t^T f_{1x}(s,0)ds. \tag{1.16}$$

Сравнение соотношений (1.15) и (1.16) с заданными условиями (1.3) и (1.4) дает

$$D_1 = M_1,\ D_2 = \frac{M_2}{\mu}.$$

Итак, функция (1.13) принимает вид

$$c_1(x) = M_1\cos\mu x + \frac{M_2}{\mu}\sin\mu x + \frac{1}{\mu}\int\limits_0^x F(y)Q(x,y)dy. \tag{1.17}$$

Подстановка (1.17) в (1.7) дает

$$u(t,x) = \varphi_1(x) + q_1(t)\Big\{M_1\cos\mu x + \frac{M_2}{\mu}\sin\mu x +$$

$$+\frac{1}{\mu}\int\limits_0^x F(y)Q(x,y)dy\Big\} - \int\limits_t^T f_1(s,x)ds,\ (t,x)\in D^+$$

или

$$u(t,x) = \varphi_1(x) - \int\limits_t^T f_1(s,x)ds-$$

$$-q_1(t)\Big\{ M_1 \cos\mu x + \frac{M_2}{\mu}\sin\mu x + \mu\int\limits_0^T b_1(s)ds\int\limits_0^x \varphi_1''(y)Q(x,y)dy-$$

$$-\mu\int\limits_0^x Q(x,y)\int\limits_0^T b_1(s)\int\limits_s^T f_{1yy}(\theta,y)d\theta ds dy\Big\},\ (t,x)\in D^+, \tag{1.18}$$

где $Q(x,y)=\sin\mu(x-y),\ \mu=\sqrt{B}$, $A=\int\limits_0^T b_1(s)q_1(s)ds$, $q_1(t)=\int\limits_t^T a_1(s)ds$.

Итак, в области D^+ решение уравнения (1.5) при соответствующих условиях (1.2)-(1.4) имеет вид (1.18).

Теперь рассмотрим второе уравнение из (1.1) в области D^-

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \int\limits_{-T}^0 K_2(t,s)\frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2}ds + f_2(t,x),\ (t,x)\in D^-. \tag{1.19}$$

Пусть

$$\overline{A} = \int\limits_{-T}^0 b_2(s)q_2(s)ds > 0, \tag{1.20}$$

где $q_2(t)=\int\limits_{-T}^t a_2(s)ds$.

Тогда, решая уравнения (1.19) в области D^- аналогичным образом, получим его общее решение в следующем виде

$$u(t,x) = E_1(x) + E_2(x)(t+T) + \int\limits_{-T}^t (t-s)f_2(s,x)ds+$$

$$+q_2(t)\Big\{ N_1 \operatorname{ch}\nu x + \frac{N_2}{\nu}\operatorname{sh}\nu x - \nu\int\limits_{-T}^0 b_2(s)\int\limits_0^x \overline{Q}(x,y)\Big(E_1''(y)+E_2''(y)(s+T)\Big)dsdy-$$

$$-\nu\int\limits_0^x \overline{Q}(x,y)\int\limits_{-T}^0 b_2(s)\int\limits_{-T}^s (s-\theta)f_{2yy}(\theta,y)d\theta ds dy\Big\},\ (t,x)\in D^-, \tag{1.21}$$

где $E_i(x)$ – произвольные функции, которые подлежат определению, $i=1,2$, $\overline{Q}(x,y)=\operatorname{sh}\nu(x+y)+\operatorname{sh}\nu(x-y),\ \nu=\sqrt{\overline{A}^{-1}}$, $\overline{A}=\int\limits_{-T}^0 b_2(s)q_2(s)ds$, $q_2(t)=\int\limits_{-T}^t a_2(s)ds$.

Используя условию (1.2), из (1.18) и (1.21) получаем

$$u(-T,x)=\varphi_2(x)=E_1(x), \tag{1.22}$$

$$u(+0,x)=\varphi_1(x)-\int\limits_0^T f_1(s,x)ds-$$

$$-q_1(0)\Big\{M_1\cos\mu x+\frac{M_2}{\mu}\sin\mu x+\mu\int\limits_0^T b_1(s)ds\int\limits_0^x \varphi_1''(y)Q(x,y)dy-$$

$$-\mu\int\limits_0^x Q(x,y)\int\limits_0^T b_1(s)\int\limits_s^T f_{1yy}(\theta,y)d\theta dsdy\Big\}, \tag{1.23}$$

$$u(-0,x)=\varphi_2(x)+T\cdot E_2(x)-\int\limits_{-T}^0 sf_2(s,x)ds+$$

$$+q_2(0)\Big\{N_1\operatorname{ch}\nu x+\frac{N_2}{\nu}\operatorname{sh}\nu x-\nu\int\limits_{-T}^0 b_2(s)\int\limits_0^x \overline{Q}(x,y)\Big(\varphi_2''(y)+E_2''(y)(s+T)\Big)dsdy-$$

$$-\nu\int\limits_0^x \overline{Q}(x,y)\int\limits_{-T}^0 b_2(s)\int\limits_{-T}^s (s-\theta)f_{2yy}(\theta,y)d\theta dsdy\Big\}. \tag{1.24}$$

В силу того, что $u(+0,x)=u(-0,x)$, из (1.23) и (1.24) придем к интегро-дифференциальному уравнению относительно неизвестного коэффициента $E_2(x)$:

$$E_2(x)=\Psi(x)+\lambda\int\limits_0^x \overline{Q}(x,y)E_2''(y)dy, \tag{1.25}$$

где

$$\Psi(x)=\frac{1}{T}\Big\{\Phi(x)-\varphi_2(x)+\int\limits_{-T}^0 sf_2(s,x)ds-q_2(0)\Big[N_1\operatorname{ch}\nu x+\frac{N_2}{\nu}\operatorname{sh}\nu x-$$

$$-\nu\int\limits_{-T}^0 b_2(s)\int\limits_0^x \overline{Q}(x,y)\varphi_2''(y)dsdy-$$

$$-\nu\int\limits_0^x \overline{Q}(x,y)\int\limits_{-T}^0 b_2(s)\int\limits_{-T}^s (s-\theta)f_{2yy}(\theta,y)d\theta dsdy\Big]\Big\},$$

$\Phi(x)$ определяет правую часть (1.23), $\lambda=\nu\int\limits_{-T}^0 b_2(s)(s+T)ds$.

Поскольку $\Psi(x)$ и $\overline{Q}(x,y)$ – по x два раза непрерывно дифференцируемые функции, то нетрудно убедиться, что интегро-дифференциальное уравнение (1.25) имеет единственное два раза непрерывно дифференцируемое решение на числовой оси. Это решение находится методом последовательных приближений. При этом итерационный процесс Пикара можно строить следующим образом:

$$E_2^1(x)=\Psi(x),\ E_2^{k+1}(x)=\Psi(x)+\lambda\int\limits_0^x \overline{Q}(x,y)E_2^{k\,\prime\prime}(y)dy,\ k=1,2,\ldots .$$

Подставляя (1.22) и решение интегро-дифференциального уравнения (1.25) в (1.21), завершим процесс отыскания решения поставленной задачи (1.1)-(1.4).

Таким образом, доказано, что справедлива следующая

Теорема 1.1. *Пусть:*
1) Выполняются условия (1.11) *и* (1.20) *;*
2) $K_i(t,s) = a_i(t) \cdot b_i(s)$, $i = 1, 2$ *;*
3) $max\Big\{|\varphi_i(x)|; |f_i(t,x)|\Big\} < \infty$, $i = 1, 2$ *;*
4) $\left|\int\limits_0^x \varphi_1''(y) Q(x,y) dy\right| < \infty$ *;*
5) $\left|\int\limits_0^x Q(x,y) f_{1yy}(t,y) dy\right| < \infty$ *;*
6) $\left|\int\limits_0^x \overline{Q}(x,y) \Big(\varphi_1''(y) + \varphi_2''(y)(t+T)\Big) dy\right| < \infty$ *;*
7) $\left|\int\limits_0^x \overline{Q}(x,y) f_{2yy}(t,y) dy\right| < \infty$ *.*
Тогда в области D *существует единственное решение задачи* (1.1)-(1.4).

Список литературы

1. Бицадзе А. В., *Уравнения смешанного типа*, Изд-во АН СССР, М., 1959, 164 с.
2. Джураев Т. Дж., Сопуев А., Мамажонов М., *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа*, Фан, Ташкент, 1986, 220 с.
3. Моисеев Е. И., *Уравнения смешанного типа со спектральным параметром*, Изд-во МГУ, М., 1988, 152 с.
4. Салахитдинов М. С., Уринов А. К., *Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром*, Фан, Ташкент, 1997, 165 с.
5. Быков Я. В., *О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений*, Изд-во Кирг.ГУ, Фрунзе, 1957, 328 с.
6. Иманалиев М., *Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем*, Илим, Фрунзе, 1974, 352 с.
7. Юлдашев Т. К., "Краевая задача для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений параболо-гиперболического типа второго порядка с максимумами", *Исследования по интегро-дифференц. уравнениям*, **25** (1994), 24–29.

On solvability of mixed value problem for linear parabolo-hyperbolic Fredholm integro-differential equation

© **T. K. Yuldashev**[2]

Abstract. In this paper it is considered the questions of one-value solvability of mixed value problem for linear parabolo-hyperbolic Fredholm integro-differential equation in an infinite strip.
Key Words: mixed value problem, mixed type equation, integro-differential equation, one-value solvability, degenerate kernels

[2] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursunbay@rambler.ru.