УДК 517.929

Обобщение реберной теоремы

© С. В. Зубов [1], М. В. Стрекопытова [2], О. С. Стрекопытова [3]

Аннотация. Работа является продолжением исследований авторов по робастному поведению интервальных семейств полиномов. Доказано обобщение реберной теоремы для аффинных семейств полиномов из класса (n,k) - эквивалентности. Обсуждаются сходство и различия непрерывного и дискретного случаев.

Ключевые слова: семейство полиномов, параллелепипед, реберный полином, мнимая ось, эквивалентность.

Как известно, для интервальных семейств полиномов неопределенными параметрами являются сами коэффициенты полиномов. Здесь рассматривается более сложный случай - аффинное семейство полиномов

$$\tilde{F}(s,Q) = \{F(s,q) = F_0(s) + q_1F_1(s) + \ldots + q_lF_l(s), \quad |q_i| \leq \gamma,\, i = \overline{1,l}\}. \tag{1.1}$$

с параметрами, изменяющимися в кубе, γ - размах неопределенности коэффициентов,

$$Q = \{q \in R^l : \|q\|_\infty \leq \gamma\}. \tag{1.2}$$

где $\|q\|_\infty$ - норма, $\|q\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq l}|q_i|$.

Заметим, что Q может быть параллелепипедом, если $|q_i| \leq \alpha_i\gamma$, α_i - масштабные множители, $\alpha_i > 0$. Однако, заменой $\tilde{q}_i = \frac{q_i}{\alpha_i}$ можно легко свести задачу, где Q - параллелепипед, к задаче, где $\tilde{Q}$ - куб.

Определение 1.7. *Одномерное семейство вида*

$$\{F(s,q) : |q_i| = \gamma,\, i \neq k,\, |q_k| \leq \gamma\} \tag{1.3}$$

называется реберным полиномом, а вершинными полиномами называются полиномы вида $F(s,q)$, $q_i = \pm\gamma$, $i = \overline{1,l}$.

Геометрически вершинные и реберные полиномы соответствуют вершинам и ребрам куба (1.2), т. е. реберный полином "соединяет"два "соседних"вершинных полинома (соответствующих соседним вершинам куба), и всего имеется $l \cdot 2^{l-1}$ реберных полиномов.

Определение 1.8. *Назовем полином степени* n *из класса* (n,k) *- эквивалентности, если у него* k *корней справа, а* $n-k$ *слева от мнимой оси с учетом кратностей.*

Теорема 1.5. *Если полиномы с комплексными коэффициентами* $\varphi_1(s)$ *и* $\varphi_2(s)$ *принадлежат классу* (n,k) *- эквивалентности, то для принадлежности этому классу линейного политопа* $\alpha\varphi_1(s) + (1-\alpha)\varphi_2(s)$, $\alpha \in [0,1]$ *не пересекал отрицательную вещественную полуось. Очевидно что, при* $k = 0$ *получим известный критерий устойчивости линейного политопа [2].*

[1] Доцент, факультет ПМ-ПУ СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Доцент, факультет ПМ-ПУ СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] Аспирант, факультет ПМ-ПУ СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Справедливо следующее утверждение - обобщение реберной теоремы.

Т е о р е м а 1.6. *Пусть* $\tilde{F}(s,Q)$ *- аффинное семейство полиномов* (1.1) *с вещественными коэффициентами и выполняются условия:*

$$deg\,F_i(s) \leq F_0(s), \quad i = \overline{1,l}, \quad degF_0(s) = n, \tag{1.4}$$

$$\gamma \sum_{i=1}^{l} |a_n^i| < |a_n^0|, \quad \gamma \sum_{i=1}^{l} |a_0^i| < |a_0^0|, \tag{1.5}$$

где a_m^i, $i = \overline{1,l}$ *- коэффициенты при* s^m *полиномов* $F_i(s)$. *Пусть полином* $F_0(s)$ *из класса* (n,k) *- эквивалентности. Тогда для принадлежности всего аффинного семейства* (1.1) *классу* (n,k) *- эквивалентности необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий:*

- *либо для любой пары* $F_\mu(s)$, $F_\eta(s)$ *вершинных полиномов, являющихся концами реберного полинома, для их годографов*

$$F_\mu(j\omega) = g_\mu(\omega) + jh_\mu(\omega) \, u \, F_\eta(j\omega) = g_\eta(\omega) + jh_\eta(\omega)$$

выполняется: если $\omega = \omega_0$ *вещественный положительный корень уравнения*

$$g_\mu(\omega)h_\eta(\omega) - g_\eta(\omega)h_\mu(\omega) = 0, \tag{1.6}$$

то при $\omega = \omega_0$ *выполняется неравенство*

$$g_\mu(\omega)g_\eta(\omega) + h_\mu(\omega)h_\eta(\omega) > 0. \tag{1.7}$$

Проверка первого условия - принадлежность линейного политопа (реберного полинома) классу (n,k) - эквивалентности, проводится с помощью графического критерия принадлежности линейного политопа классу (n,k) - эквивалентности, для вещественного случая (теорема 1), для которого робастный критерий Найквиста является частным случаем при $k = 2$ [2], как и реберная теорема об устойчивости аффинного семейства полиномов для приведенной выше теоремы [4].

Д о к а з а т е л ь с т в о. **Достаточность.** Мы воспользуемся теоремой из [55] (обобщение принципа исключения нуля) с $q^0 = 0$ (это значит, что $F_0(s)$ из класса (n,k) - эквивалентности), тогда неравенства (4-5) гарантируют условие $a_n(q) \neq 0$, $q \in Q$, для старшего коэффициента полинома $F(s,q)$. Остается проверить $0 \notin S(\omega)$. Область $S(\omega)$ имеет вид

$$S(\omega) = \{z \in C : \, z = F_0(j\omega) + \sum_{i=1}^{l} q_i F_i(j\omega), \, \|q\|_\infty \leq \gamma\},$$

т. е. аффинный двумерный образ l - мерного куба. Такой образ является многоугольником, стороны которого - образы ребер куба Q. Поскольку $0 \notin S(0)$ (в силу (1.5)), то может оказаться $0 \in S(\omega)$, лишь если 0 будет принадлежать границе $S(\omega)$ для некоторого $\omega > 0$. Однако это невозможно, так как граница соответствует реберным полиномам, а они по предположению находятся в классе (n,k) - эквивалентности.

Во втором случае, если ноль попал на ребро границы $S(\omega)$ для некоторого $\omega = \omega_0$, $\omega_0 > 0$, то это означало бы, что векторы $(g_\mu(\omega_0), h_\mu(\omega_0))$, $(g_\eta(\omega_0), h_\eta(\omega_0))$ являются коллинеарными для какой-то пары (μ,η), $\mu \notin \eta$ и выполняется равенство из (1.6). Но, так как эти векторы разнонаправлены, то неравенство (1.7) было бы нарушено.

Необходимость очевидна, так как из принадлежности аффинного семейства классу (n, k) - эквивалентности следует принадлежность реберных полиномов этому же классу. Второе условие следует из того, что ребра границы множества $S(\omega)$ не содержат нуля, что означает отсутствие разнонаправленных пар векторов $(g_\mu(\omega), h_\mu(\omega))$ и $(g_\eta(\omega), h_\eta(\omega))$ при некотором $\omega_0 > 0$. Хотя ребра $S(\omega)$ могут пересекать мнимую и вещественную оси комплексной плоскости и при некоторых ω_0 равенство в (1.6) может выполняться. Доказательство закончено.

Замечание 1.2. *При $k = 0$ из теоремы 1.6. получим реберную теорему для аффинного семейства полиномов с вещественными коэффициентами.*

Обобщение реберной теоремы (теорема 1.6.) позволяет получить эффективную формулировку принадлежности аффинного семейства классу (n, k) - эквивалентности, если число l неопределенных параметров мало. В этом случае следует проверить все реберные полиномы. Они представляют собой однопараметрические семейства вида $\alpha M(s) + (1 - \alpha)N(s)$ (где $0 \leq \alpha \leq 1$ и $M(s)$, $N(s)$ - два соседних вершинных полинома), и в соответствии с обобщенным критерием Найквиста (теорема 1.5.), роль точки -1 здесь играет $(1 - \alpha)/\alpha$ их принадлежность тому же классу (n, k) - эквивалентности равносильна тому, что полиномы $M(s)$, $N(s)$ из класса (n, k) - эквивалентности, а годограф $G(j\omega) = M(j\omega)/N(j\omega)$ не пересекает отрицательную вещественную полуось. Действительно,

$$\Delta Arg(\alpha M(j\omega) + (1 - \alpha)N(j\omega)) =$$

$$= \Delta Arg N(j\omega) + \Delta Arg(\frac{1-\alpha}{\alpha} + \frac{M(j\omega)}{N(j\omega)}) = \frac{\pi}{2}(n - 2k).$$

Так как $\Delta Arg N(j\omega) = \frac{\pi}{2}(n-2k)$, то $\Delta Arg((1-\alpha)/\alpha+W(j\omega)) = 0$. Однако, если l велико, то число таких проверок значительно (даже для $l = 5$ нужно проверить $l \cdot 2^{l-1} = 80$ реберных полнимов).

Пусть аффинное семейство строится на базе полиномов $F_i(s)$ с комплексными коэффициентами, а множество параметров Q, $Q \in R^l$. Тогда имеет место обобщение теоремы 1.6. с почти той же формулировкой, если добавить, что все $F_i(s)$ - полиномы с комплексными коэффициентами. Кроме того, в условиях (6-7) надо рассматривать частоты ω_0, $\omega \in (-\infty, +\infty)$. В доказательстве применяются обобщенние принципа исключения нуля или обобщение критерия Михайлова для семейств полиномов с комплексными коэффициентами.

Замечание 1.3. *Построить критерии принадлежности аффинных семейств полиномов с комплексными параметрами, т. е. $q = (q_1, q_2, \ldots, q_l)^T$, $q \in Q$, $Q \in C^l$ не удается даже в простейшем случае - исследование робастной устойчивости такого семейства ($k = 0$).*

Дело в том, что граница множества $S(\omega)$ в этом случае состоит из кусков кривых и множество $S(\omega)$ может быть невыпуклым.

Для аффинного семейства дискретных полиномов верны реберная теорема для исследования робастной устойчивости и ее обобщение (теорема 1.6.) для исследования неустойчивости в соответствующих формулировках. Кроме того, максимальный размах неопределенности принадлежности аффинного семейства классу (n, k) - эквивалентности можно найти не только графически, но и по формулам из [4], аналогичным формулам для интервальных дискретных семейств (множество $S(\omega)$ для аффинного семейства является $2l$-угольником, где множество параметров $q \in Q$, $Q \subset R^l$).

Таким образом, как в случае исследования на робастную устойчивость аффинных семейств полиномов, так и в случае их проверки на робастную неустойчивость эти полиномы можно исследовать с помощью аналитических и графических критериев, как в непрерывном, так и в дискретных случаях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. ℵ 10-08-00624).

Список литературы

1. Блистанова Л.Д., Зубов И.В., Зубов Н.В., Северцев Н.А., *Конструктивные методы теории устойчивости и их применение к задачам численного анализа*, ООП НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2002, 119 с.
2. Жабко А.П., Прасолов В.Л., Харитонов В.Л., *Сборник задач и упражнений по теории управления: стабилизация программных движений*, Высшая школа, М., 2003, 285 с.
3. Зеленков Г.А., *Робастная устойчивость в системах первого приближения. Вопросы теории безопасности и устойчивости систем*, ВЦ РАН, М., 2005.
4. Поляк Б.Т., Щербаков П.С., *Робастная устойчивость и управление*, Наука, М., 2002, 303 с.
5. Постников М.М., *Устойчивые многочлены*, Наука, М., 1981, 176 с.
6. Стрейц В., *Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления*, Наука, М., 1985.
7. Marden M., *Geometry of polynomials*, amer. Math. Soc., Rl, 1966.

Generalization of rib theorem

© S. V. Zubov [4], M. V. Strecopitova [5], O. S. Strecopitova [6]

Abstract. The work is appears continuation of investigations authors on robust behavior interval families of polynoms. Is proofs summarization of rib theorem for affine families polynoms from class (n, k) - equivalent. Is discusses resemblance and distinctions in breaking off and discreet cases.

Key Words: the families of polynoms, parallelepiped, rib polynomial, mistakes axis, equivalent

[4] Docent, faculty AM-PC SPbGU, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[5] Docent, faculty AM-PC SPbGU, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[6] Post-graduate, faculty AM-PC SPbGU, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru