УДК 517.929

Существование автоколебаний в динамических системах, устойчивых по Лагранжу

© В. И. Зубов [1], И. В. Зубов[2], А. Ф. Зубова [3], О. С. Стрекопытова [4]

Аннотация. В данной статье изучается динамика систем и характер предельного поведения решений.

Ключевые слова: динамическая система, множество, асимптотическая устойчивость, автоколебание, параметр

Пусть исследуемая система описывается динамической системой $f(p,t)$ в ограниченном замкнутом множестве R евклидова пространства E_n.

Определение 1.3. *Множество $M \subset R$ называется инвариантным по отношению к динамической системе $f(p,t)$, если оно состоит из траекторий этой динамической системы, т.е. из $p \in M$ следует $f(p,I) \subset M$.*

Определение 1.4. *Инвариантное множество $M \subset R$ динамической системы $f(p,t)$ называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \ \rho(p,M) < \delta \Rightarrow \rho(f(p,t),M) < \varepsilon \ \ \forall t > 0$.*

Если δ к тому же можно выбрать так, что будет выполняться

$$\rho(f(p,t),M) \underset{t\to\infty}{\to} 0,$$

то инвариантное множество M называется асимптотически устойчивым.

Согласно терминологии А.М. Ляпунова, устойчивость инвариантного множества M означает устойчивость всех движений $f(p,t)$, где $p \in M$, по отношению к величине $\rho(p,M)$.

Определение 1.5. *Автоколебанием динамической системы $f(p,t)$ называется инвариантное устойчивое по Ляпунову и асимптотически устойчивое множество M, не имеющее собственного подмножества с такими же свойствами [1].*

Определение 1.6. *Точка $q \in R$ называется ω - предельной точкой движения динамической системы $f(p,t)$, если существует последовательность значений параметра $\{t_k\} : t_k \underset{k\to\infty}{\to} \infty$ такая, что*

$$f(p,t_k) \underset{k\to\infty}{\to} q.$$

Множество ω - предельных точек индивидуального движения $f(p,t)$ обозначим Ω_p. Это множество является инвариантным и связным [2]. В нашем случае, когда траектории всех движений принадлежат ограниченному множеству R, множество Ω_p не пусто для любой точки $p \in R$ [3]. Обозначим Ω_f совокупность всех ω - предельных точек движения $f(p,t)$ при $p \in R$: $\Omega_f = \bigcup\limits_{p\in R} \Omega_p$.

[1] аспирант СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г.Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] профессор СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] профессор СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[4] аспирант СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Теорема 1.3. *Множество Ω_f является инвариантным, устойчивым по Ляпунову и асимптотически устойчивым множеством динамической системы $f(p,t)$.*

Доказательство. Множество Ω_f является инвариантным, так как представляет собой совокупность инвариантных множеств Ω_p, где точки p принадлежат замкнутому множеству R. Докажем свойство его устойчивости по Ляпунову. Покажем сначала, что $f(p,t) \underset{t\to\infty}{\to} M \ \ \forall p \in R$. Действительно [4], для каждого индивидуального движения $f(p,t)$ выполнено

$$\rho(f(p,t),\Omega_p) \underset{t\to\infty}{\to} 0.$$

Но по свойству метрического расстояния справедливо

$$\rho(f(p,t),\Omega_f) \leq \rho(f(p,t),\Omega_p).$$

Это означает, что по любому $\varepsilon > 0$ можно указать T такое, что при $t > T$ будет выполнено $\rho(f(p,t),\Omega_f) < \varepsilon \ \ \forall p \in R$. По свойству непрерывности $f(p,t)$ по своим аргументам по величинам T, ε можно указать величину $\delta > 0$ такую, что при $\rho(p,\Omega_f) < \delta$ будет выполнено $\rho(f(p,t),\Omega_f) < \varepsilon$ при $0 \leq t \leq T$.

Покажем, что найденная величина δ удовлетворяет определению устойчивости по Ляпунову. Действительно, при выполнении условия $\rho(p,\Omega_f) < \delta$ величина $\rho(f(p,t),\Omega_f)$ остается меньше величины ε на интервале $[0,T]$ по свойству интегральной непрерывности и на интервале $(T,+\infty)$ по доказанному выше свойству, из которого следует также асимптотическая устойчивость множества Ω_f.
Доказательство закончено.

Теорема 1.4. *Множество Ω_f содержит автоколебание.*

Доказательство. Действительно, если у Ω_f нет собственного подмножества с установленными свойствами, то оно само является автоколебанием, если есть, то возьмем это подмножество в качестве "подозрительного"на автоколебание. Продолжая данный процесс, можно найти множество, обладающее установленными в теореме 1 свойствами и не имеющее собственного подмножества с указанными свойствами, которое и будет являться автоколебанием.

Из полученного результата следует наличие предельного режима у броуновского движения. Иными словами, совокупность движений в ограниченном множестве имеет предельный режим, однако структура этого предельного режима может быть весьма сложной. Имеющиеся примеры странных аттракторов доказывают это.

Наличие только неустойчивых по отношению к расстоянию между ними движений, принадлежащих предельному режиму, показывает, что в этом случае траектории предельного режима Ω_f будут плотными [4].
Доказательство закончено.

Замечание 1.1. *Следует отметить, что понятие устойчивости и асимптотической устойчивости инвариантного множества подразумевает его изолированность, т.е. что существуют точки пространства, не принадлежащие инвариантному множеству и находящиеся в его достаточно малой окрестности. Если таких точек нет, то и исследование устойчивости инвариантного множества становится бессмысленным. Возможно, что условие следовало бы включить*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. ℵ 10-08-000624).

Список литературы

1. И. В. Зубов, Н. В. Зубов, М. В. Стрекопытова, *Анализ управляемых систем и равновесных движений*, ООП НИИ Химии, СПб., 2012, 322 с.
2. А. Ф. Зубова, *Математические методы моделирования промышленных процессов и технологий*, СПбГУ, СПб., 2004, 472 с.
3. С. В. Зубов, М. В. Стрекопытова, *Анализ равновесных движений и расчетная устойчивость*, СПбГУ, СПб., 2010, 446 с.
4. А. В. Зубов, С. В. Зубов, *Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений*, ВВМ, СПб., 2011, 323 с.

The existing auto oscillations in dynamics systems is stabilizes on Lagransh

© V.I. Zubov[5], I.V. Zubov[6], A.F. Zubova[7], O.S. Strecopitova[8]

Abstract. In giving article is learning dynamics of systems and character of limiting behavior solutions.
Key Words: dynamical system, multitude, asymptotical stability, auto oscillation, parameter

[5] Post-graduate, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[6] Lecturer, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[7] Professor, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[8] Post-graduate, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru