УДК 519.63

Итеративный метод первого порядка для аккретивных включений в банаховом пространстве

© **И. П. Рязанцева**[1]

Аннотация. Для уравнений с многозначными аккретивными операторами в банаховом пространстве построен итеративный неявный метод первого порядка, получены достаточные условия его сильной сходимости к решению исходной задачи.

Ключевые слова: итеративный метод, аккретивный оператор, резольвента, сходимость, дуальное отображение

Пусть X – строго выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, модуль гладкости которого равен $\rho_X(\tau)$, X^* – пространство, сопряженное X, $\langle u, v\rangle$ – значение линейного функционала $u \in X^*$ на элементе $v \in X$, $B : X \to 2^X$ – m-аккретивный оператор, т.е. $R(\alpha B + E) = X$ при всех $\alpha > 0$, $E : X \to X$ – единичный оператор, $J^s : X \to X^*$ – дуальное отображение в X с масштабной функцией $\mu(t) = t^{s-1}$, $s > 1$, при $s = 2$ имеем нормализованное дуальное отображение $J : X \to X^*$ (см. [1], с.65).

Предположим, что оператор $A : X \to X$ обладает свойствами:

(i) является сильно аккретивным, т.е.

$$\langle J(u-v), Au - Av\rangle \geq M\|u-v\|^2 \quad \forall u, v \in X, \quad M > 0;$$

(ii) удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$\|Au - Av\| \leq L\|u - v\| \quad \forall u, v \in X, \quad L > 0.$$

Рассмотрим в X уравнение

$$Ax + Bx = f \tag{1.1}$$

с многозначным оператором, решение которого понимаем в смысле следующего включения

$$f - Ax \in Bx. \tag{1.2}$$

Используя резольвенту оператора B, определяемую равенством $I_B^\alpha = (\alpha B + E)^{-1}$, от уравнения (1.1) перейдем к уравнению с однозначным оператором

$$x = I_B^\alpha(x - \alpha[Ax - f]). \tag{1.3}$$

Этот переход вызван тем, что построение множества значений многозначного оператора в точке – непростая задача (см. пример 2.4.3 из [1]).

В наших условиях однозначная разрешимость (1.1) доказана в [2]. В дальнейших исследованиях существенную роль играет оператор J^s. Приведем некоторые свойства этого оператора. Прежде всего в наших условиях отметим его однозначность и непрерывность. Кроме того, справедливо неравенство (см. [1], с.79, 88)

$$\langle J^s u - J^s v, u - v\rangle \leq c_1\|u-v\|^2 + c_2\rho_X(\|u-v\|), \tag{1.4}$$

здесь $\|u\| \leq R$, $\|v\| \leq R$, $c_1 = c_3(s-1)$, $c_2 = c_3c_4$, $c_3 = 2^{3s-1}R^{s-2}/s$, $c_4 = \max\{F, R\}$, F – постоянная Фигеля.

Используя (1.4), можно получить оценку сверху для $\|J^s u - J^s v\|$ на $\bar{B}(0,R)$, т.к. подобно [1], с. 83-85 доказывается утверждение.

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, Нижний Новгород; lryazantseva@applmath.ru

Лемма 1.3. *В равномерно гладком банаховом пространстве X справедливо неравенство*

$$\|J^s u - J^s v\| \leq c_1\|u-v\| + 2c_2\frac{q_X(\|u-v\|)}{\|u-v\|} \quad \forall u,v \in \bar{B}(0,R) = \{x \mid \|x\| \leq R\}, \tag{1.5}$$

где

$$q_X(\xi) = \int_0^1 \frac{\rho_X(t\xi)}{t}dt, \;\; \xi \geq 0.$$

Замечание 1.1. *Поскольку (см.* [1], *с.16)*

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\rho_X(t)}{t} = 0, \tag{1.6}$$

то функция $\rho_X(t\xi)/\xi$ определена при всех $\xi \geq 0$. Не нарушая неравенства (1.5), функцию $\rho_X(\tau)$ можно заменить непрерывной функцией $\tilde{\rho}_X(\tau)$ такой, что $\rho_X(\tau) \leq \tilde{\rho}_X(\tau)$ и сохраняющей свойство (1.6). Для пространств Лебега такая функция $\tilde{\rho}_X(\tau)$ существует (см. [1], *с.27).*

Замечание 1.2. *Для нормализованного дуального отображения J верна более точная, чем получаемая из (1.4) оценка (см.* [1], *с.74)*

$$\langle Ju - Jv, u-v\rangle \leq 8\left[\|u-v\|^2 + c_4\rho_X(\|u-v\|)\right],$$

откуда подобно (1.5) получаем

$$\|Ju - Jv\| \leq 8\left[\|u-v\| + 2c_4\frac{q_X(\|u-v\|)}{\|u-v\|}\right] \quad \forall u,v \in \bar{B}(0,R). \tag{1.7}$$

Пользуясь леммой, установим свойства вида (1.5) для операторов J и J^p в пространствах Лебега L^p.

При $p > 2$ и $s = p$ модуль гладкости $\rho_X(\tau) \leq (p-1)\tau^2$ (см. [1], с. 27), функция $q_X(\xi) = (p-1)\xi^2/2$, и в силу (1.5)

$$\|J^p u - J^p v\| \leq [c_1 + (p-1)c_2]\|u-v\|. \tag{1.8}$$

Пусть $p \in (1,2)$, $s = 2$, тогда $\rho_X(\tau) \leq \tau^p/p$ (см. [1], с.27), $q_X(\xi) = \xi^p/p^2$, и из (1.7) имеем

$$\|Ju - Jv\| \leq 8\left[\|u-v\| + \frac{2c_4}{p^2}\|u-v\|^{p-1}\right]. \tag{1.9}$$

Отметим, что отображение J^p в L^p при $p \in (1,2)$ удовлетворяет на X условию Гельдера (см.[1], с. 85)

$$\|J^p u - J^p v\| \leq \frac{4}{p^2(2^{p-1}-1)}\|u-v\|^{p-1}, \tag{1.10}$$

а для J в L^p при $p > 2$ выполнено условие Липшица (см. [1], с. 84)

$$\|Ju - Jv\| \leq (p-1)\|u-v\|. \tag{1.11}$$

Для решения уравнения (1.1) в [2] построен непрерывный метод первого порядка в виде следующей задачи Коши (см. [3]):

$$u'(t) + u(t) = I_B^{\gamma(t)}(u(t) - \gamma(t)[Au(t) - f]), \tag{1.12}$$

$$u(t_0) = u_0 \in X, \quad t_0 \geq 0, \tag{1.13}$$

и доказано утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть X – строго выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, $B : X \to 2^X$ – m-аккретивный ограниченный оператор, оператор $A : X \to X$ обладает свойствами (i) и (ii), $\gamma(t)$ – положительная непрерывная функция, и выполнены условия*

$$\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0, \qquad \int_{t_0}^{\infty} \gamma(t)dt = +\infty,$$

$$sM - L > 0, \tag{1.14}$$

Пусть существует число $r_0 > 0$ такое, что

$$\langle Jy, y - I_B^{\gamma(t)}(y - \gamma(t)[Ay - f])\rangle \geq 0 \quad \text{при} \quad \|y\| \geq r_0. \tag{1.15}$$

Тогда существует единственное решение $u(t) \in C^1[t_0, +\infty)$ задачи Коши (1.12), (1.13) при любом $u_0 \in X$, и $u(t) \to x$ при $t \to \infty$, где x – единственное решение уравнения (1.1).

Замечание 1.3. *Отметим, что предположение (1.15) есть одно из достаточных условий разрешимости уравнения (1.3) (см., например,* [1], *с.15, 158).*

Пусть пространство X, операторы A и B удовлетворяют условиям теоремы 1.1., и верно (1.14). Построим разностный аналог метода (1.12), (1.13) следующего вида:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau_{n+1}} + u_{n+1} = I_B^{\gamma_n}(u_{n+1} - \gamma_n[Au_{n+1} - f]), \quad n = 1, 2, ..., \tag{1.16}$$

где элемент $u_1 \in X$ задается, $\{\tau_n\}$ и $\{\gamma_n\}$ – ограниченные последовательности положительных чисел, оператор $I_B^{\gamma_n} = (\gamma_n B + E)^{-1} : X \to X$ есть резольвента оператора B.

Установим однозначную разрешимость уравнения (1.16) относительно u_{n+1}. Для этого от (1.16) перейдем к эквивалентному уравнению

$$\gamma_n B\left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau_{n+1}} + u_{n+1}\right) + \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau_{n+1}} + \gamma_n(Au_{n+1} - f) = 0, \tag{1.17}$$

или

$$B\left(\xi_{n+1}u_{n+1} - \frac{u_n}{\tau_{n+1}}\right) + \frac{u_{n+1}}{\gamma_n\tau_{n+1}} + Au_{n+1} = f + \frac{u_n}{\gamma_n\tau_{n+1}}, \tag{1.18}$$

где $\xi_{n+1} = 1 + 1/\tau_{n+1}$. Поскольку $\xi_n > 0$ при всех $n \geq 1$, то для m-аккретивного оператора B нетрудно убедиться в m-аккретивности отображения BT, где $Tx = \xi_{n+1}x - u_n/\tau_{n+1}$. Следовательно, существование единственного решения (1.18) (а значит, и (1.16), (1.17)) устанавливается теми же рассуждениями, что и для уравнения (1.1).

Исследуем поведение последовательности $\{u_n\}$ при $n \to \infty$. Пусть элемент $h_{n+1} \in B(\eta_{n+1} + u_{n+1})$ такой, что (см. (1.17))

$$\gamma_n h_{n+1} + \eta_{n+1} + \gamma_n(Au_{n+1} - f) = 0, \qquad \eta_{n+1} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau_{n+1}}. \tag{1.19}$$

Кроме того, согласно (1.2), существует элемент $v \in Bx$ такой, что

$$v + Ax - f = 0. \tag{1.20}$$

Умножив (1.20) на γ_n, имеем

$$\gamma_n v + \gamma_n(Ax - f) = 0. \tag{1.21}$$

Теперь из (1.19) и (1.21) получаем, что

$$\begin{aligned}\langle J^s(\eta_{n+1} &+ u_{n+1}-x),\eta_{n+1}\rangle+\gamma_n[\langle J^s(\eta_{n+1}+u_{n+1}-x),h_{n+1}-v\rangle+\\ &+ \langle J^s(\eta_{n+1}+u_{n+1}-x),Au_{n+1}-Ax\rangle]=0. \end{aligned}\tag{1.22}$$

Пусть предположение (1.15) верно при замене $\gamma(t)$ на γ_n, т.е. справедливо неравенство

$$\langle Jy, y-I_B^{\gamma_n}(y-\gamma_n[Ay-f])\rangle\geq 0 \quad \text{при} \quad \|y\|\geq r_0. \tag{1.23}$$

Докажем ограниченность $\{u_n\}$. Предположим противное: пусть $\|u_n\|\to\infty$. Тогда при достаточно больших n справедливо неравенство $\|u_n\|\geq r_0$, и в силу (1.23) имеем

$$\langle Ju_{n+1}, u_{n+1}-I_B^{\gamma_n}(u_{n+1}-\gamma_n[Au_{n+1}-f])\rangle\geq 0.$$

Кроме того, из (1.16) получаем

$$\langle Ju_{n+1}, \eta_{n+1}+u_{n+1}-I_B^{\gamma_n}(u_{n+1}-\gamma_n[Au_{n+1}-f])\rangle=0.$$

Отсюда с учетом последнего неравенства получаем, что $\langle Ju_{n+1},\eta_{n+1}\rangle\leq 0$ или $\|u_{n+1}\|\leq\|u_n\|$. Таким образом, доказана ограниченность $\{u_n\}$. Теперь из (1.16) вытекает ограниченность $\{(u_{n+1}-u_n)/\tau_{n+1}\}$. Пусть

$$\|u_n\|\leq\bar{C}, \quad \frac{\|u_{n+1}-u_n\|}{\tau_{n+1}}\leq\tilde{C} \quad \forall n. \tag{1.24}$$

Определим величину $r_n=\|u_n-x\|^s/s$. Установленные оценки (1.24) и свойства (i), (ii) оператора A позволяют записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned}&\langle J^s(\eta_{n+1}+u_{n+1}-x),Au_{n+1}-Ax\rangle=\langle J^s(u_{n+1}-x),Au_{n+1}-Ax\rangle+\\ +\ &\langle J^s(\eta_{n+1}+u_{n+1}-x)-J^s(u_{n+1}-x),Au_{n+1}-Ax\rangle\geq sMr_{n+1}-\\ -\ &L\|u_{n+1}-x\|C(\|\eta_{n+1}\|)\geq(sM-L)r_{n+1}-\frac{L}{m}C^m(\|\eta_{n+1}\|),\ \frac{1}{s}+\frac{1}{m}=1, \end{aligned}\tag{1.25}$$

причем постоянные c_1 и c_2, определяющие функцию $C(\xi)=c_1\xi+2c_2q_X(\xi)/\xi$, зависят от $R=\bar{C}+\tilde{C}+\|x\|$. Здесь мы использовали неравенство $ab\leq a^s/s+b^m/m,\ a>0,\ b>0$. Отметим, что с помощью (1.6), нетрудно проверить равенство $C(0)=0$.

Первое слагаемое в (1.22) с учетом монотонности оператора J^s оценим следующим образом:

$$\begin{aligned}\langle J^s(\eta_{n+1} &+ u_{n+1}-x),\eta_{n+1}\rangle=\langle J^s(\eta_{n+1}+u_{n+1}-x)-J^s(u_{n+1}-x),\eta_{n+1}\rangle+\\ &+ \langle J^s(u_{n+1}-x),\eta_{n+1}\rangle\geq\frac{1}{\tau_{n+1}}\langle J^s(u_{n+1}-x),u_{n+1}-u_n\rangle. \end{aligned}\tag{1.26}$$

Для всякого выпуклого дифференцируемого по Гато на X функционала $\varphi: X\to R$ верно неравенство (см. [1], с.37, 38)

$$\varphi(x)-\varphi(y)\geq\langle \mathrm{grad}\varphi(y),x-y\rangle \quad \forall x,y\in X.$$

Применив последнее неравенство к функционалу $\varphi(x)=\|x\|^s/s$, из (1.26) имеем

$$\langle J^s(\eta_{n+1}+u_{n+1}-x),\eta_{n+1}\rangle\geq\frac{1}{\tau_{n+1}}(r_{n+1}-r_n). \tag{1.27}$$

Из (1.17) без труда выводится оценка

$$\|\eta_{n+1}\| \leq \tilde{a}_1\gamma_n \quad \forall n, \quad \tilde{a}_1 > 0. \tag{1.28}$$

Теперь из (1.22) с учетом (1.25), (1.27), (1.28) получаем рекурентное неравенство

$$r_{n+1} \leq \left(1 - \frac{\gamma_n\tau_{n+1}\xi_0}{1+\gamma_n\tau_{n+1}\xi_0}\right) r_n + \gamma_n\tau_n \frac{L}{m(1+\gamma_n\tau_{n+1}\xi_0)} C^m(\tilde{a}_1\gamma_n), \;\; \xi_0 = sM - L,$$

и лемма из работы [4], с. 385 позволяет установить утверждение.

Теорема 1.2. *Пусть X – строго выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, $B : X \to 2^X$ – m-аккретивный ограниченный оператор, оператор $A : X \to X$ обладает свойствами (i) и (ii), $\{\gamma_n\}$, $\{\tau_n\}$ – ограниченные последовательности положительных чисел, выполнены условия (1.14),*

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n\tau_{n+1} = +\infty,$$

и верно (1.15) при $\gamma(t) = \gamma_n$. Тогда последовательность $\{u_n\}$ определяется однозначно из (1.16), и при любом $u_1 \in X$ сходится по норме пространства X к единственному решению уравнения (1.1).

Замечание 1.4. *В банаховом пространстве величина $\langle J^s x - J^s y, x - y\rangle$ сверху и снизу оценивается разными степенями $\|x - y\|$, причем оценки носят локальный характер, поэтому в банаховом пространстве в отличие от гильбертова вместо $\gamma_n = \gamma > 0$ (см., например,* [5] *и* [6]*) выбрана последовательность $\{\gamma_n\}$ со свойствами, указанными в теореме 1.2..*

Замечание 1.5. *Пусть $X = L^p$, $p > 1$. В зависимости от s неравенство (1.5) принимает вид либо (1.8), (1.9), либо (1.10), (1.11). В теореме 1.2. исследован случай условий (1.8), (1.9). При выполнении (1.10), (1.11) утверждение теоремы 1.2. сохраняется, при этом доказательство практически не меняется.*

Список литературы

1. Рязанцева И.П., *Избранные главы теории операторов монотонного типа*, Издательство НГТУ, Нижний Новгород, 2008.

2. Рязанцева И.П., “Непрерывный метод регуляризации первого порядка для смешанных вариационных неравенств”, *Материалы Девятой Всероссийской конференции "Сеточные методы для краевых задач и приложения посвященной 80-летию со дня рождения А.Д.Ляшко.*, 2010, 373-379.

3. Антипин А.С., “Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования”, *Вопросы кибернетики. Вычисл. вопросы анализа больших систем. М.: Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика"АН СССР*, 1989, 5–43.

4. Alber Ya., Ryazantseva I., *Nonlinear ill-posed problems of monotone type*, Springer, Dordrecht, 2006.

5. Рязанцева И.П., “Методы первого порядка для некоторых квазивариационных неравенств в гильбертовом пространстве”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:2 (2007), 189–196.

6. Noor M.A., Rassias T.M., “Resolvent equations for set-valued mixed variational inequalities”, *Nonlinear Analysis*, **42**:1 (2000), 71–83.

First-order iterative method for accretive inclusions in Banach space

© **I. P. Ryazantseva**[2]

Abstract. First-order iterative method be constructed for equations in Banach space with set-valued accretive operatorsl. Sufficient conditions of convergence to solution of initial problem are obtained.

Key Words: iterative method, accretive operator, resolvent, convergence, duality mapping

[2] Professor of Applied Mathematics Chair, Nizhnii Novgorod State Tehnical University after R.A. Alekseev, Nizhnii Novgorod; lryazantseva@applmath.ru