УДК 517.9

Пример диффеоморфизма «источник-сток» на двумерной сфере, не включаемого в гладкий поток

© О. В. Починка[1], А. А. Романов[2]

Аннотация. Одним из классических результатов Дж. Палиса [4] является включение любого градиентно-подобного двумерного каскада в топологический поток при условии, что все его неблуждающие точки неподвижны. Напротив, в гладкий поток среди них включается лишь нигде не плотное множество, что следует из работы М. Брина [1]. Целью данной работы является аналитическое построение примера диффеоморфизма «источник-сток» на $\mathbb{S}^2$, не включаемого в гладкий поток.

Ключевые слова: включение в гладкий поток, диффеоморфизм «источник-сток»

1. Введение и формулировка результатов

Проблема включения диффеоморфизма в поток является классической. Детальный обзор результатов, полученных в этой области, изложен в [6]. В работе [5] доказано, что множество C^r-диффеоморфизмов ($r \geq 1$), включающихся в C^1-поток, является подмножеством первой категории в $Diff^r(M^n)$. Согласно [1] множество C^2-диффеоморфизмов, включающихся в C^1-гладкий поток, нигде не плотно в пространстве диффеоморфизмов Морса-Смейла. Однако доказательство последнего результата не носит конструктивный характер. В настоящей работе аналитически строится пример C^2-каскада, не включающегося ни в какой гладкий поток. Дадим необходимые определения.

C^m-потоком ($m \geq 0$) на гладком многообразии M^n называется непрерывно зависящее от $t \in \mathbb{R}$ семейство C^m-диффеоморфизмов $X^t : M^n \to M^n$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $X^0(x) = x$ для любой точки $x \in M^n$;

2) $X^t(X^s(x)) = X^{t+s}(x)$ для любых $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in M^n$.

C^0-поток еще называют *топологическим потоком.* Заменив $\mathbb{R}$ на $\mathbb{Z}$, получаем определение дискретной динамической системы или *каскада.* Будем говорить, что диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ включается в C^m-поток, если f является сдвигом на единицу времени вдоль траекторий некоторого C^m-потока X^t ($f = X^1$).

Траекторией или орбитой точки $x \in M^n$ называется множество $\mathcal{O}_x = \{f^t(x), t \in \mathbb{R}\ (\mathbb{Z})\}$. Точка $x \in M^n$ называется *неподвижной точкой потока f^t (каскада f)*, если $\mathcal{O}_x = \{x\}$. Точка $x \in M^n$ называется *периодической точкой* потока f^t (каскада f), если существует число $per(x) > 0$ ($per(x) \in \mathbb{N}$) такое, что $f^{per(x)}(x) = x$, но $f^t(x) \neq x$ для всех действительных (натуральных) чисел $0 < t < per(x)$. Число $per(x)$ называется *периодом периодической точки x*.

Для каскада f точка $x \in M^n$ называется *блуждающей*, если существует открытая окрестность U_x точки x такая, что $f^t(U_x) \cap U_x = \emptyset$ для для всех $t \in \mathbb{N}$. В противном случае точка x называется *неблуждающей.* Множество всех неблуждающих точек каскада f называется *неблуждающим множеством* и обозначается Ω_f.

[1] Профессор кафедры теории функций, ННГУ им. Н.И. Лобачевского; olga-pochinka@yandex.ru
[2] Магистрант кафедры теории функций, ННГУ им. Н.И. Лобачевского; romanov18.04@mail.ru

Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм и $f(p) = p$. Точка p является *гиперболической* тогда и только тогда, когда среди собственных чисел матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)|_p$ (матрицы, состоящей из частных производных в точке p функций, задающих отображение) нет чисел, по модулю равных 1. Если при этом все собственные числа по модулю меньше 1, то p называется *стоковой точкой*; если все собственные числа по модулю больше 1, то p называется *источниковой* точкой. Гиперболическая неподвижная точка, не являющаяся стоковой или источниковой, называется *седловой точкой* или *седлом.*

Если p — периодическая точка f с периодом $per(p)$, то, применяя предыдущую конструкцию к диффеоморфизму $f^{per(p)}$, получаем классификацию гиперболических периодических точек, аналогичную классификации неподвижных.

Картина траекторий каскада в фазовом пространстве около гиперболических точек представлена на рисунке 1.

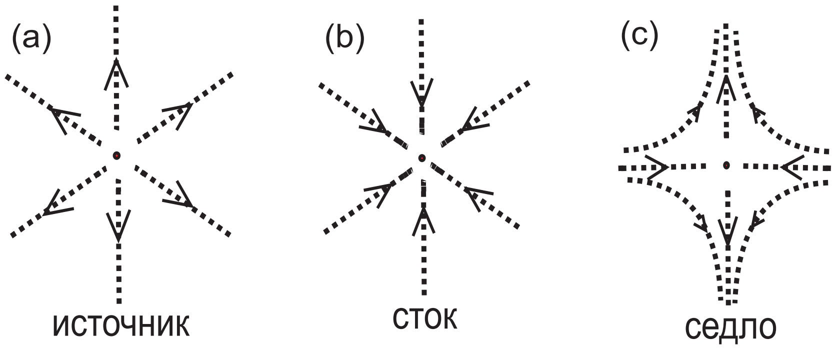

Рис. 1: Траектории каскада в окрестности гиперболической неподвижной точки: (a) источника; (b) стока; (c) седла.

У каждой гиперболической неподвижной точки p в силу теоремы Адамара-Перрона (см., например, книгу [3]) существуют *устойчивое* W_p^s и *неустойчивое* W_p^u многообразия, которые в случае каскада определяются следующим образом:

Пусть p — неподвижная гиперболическая точка для диффеоморфизма f, и d — метрика, индуцированная римановой метрикой на T_pM^n. Тогда для p существует устойчивое многообразие $W_p^s = \{y \in M^n : d(f^k(p), f^k(y)) \to 0 \text{ при } k \to +\infty\}$. Неустойчивое многообразие соответственно: $W_p^u = \{y \in M^n : d(f^k(p), f^k(y)) \to 0 \text{ при } k \to -\infty\}$.

Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$, заданный на гладком замкнутом (компактном без края) связном ориентируемом n-многообразии ($n \geq 1$) M^n называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если

1) неблуждающее множество Ω_f конечно и гиперболично;

2) многообразия W_p^s, W_q^u пересекаются трансверсально[3] для любых периодических точек p, q.

Обозначим через $MS(M^n)$ множество диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразии M^n.

Диффеоморфизм $f \in MS(M^n)$ называется диффеоморфизмом "источник-сток", если его неблуждающее множество состоит из одного гиперболического стока и одного гиперболического источника.

Теорема 1.1. *Существует аналитически заданный пример диффеоморфизма типа "источник-сток" на $\mathbb{S}^2$, не включаемого в гладкий поток.*

[3] Понятие трансверсальности заключается в следующем: говорят, что два гладких подмногообразия X_1, X_2, принадлежащих n-многообразию M^n, пересекаются трансверсально (находятся в общем положении), если либо $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, либо $T_xX_1 + T_xX_2 = T_xM^n$ для любой точки $x \in (X_1 \cap X_2)$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м РФФИ и гранта Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

2. Пример диффеоморфизма "источник-сток" на $\mathbb{S}^2$, включаемого в гладкий поток

Зададим на плоскости линейное сжатие с неравными коэффициентами $\bar{g}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\bar{g}(x_1,x_2)=\left(\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{3}\right)$. Построим на его основе диффеоморфизм на $\mathbb{S}^2$ в виде композиции $g(x_1,x_2,x_3)=\vartheta_+^{-1}\bar{g}\vartheta_+$, где $\vartheta_+:\mathbb{S}^2\setminus\{N\}\to\mathbb{R}^2$, $\vartheta_+^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{S}^2\setminus\{N\}$ — прямая и обратная стереографические проекции двумерной сферы без северного полюса на плоскость [2], заданные формулами $\vartheta_+(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{x_1}{1-x_3},\frac{x_2}{1-x_3}\right)$, $\vartheta_+^{-1}(x_1,x_2)=\left(\frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2+1},\frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2+1},\frac{x_1^2+x_2^2-1}{x_1^2+x_2^2+1}\right)$.

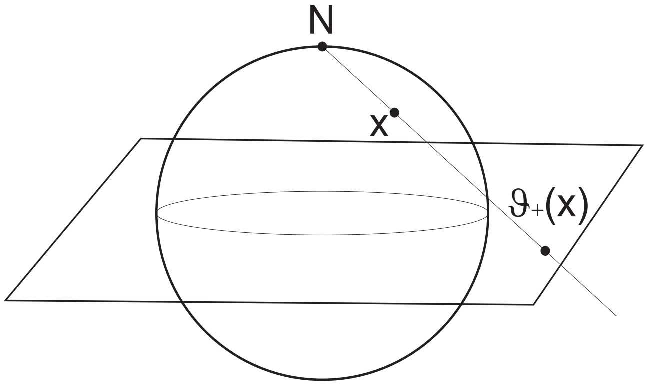

Рис. 2: Стереографическая проекция

Получим $g(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{x_1(1-x_3)}{x_1^2/4+x_2^2/9+(1-x_3)^2},\frac{(2/3)x_2(1-x_3)}{x_1^2/4+x_2^2/9+(1-x_3)^2},\frac{x_1^2/4+x_2^2/9-(1-x_3)^2}{x_1^2/4+x_2^2/9+(1-x_3)^2}\right)$, дополнив до непрерывности неподвижной точкой в северном полюсе $g(0,0,1)=(0,0,1)$.

Этот диффеоморфизм является сдвигом на единицу времени для гладкого потока на $\mathbb{S}^2$, заданного формулой

$g_t(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{2^{-t+1}x_1(1-x_3)}{2^{-2t}x_1^2+3^{-2t}x_2^2+(1-x_3)^2},\frac{2\cdot 3^{-t}x_2(1-x_3)}{2^{-2t}x_1^2+3^{-2t}x_2^2+(1-x_3)^2},\frac{2^{-2t}x_1^2+3^{-2t}x_2^2-(1-x_3)^2}{2^{-2t}x_1^2+3^{-2t}x_2^2+(1-x_3)^2}\right)$, посторенного аналогичным образом из потока на плоскости

$\bar{g}_t(x_1,x_2)=(2^{-t}x_1,3^{-t}x_2)$ и дополненного до непрерывности в точке (0,0,1) как $g_t(0,0,1)=(0,0,1)$.

3. Построение диффеоморфизма "источник-сток" на $\mathbb{S}^2$, не включаемого в гладкий поток

На плоскости зададим диффеоморфизм $\bar{f}(x_1,x_2)$ следующим образом: составим его из двух диффеоморфизмов с различными коэффициентами линейного сжатия $h_1(x_1,x_2)=\left(\frac{x_1}{4},\frac{x_2}{6}\right)$, $h_2(x_1,x_2)=\left(\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{3}\right)$, так, что зона действия первого включает окрестность точки (0,0) (на сфере будет включать окрестность южного полюса), а второго — уходит в бесконечность (на сфере соответственно будет включать окрестность северного полюса).

Задав в некоторой области, окружающей область действия h_1, гладкий переход от сжатия h_2 к сжатию h_1, мы построим искомый диффеоморфизм. Эту область ограничим единичной окружностью $x_1^2+x_2^2=1$ и эллипсом $\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_2^2}{9}=1$.

Перейдём к полярной системе координат, в которой прямоугольные координаты на плоскости выражаются как $x_1=\rho * cos\varphi$, $x_2=\rho * sin\varphi$.

Представим $\bar{f}(\rho,\varphi)=(\bar{f}_1(\rho,\varphi)=\bar{\rho},\bar{f}_2(\varphi)=\bar{\varphi})$.

Для h_2: $\bar{\rho}=q_2(\rho,\varphi)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\rho\cdot cos\varphi\right)^2+\left(\frac{1}{3}\rho\cdot sin\varphi\right)^2}=\rho\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{5}{36}\cos^2\varphi}=\alpha\rho$,

для h_1: $\bar{\rho}=q_1(\rho,\varphi)=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\rho\cdot cos\varphi\right)^2+\left(\frac{1}{6}\rho\cdot sin\varphi\right)^2}=\frac{\alpha}{2}\rho$,

$$\bar{f}_2(\varphi)=\bar{\varphi}=\begin{cases} arctg(\frac{2}{3}tg\varphi),\varphi\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2});\\ arctg(\frac{2}{3}tg\varphi)+\varphi,\varphi\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2});\\ \varphi,\varphi=\pm\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

Так как закон $\bar{\varphi}$ одинаков для этих двух сжатий (ввиду пропорциональности их линейных коэффициентов по прямоугольным координатам), то он сохранится без изменения и в переходной зоне. Изменение координаты ρ линейно, но коэффициент сжатия зависит от угловой координаты φ, и различается у диффеоморфизмов в два раза

Для гладкого соединения законов изменения радиальной координаты $q_1(\rho,\varphi)$ и $q_2(\rho,\varphi)$ с учётом гладкости и непрерывности первой производной строим сплайн пятой степени по следующим данным:

$q_3(\rho_1,\varphi)=1$, $q_3'(\rho_1,\varphi)=\alpha$, $q_3''(\rho_1,\varphi)=0$,

$q_3(1,\varphi)=\rho_2$, $q_3'(1,\varphi)=\frac{\alpha}{2}$, $q_3''(1,\varphi)=0$,

где ρ_1 — радиальная координата для конкретного φ на эллипсе $\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_2^2}{9}=1$, $\rho_1=1/\alpha$; ρ_2 — радиальная координата для конкретного φ на эллипсе $16x_1^2+36x_2^2=1$, $\rho_2=\alpha/2$.

Получаем

$q_3=\frac{\alpha\rho}{2}+\frac{2\alpha+3}{(1/\alpha-1)^3}(\rho-1)^3-\frac{3{,}5\alpha+4}{(1/\alpha-1)^4}(\rho-1)^4+\frac{1{,}5(\alpha+1)}{(1/\alpha-1)^5}(\rho-1)^5$,

$q_3'=\frac{\alpha}{2}+\frac{6\alpha+9}{(1/\alpha-1)^3}(\rho-1)^2-\frac{14\alpha+16}{(1/\alpha-1)^4}(\rho-1)^3+\frac{7{,}5(\alpha+1)}{(1/\alpha-1)^5}(\rho-1)^4$.

Производная q_3' для всех значений (ρ,φ) из переходной зоны не равна нулю, то есть q_3 является диффеоморфизмом.

Таким образом, искомый диффеоморфизм на плоскости запишется в виде:

$$\bar{\rho}=\begin{cases}\alpha\rho,\rho\geq 1/\alpha;\\ \frac{\alpha\rho}{2},\rho\leq 1;\\ \frac{\alpha\rho}{2}+\frac{2\alpha+3}{(1/\alpha-1)^3}(\rho-1)^3-\frac{3{,}5\alpha+4}{(1/\alpha-1)^4}(\rho-1)^4+\frac{1{,}5(\alpha+1)}{(1/\alpha-1)^5}(\rho-1)^5,1<\rho<1/\alpha\end{cases}$$

$$\bar{\varphi}=\begin{cases} arctg(\frac{2}{3}tg\varphi),\varphi\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2});\\ arctg(\frac{2}{3}tg\varphi)+\varphi,\varphi\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2});\\ \varphi,\varphi=\pm\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

где $\alpha=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{5}{36}\cos^2\varphi}$.

Определим C^2-диффеоморфизм $f:\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^2$ формулой

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}\vartheta_+^{-1}(\bar{f}(\vartheta_+(x_1,x_2,x_3))),\ x\neq(0,0,\pm1);\\ (0,0,\pm1),\ x=(0,0,\pm1).\end{cases}$$

4. Доказательство теоремы 1.1.

Покажем, что диффеоморфизм $f:\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^2$, построенный в разделе 3., не включается в гладкий поток. Предположим противное: существует C^1 векторное поле, порождающее поток, сдвигом на единицу времени которого является диффеоморфизм f. Тогда это векторное поле индуцирует C^1 векторное поле v на оси Ox_2, порождающее поток, сдвигом на единицу времени которого является диффеоморфизм $h=\bar{f}|_{Ox_2}$. По построению $h(x)=h_1(x)=\frac{x}{6}$ для $x\in(0,1]$ и $h(x)=h_2(x)=\frac{x}{3}$ для $x\in[3,+\infty)$. В силу [7], существует единственное C^1 векторное поле $v_1(x)=-ln6\cdot x$ $(v_2(x)=-ln3\cdot x)$, порождающее поток со сдвигом на единицу времени h_1 (h_2). Откуда следует, что $v(x)=v_1(x)$ для $x\in(0,1]$ и $v(x)=v_2(x)$ для $x\in[3,+\infty)$.

Положим $\psi(x)=h^{-1}(\frac{x}{6})$ для $x\in(0,9]$. Непосредственно проверяется, что $\psi:(0,9]\to(0,\frac{9}{2}]$ — C^2-диффеоморфизм такой, что $h\psi=\psi h_1$ для $x\in(0,9]$. Тогда диффеоморфизм ψ индуцирует векторное поле v_* на промежутке $(0,\frac{9}{2}]$ формулой

$$v_*(\psi(x))=\psi'(x)\cdot v_1(x),\ x\in(0,9] \qquad (*)$$

При этом диффеоморфизм h на интервале $(0,\frac{9}{2}]$ является сдвигом на единицу времени векторного поля, порожденного v_*. Поскольку такое векторное поле единственно на отрезке $[3,\frac{9}{2}]$, то $v_*(x)=v_2(x)$ для $x\in[3,\frac{9}{2}]$. Подставив последнее равенство в формулу (*), получаем

$$\psi(x)=2\psi'(x),\ x\in(0,9] \qquad (**)$$

Решением дифференциального уравнения $(**)$ является функция $\psi(x)=c\cdot e^{2x},\ x\in(0,9]$, где с — некоторая константа. Получили противоречие с тем, что $\psi(x)=x$ для $x\in(0,1]$.

Список литературы

1. Брин М.И., “О включении диффеоморфизма в поток”, *Известия высших учебных заведений. Математика.*, **8** (1972), 19–25.

2. Гринес В.З., Починка О.В., *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Ижевский институт компьютерных исследований, М. - Ижевск, 2011.

3. А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, М.: Изд-во «Факториал», 1999.

4. Palis J., “On Morse-Smale dynamical systems”, *Topology.*, **8**:4 (1969), 385–404.

5. Palis J., “Vector fields generate few diffeomorphisms.”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **80.** (1974.), 503–505..

6. W.R. Utz., “The embedding of homeomorphisms in continuous flows.”, *Topology Proccedings.*, **6.** (1981.), 159–177..

7. Venti R.J., “Linear normal forms of differential equations.”, *Different. Equat.*, **2**:2 (1966), 182–194.

The example of a diffeomorfism «source-sink» which does not include to a smooth flow

© O. V. Pochinka[4], A. A. Romanov[5]

Abstract. The inclusion to a topological flow of any two-dimensional gradient-like cascade with condition that all its non-wandering points are fixed is one of the classical results of J.Palis [4]. In contrast, a nowhere dense set of them are included in a smooth flow, it follows from the [1]. The analytic construction of an example of the diffeomorfism «source-sink» on $\mathbb{S}^2$ which does not include to a smooth flow is the purpose of this paper.

Key Words: diffeomorfism «source-sink», inclusion to a smooth flow

[4] Professor of theory function chair, Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky; olga-pochinka@yandex.ru

[5] Undergraduate of theory function chair, Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky; romanov18.04@mail.ru