УДК 534.11

Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода замены переменных в функциональном уравнении

© В. Л. Литвинов[1]

Аннотация. Описан аналитический метод решения волнового уравнения с условиями, заданными на движущихся границах. С помощью замены переменных в функциональном уравнении исходная краевая задача сведена к разностному уравнению с одним постоянным смещением, которое решено с помощью интегрального преобразования Лапласа. Получено выражение для амплитуды колебаний, соответствующих n-ой динамической моде в случае граничных условий первого рода. В качестве примера рассмотрены крутильные колебания балки переменной длины. Исследования резонансных свойств доведены до численного решения.

Ключевые слова: волновое уравнение, колебания систем с движущимися границами, законы движения границ, резонансные свойства

Механические системы, границы которых движутся, широко распространены в технике (канаты грузоподъемных установок [1], гибкие звенья передач [2] и т.д.). Наличие движущихся границ вызывает значительные затруднения при описании таких систем, поэтому здесь в основном используются приближенные методы решения [3], [4]. Из аналитических методов наиболее эффективным является метод, предложенный в [5], который заключается в подборе новых переменных, останавливающих границы и оставляющих уравнение инвариантным. В [6] решение ищется в виде суперпозиции двух волн, бегущих навстречу друг другу. В результате этого автору удалось решить волновое уравнение с граничными условиями первого рода, заданными на одной движущейся и одной неподвижной границах. Метод, используемый в [7], заключается в замене геометрической переменной на чисто мнимую переменную, что позволяет свести волновое уравнение к уравнению Лапласа и применить для решения методику теории функций комплексного переменного. Эффективен также метод, используемый в [8], заключающийся в замене переменных в системе дифференциально–разностных уравнений, позволяющий получить точное решение волнового уравнения с различного вида условиями на подвижных границах.

В развиваемом в данной статье методе решения таких задач удачно сочетается методика, используемая в [5], [8].

Пусть движение системы описывается волновым уравнением

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau) - U_{\xi\xi}(\xi,\tau) = 0 \tag{1.1}$$

при граничных условиях первого рода

$$\begin{gathered} U(\ell_1(\tau),\tau) = F_1(\tau); \quad \ell_1(0) = 0; \\ U(\ell_2(\tau),\tau) = F_2(\tau); \quad \ell_2(0) = 1; \quad \ell_2(\tau) > \ell_1(\tau) \end{gathered} \tag{1.2}$$

и начальных условиях

$$U(\xi,0) = \Phi_0(\xi); \quad U_\tau(\xi,0) = \Phi_1(\xi). \tag{1.3}$$

Здесь τ безразмерное время $(\tau \geq 0)$; ξ безразмерная пространственная координата $(\ell_1(\tau) \leq \xi \leq \ell_2(\tau))$; $\ell_1(\tau), \ell_2(\tau)$ законы движения границ; $\Phi_0(\xi), \Phi_1(\xi), F_1(\tau), F_2(\tau)$ заданные функции, допускающие разрывы первого рода.

[1] Старший преподаватель кафедры общетеоретических дисциплин, Сызранский филиал Самарского государственного технического университета, г. Сызрань, vladlitvinov@rambler.ru.

Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$U(\xi,\tau)=U(\tau-\xi).$$

Из (1.3) найдем функцию $U(\xi;0)$:

$$U(\xi)=\frac{1}{2}[\Phi_0(-\xi)+\int_0^{\xi}\Phi_1(-\zeta)d\zeta],\quad -1\leq\xi\leq 0. \tag{1.4}$$

Для упрощения задачи введем новую функцию

$$U(\tau-\xi)=r(\varphi(\tau-\xi)). \tag{1.5}$$

Тогда граничные условия (1.2) примут вид

$$\begin{cases} r(\varphi(\tau-\ell_1(\tau)))=F_1(\tau); \\ r(\varphi(\tau-\ell_2(\tau)))=F_2(\tau). \end{cases} \tag{1.6}$$

Обозначая в первом уравнении системы (1.6)

$$\varphi(\tau-\ell_1(\tau))=z$$

и во втором уравнении этой системы

$$\varphi(\tau-\ell_2(\tau))=z-\frac{1}{2},$$

получим

$$\varphi(\tau-\ell_1(\tau))=\varphi(\tau-\ell_2(\tau))+\frac{1}{2}. \tag{1.7}$$

При этом система (1.6) примет вид

$$\begin{cases} r(z)=\theta_1(z); \\ r(z-\frac{1}{2})=\theta_2(z), \end{cases} \tag{1.8}$$

где $\theta_1(z)=F_1(\tau);\theta_1(z)=F_1(\tau)$

Заметим, что из уравнения (1.7) функция $\varphi(z)$ определяются с точностью до константы в том смысле, что если $\varphi(z)$ решение уравнения (1.7), то $\varphi(z)+C$ также является решением (здесь $C-$ произвольная постоянная). Поэтому для определенности можно выбрать такую функцию $\varphi(z)$, что $\varphi(-1)=-\frac{1}{2}$ При этом, при $\tau=0$ следует, что $\varphi(0)=0$.

С учетом замены (1.5) начальные условия (1.3) примут следующий вид:

$$r(z)=U(\bar{\varphi}(z));\quad -\frac{1}{2}\leq z\leq 0, \tag{1.9}$$

где функция $U(z)$ определяется выражением (1.4). Здесь $\bar{\varphi}(z)$ функция, обратная к $\varphi(z)$

Таким образом, начальная задача (1.1)-(1.3) сведена к системе разностных уравнений (1.8) с одним постоянным смещением при начальном условии (1.9). Из системы (1.8) получим

$$r(z)-r(z-\frac{1}{2})=\theta(z), \tag{1.10}$$

где

$$\theta(z) = \theta_1(z) - \theta_2(z).$$

Используем для решения задачи (1.10), (1.9) интегральное преобразование Лапласа

$$\bar{r}(p) = \int_0^\infty r(z)e^{-pz}dz.$$

После применения указанного преобразования получим:

$$\bar{r}(p) = \bar{\theta}(p)/(1 - e^{-0,5p}) + e^{-0,5p}\int_{-\frac{1}{2}}^0 r(z)e^{-pz}dz/(1 - e^{-0,5p}),$$

где $\bar{\theta}(p)$ изображение функции $\theta(z)$ Оригинал данного изображения имеет вид

$$r(z) = 2\int_0^z \theta(\zeta)\sum_{n-\infty}^{\infty} e^{2\pi ni(z-\zeta)}d\zeta + 2\sum_{n-\infty}^{\infty} e^{2\pi niz}\int_{-\frac{1}{2}}^0 r(\zeta)e^{-2\pi ni\zeta}d\zeta.$$

Объединяя члены при положительных и отрицательных будем иметь:

$$r(z) = 2\int_0^z \theta(\zeta)d\zeta + 4\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^z \theta(\zeta)cos[2\pi n(z-\zeta)]d\zeta +$$

$$+2\int_{-\frac{1}{2}}^0 r(\zeta)d\zeta + 4\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^0 r(\zeta)cos[2\pi n(z-\zeta)]d\zeta \qquad (1.11)$$

Рассмотрим свободные колебания системы $(\theta(z) = 0)$. В этом случае из (1.5) с учетом (11.11) следует, что

$$U(\xi,\tau) = 2\int_{-\frac{1}{2}}^0 r(\zeta)d\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^*(\xi,\tau), \qquad (1.12)$$

где

$$V_n^*(\xi,\tau) = A_n^* cos(2\pi n\varphi(\tau-\xi)) + B_n^* sin(2\pi n\varphi(\tau-\xi)); \qquad (1.13)$$

$$A_n^* = 4\int_{-\frac{1}{2}}^0 r(\zeta)cos(2\pi n\zeta)d\zeta; B_n^* = 4\int_{-\frac{1}{2}}^0 r(\zeta)sin(2\pi n\zeta)d\zeta. \qquad (1.14)$$

Рассмотрим теперь вынужденные колебания системы. При нулевых начальных условиях из (1.5) с учетом (1.11) получим:

$$U(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\xi,\tau) + D(\xi,\tau), \qquad (1.15)$$

где

$$V_n(\xi,\tau) = A_n cos(2\pi n\varphi(\tau-\xi)) + B_n sin(2\pi n\varphi(\tau-\xi)); \qquad (1.16)$$

$$A_n = 4\int_0^{\varphi(\tau-\xi)} \theta(\zeta)cos(2\pi n\zeta)d\zeta; B_n = 4\int_0^{\varphi(\tau-\xi)} \theta(\zeta)sin(2\pi n\zeta)d\zeta; \qquad (1.17)$$

$$D(\xi,\tau) = 2\int_0^{\varphi(\tau-\xi)} \theta(\zeta)d\zeta.$$

При решении задач на резонансные свойства рассматриваются, главным образом, резонансные явления в механических объектах с движущимися границами, когда амплитуда колебаний во много раз превосходит амплитуду возмущающего воздействия. Поэтому в равенстве (1.15) функцией $D(\xi,\tau)$ можно пренебречь как функцией одного порядка малости с функциями $F_1(\tau); F_2(\tau)$, характеризующими возмущающие воздействия.

Сравнивая выражения (1.12) и (1.15), (1.13) и (1.16), нетрудно заметить, что вынужденные колебания представляют собой суперпозицию собственных колебаний с изменяющимися во времени амплитудами A_n и B_n

Заметим, что из всех видов внешних воздействий наиболее распространенными являются гармонические нагрузки. Ограничимся рассмотрением случая, когда $\theta(z)$ имеет вид

$$\theta(z) = cosW(z), \tag{1.18}$$

где $W(z)-$ монотонно возрастающая функция.

В этом случае равенства (1.17) можно переписать следующим образом:

$$A_n = 2\int_0^{\varphi(\tau-\xi)} cos\Phi_{n1}(\zeta)d\zeta + 2\int_0^{\varphi(\tau-\xi)} cos\Phi_{n2}(\zeta)d\zeta;$$

$$B_n = 2\int_0^{\varphi(\tau-\xi)} sin\Phi_{n1}(\zeta)d\zeta + 2\int_0^{\varphi(\tau-\xi)} sin\Phi_{n2}(\zeta)d\zeta,$$

где $\Phi_{n1}(\zeta) = 2\pi n\zeta - W(\zeta); \Phi_{n2}(\zeta) = 2\pi n\zeta + W(\zeta)$.

Так как функции $2\pi n\zeta$ и $W(\zeta)$ монотонно возрастают, фаза $\Phi_{n2}(\zeta)$ быстро изменяется, что приводит к осциллированию с небольшой амплитудой соответствующих интегралов. Фаза же $\Phi_{n1}(\zeta)$ может изменяться очень медленно. При этом наблюдается резонансное явление, которое характеризуется ростом интегралов, содержащих фазу $\Phi_{n1}(\zeta)$. Из изложенного следует, что при возникновении резонанса рост амплитуды связан с возрастанием интегралов с фазой $\Phi_{n1}(\zeta)$, интегралами же с фазой $\Phi_{n2}(\zeta)$ можно пренебречь. Тогда полная амплитуда, определяемая по формуле $A_n^2 = A_n^2 + B_n^2$ в точке $\xi = \xi_n(\tau)$ соответствующей максимальному размаху колебаний, будет иметь следующий вид:

$$A_n^2(\tau) = 4\left\{\left[\int_0^{b(r)} cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2 + \left[\int_0^{b(r)} sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}, \tag{1.19}$$

где $b(\tau) = \varphi(\tau - \xi_n(\tau)), \Phi_n(\zeta) = 2\pi n\zeta - W(\zeta)$.

В случае, когда левая граница неподвижна, а закон движения правой границы имеет вид $l(\tau) = 1 + \varepsilon\tau$ (равномерное движение), функции φ, Φ_n определяются следующим образом

$$\varphi(z) = \frac{\ln[(1+\varepsilon z)/(1-\varepsilon)]}{2\ln[1/(1-\varepsilon)]} - \frac{1}{2};$$

$$\Phi_n(\zeta) = 2\pi n\zeta - W\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^{2\zeta} - \frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{1.20}$$

При выводе (1.20) было учтено, что

$$\zeta = \frac{\ln(1+\varepsilon\tau)}{2\ln[1/(1-\varepsilon)]}. \tag{1.21}$$

Рассмотрим явление установившегося резонанса и прохождение через резонанс для крутильных колебаний балки переменной длины. Дифференциальное уравнение, описывающее крутильные колебания балки, имеет вид:

$$Q_n(x,t) - a^2 Q_{xx}(x,t) = 0. \tag{1.22}$$

Граничные условия можно записать следующим образом:

$$Q(0,t) = 0; \tag{1.23}$$

$$Q(l_0(t),t) = BcosW_0(\omega_0 t). \tag{1.24}$$

В задаче (1.22) - (1.24) используются следующие обозначения:

$Q(x,t)-$ угол поворота сечения балки с координатой x в момент времени t $,a^2 = GJ/K, G-$ модуль сдвига, $J-$ полярный момент инерции, $K-$ момент инерции единицы длины балки; $l_0(t) = L_0 - v_0 t-$ закон движения правой границы, L_0- начальная длина балки; $W_0(\omega_0 t)$ - монотонно возрастающая функция, B, ω_0 - постоянные величины. Начальные условия в данном случае на резонансные свойства влияния не оказывают, поэтому здесь они не рассматриваются. Введем в поставленную задачу безразмерные переменные:

Начальные условия в данном случае на резонансные свойства влияния не оказывают, поэтому здесь они не рассматриваются. Введем в поставленную задачу безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{\omega_0}{a}x; \tau = \omega_0 t - \frac{\omega_0 L_0 - a}{v_0}; Q(x,t) = B\Theta(\xi,\tau). \tag{1.25}$$

В результате задача примет вид

$$\Theta_{\tau\tau}(\xi,\tau) - \Theta_{\xi\xi}(\xi,\tau) = 0; \tag{1.26}$$

$$\Theta(0,\tau) = 0; \tag{1.27}$$

$$\Theta(l(\tau),\tau) = cosW(\tau), \tag{1.28}$$

где

$$l(\tau) = 1 + \varepsilon\tau; \varepsilon = -v_0/a;$$

$$W(\tau) = W_0(\tau - \gamma_0); \gamma_0 = (a - \omega_0 L_0)/v_0.$$

Для задачи вида (1.26)-(1.28) выражение амплитуды напряжений, соответствующих колебаниям на $n-$ ной динамической моде имеет вид (1.19).

В системах с движущимися границами возможны два вида резонансных явлений: установившийся резонанс и прохождение через резонанс.

Установившийся резонанс – это явление резкого увеличения амплитуды колебаний в случае, когда изменение частоты внешней силы и одной из собственных частот согласованы таким образом, что создаются наилучшие условия для увеличения амплитуды.

Прохождение через резонанс – это явление резкого увеличения амплитуды в течение конечного промежутка времени, когда мгновенная частота одного из собственных колебаний проходит через значение возмущающей частоты.

Явление установившегося резонанса будет наблюдаться, если скорость изменения функции $\Phi_n(\zeta)$ равна нулю, т.е.

$$\Phi_n(\zeta) = \gamma, \tag{1.29}$$

где $\gamma-$ постоянная величина. В этом случае возрастание амплитуды описывается следующим выражением:

$$A_n = \frac{\ln(1+\varepsilon\tau)}{\ln[1/(1-\varepsilon)]}. \tag{1.30}$$

Исследуем колебания балки под действием нагрузки постоянной частоты $W(\tau) = \tau$

Явление прохождения через резонанс наблюдается во временной области, содержащей точку ζ_0 , где

$$\Phi_n'(\zeta_0) = 0.$$

В этой точке мгновенная частота $n-$ ного собственного колебания проходит через значение возмущающей частоты. Точка ζ_0 определяется по следующей формуле:

$$\zeta_0 = \frac{\ln\left\{\frac{\pi n\varepsilon}{\ln[1/(1-\varepsilon)]}\right\}}{2\ln[1/(1-\varepsilon)]}.$$

Если амплитуда в начале резонансной области (точка $\zeta_1 = \varphi(\tau_1 - \xi_n(\tau_1))$) равна нулю, то амплитуда в конце резонансной области (точка $\zeta_2 = \varphi(\tau_2 - \xi_n(\tau_2))$) определяется выражением

$$A_n^2(\zeta_1, \zeta_2) = 4\left\{\left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2 + \left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}, \tag{1.31}$$

Учитывая (1.21), точки $\tau_0, \tau_1, \tau_2,$ соответствующие точкам $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2,$ определяются по формуле

$$\tau_i = \frac{1}{\varepsilon} exp\left\{2\zeta_i \ln[1/(1-\varepsilon)]\right\} - \frac{1}{3}; i = 0, 1, 2.$$

В этом случае на интервале, содержащем точку τ_0 , будет наблюдаться явление прохождения через резонанс. Формула для максимально возможной амплитуды здесь имеет вид

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = \left\{\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} cos\Phi_n(\tau)d\tau\right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} sin\Phi_n(\tau)d\tau\right]^2\right\}, \tag{1.32}$$

где

$$F_n(\tau) = \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon\tau)\ln[1/(1-\varepsilon)]}; \Phi_n(\tau) = \pi n \frac{\ln(1+\varepsilon\tau)}{\ln[1/(1-\varepsilon)]} - W(\tau).$$

Прохождение через резонанс начинается не доходя до точки $\tau_0(\tau_1 < \tau_0)$ и заканчивается за этой точкой $(\tau_2 > \tau_0)$. Сама точка τ_0 определяется по формуле:

$$\tau_0 = \frac{\pi n}{\ln[1/(1-\varepsilon)]} - \frac{1}{\varepsilon}.$$

Исследование прохождения через резонанс заключается в определении границ резонансной области τ_1 и τ_2 , соответствующих максимуму выражения (1.32). Результаты исследований равенства (1.32) на максимум численно приведены в таблице, отображающей зависимость величин A_n, τ_1, τ_2 от скорости ε при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах.

Таблица 1: Численные результаты исследования равенства (1.32) на максимум

	ε	-0,40	-0,30	-0,20	-0,10	-0,01	0	0,01	0,10	0,20	0,30	0,40
1 мода	A_1	3,3	3,7	4,5	6,2	19,0	∞	19,0	5,9	4,0	3,2	2,7
	τ_1	-15,1	-17,7	-22,8	-36,9	-255,4	τ_0	176,2	9,6	2,5	0,5	0,0
	τ_2	-1,7	-2,6	-4,8	-12,1	-179,1	τ_0	252,1	33,1	18,8	13,5	10,6
2 мода	A_2	2,3	2,6	3,2	4,4	13,4	∞	13,4	4,1	2,9	2,3	1,9
	τ_1	-27,1	-32,7	-43,6	-74,9	-586,9	τ_0	473,1	34,6	13,2	6,7	3,7
	τ_2	-8,3	-11,6	-18,3	-40,6	-479,1	τ_0	580,3	67,8	36,1	24,9	19,0

Из анализа данной таблицы следует, что чем медленнее происходит прохождение через резонанс, тем большей величины достигает амплитуда колебаний. В заключении отметим, что приведенная здесь методика позволяет установить возможность возникновения явления установившегося резонанса и прохождения через резонанс, а также вычислить амплитуду возникающих при этом колебаний.

Список литературы

1. Савин Г. Н., Горошко О. А., *Динамика нити переменной длины*, Наук.думка, Киев, 1962, 332 с.

2. Самарин Ю. П., Анисимов В. Н., “Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне”, *Изв. вузов. Машиностроение*, 1986, № 12, 17-21.

3. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., “Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича-Галеркина”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. "физико-математические науки"*, **1**:18 (2009), 149-158.

4. Горошко О. А., Савин Г. Н., *Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины*, Наук.думка, Киев, 1971, 270 с.

5. Весницкий А. И., *Волны в системах с движущимися границами и нагрузками*, Физматлит, М., 2001, 320 с.

6. Весницкий А. И., “Обратная задача для одномерного резонатора изменяющего во времени свои размеры”, *Изв. вузов. Радиофизика*, 1971, № 10, 1538-1542.

7. Барсуков К. А., Григорян К. А., “К теории волновода с подвижными границами”, *Изв. вузов. Радиофизика*, 1976, № 2, 280-285.

8. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., *Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография*, Самар. гос. техн. ун-т, Самара, 2009, 131 с.

Solving boundary value problems with moving boundaries using the method of change of variables in the functional equation

© V. L. Litvinov[2]

Abstract. The method of analytical solution of wave equation with the conditions, assigned on the moving boundaries, is described. With the aid of the change of variables in the functional equation the original boundary-value problem is brought to the difference equation with one fixed bias, which can be solved using the Laplace integral transform. The expression for amplitude of oscillation corresponding to n-th dynamic mode is obtained for the first kind boundary conditions. As an example, the torsional vibrations of a beam of variable length considered. Study the resonance properties brought to the numerical solution.

Key Words: wave equation, variations of systems with moving boundaries, laws of boundary moving

[2] Senior lecturer of dept. of general – theoretical disciplines, Syzran Branch of Samara State Technical University, Syzran, vladlitvinov@rambler.ru.