УДК 517.938.5

О классификации градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей посредством автоморфизмов трехцветных графов

© В. З. Гринес[1], С. Х. Капкаева[2]

Аннотация. Данная статья является продолжением работы [6], в которой найдены условия топологической сопряженности градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей, неблуждающее множество которых состоит лишь из неподвижных точек. В настоящей работе рассматривается класс сохраняющих ориентацию градиентно-подобных диффеоморфизмов, неблуждающее множество которых допускает существование периодических орбит периода большего единицы. Каждому диффеоморфизму ставится в соответствие трехцветный граф, на вершинах которого этот диффеоморфизм индуцирует взаимно-однозначное соответствие, называемое нами автоморфизмом графа. Устанавливается, что все вершины графа имеют один и тот же период относительно действия автоморфизма. В работе доказывается, что трехцветный граф, снабженный автоморфизмом, является полным топологическим инвариантом в рассматриваемом классе диффеоморфизмов

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса-Смейла, градиентно-подобный диффеоморфизм, топологически сопряженные диффеоморфизмы, трехцветный граф

1. Основные понятия и формулировка результатов

В настоящей работе рассматривается класс $\tilde{G}$ сохраняющих ориентацию градиентно-подобных диффеоморфизмов Морса-Смейла на замкнутом двумерном ориентируемом многообразии M^2.

Представим неблуждающее множество в виде: $\Omega_f = \Omega_0(f) \cup \Omega_1(f) \cup \Omega_2(f)$, где $\Omega_0(f)$, $\Omega_1(f)$, $\Omega_2(f)$ - множества стоковых, седловых, источниковых периодических точек диффеоморфизма f соответственно.

Каждой периодической орбите $\mathcal{O}_p$ периодической точки p диффеоморфизма f соответствует тройка чисел $(m_{\mathcal{O}_p}, q_{\mathcal{O}_p}, \nu_{\mathcal{O}_p})$ (периодические данные орбиты $\mathcal{O}_p$), где $m_{\mathcal{O}_p}$ - период $\mathcal{O}_p$, $q_{\mathcal{O}_p} = \dim\ W^u_{\mathcal{O}}$, а $\nu_{\mathcal{O}_p}$ — тип ориентации точки p (равный $+1(-1)$, если $f^m|_{W^u_p}$ сохраняет (меняет) ориентацию).

Обозначим через m_f - наименьшее натуральное число, для которого $\Omega_{f^{m_f}}$ неподвижно и любая периодическая точка диффеоморфизма f^{m_f} имеет тип ориентации $+1$. По построению $m_{\mathcal{O}_p}$ — делитель числа m_f.

Так как блуждающее множество диффеоморфизма $f \in \tilde{G}$ не имеет гетероклинических точек, то для $l^u_\sigma(l^s_\sigma)$ неустойчивой (устойчивой) сепаратрисы седла $\sigma \in \Omega_1$ существует сток $\omega \in \Omega_0$ (источник $\alpha \in \Omega_2$) такой, что $cl(l^u_\sigma) = l^u_\sigma \cup \sigma \cup \omega$ $(cl(l^s_\sigma) = l^s_\sigma \cup \sigma \cup \alpha)$ (см. предложение 2.1.3 [2]).

Обозначим через $L_\omega(L_\alpha)$ - множество сепаратрис, содержащих сток $\omega \in \Omega_0$ (источник $\alpha \in \Omega_2$) в своем замыкании. Положим $L_f = \bigcup\limits_{\omega\in\Omega_0, \alpha\in\Omega_2} L_\omega \cup L_\alpha$ множество сепаратрис диффеоморфизма f

[1] Профессор кафедры численного и функционального анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru

[2] Студентка, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; kapkaevasvetlana@yandex.ru

Определение 1.1. *Для произвольной сепаратрисы $l \in L_f$ наименьшее из возможных чисел $k \in \mathbb{N}$ таких, что $f^k(l) = l$ назовем периодом сепаратрисы l, обозначим его через m_l.*

В разделе 2. настоящей статьи будет доказано, что все сепаратрисы диффеоморфизма $f \in \tilde{G}$ имеют период m_f.

Напомним следующие определения.

Определение 1.2. *Граф T называется трехцветным графом, если все его вершины имеют степень 3, а ребра раскрашены в три цвета таким образом, что в каждой вершине сходятся ребра трех разных цветов. Цвета будем обозначать буквами s, t, u. Для краткости будем называть эти ребра s-ребрами, t-ребрами и u-ребрами.*

Определение 1.3. *Два трехцветных графа T и T' назовем изоморфными, если существует взаимно-однозначное соответствие между множествами их вершин, сохраняещее отношения инцидентности и цветности (s, t, u-ребра переходят в ребра того же цвета).*

Определение 1.4. *Взаимно-однозначное отображение S_f графа $T(f)$ на себя, переводящее вершину в вершину, с сохранением отношения инцидентности и цветности, будем называть автоморфизмом графа $T(f)$.*

Проведя построения, аналогичные построениям, выполненным в работе [6], каждому диффеоморфизму $f \in G$ на поверхности M^2 поставим в соответствие трехцветный граф $T(f)$.

Пусть f, имеет хотя бы одну седловую особую точку. Удалим из поверхности M^2 замыкание объединения устойчивых и неустойчивых многообразий всех седловых точек диффеоморфизма f и обозначим получившееся множество через $\tilde{M}$, то есть $\tilde{M} = M^2 \setminus \overline{\bigcup\limits_{p \in \Omega_1} (W^u_p \cup W^s_p)}$. Тогда множество $\tilde{M}$ представляется в виде объединения открытых областей (ячеек), гомеоморфных открытому стандартному диску, то есть множеству $\{(x, y) \in R^2 : \ x^2 + y^2 < 1\}$. Для потоков этот факт был доказан Леонтович-Андроновой, для градиентно-подобных каскадов А. Н. Безденежных и В. З. Гринесом. При этом граница каждой области из множества $\tilde{M}$ содержит в точности один источник, один сток, одну или две седловые точки и некоторые из их сепаратрис. В силу того, что все сепаратрисы диффеоморфизма f имеют имеют период m_f, то все компоненты связности множества $\tilde{M}$ также имеют период m_f [3].

Пусть A - любая ячейка из множества $\tilde{M}$, α и ω - источник и сток, входящие в ее границу, произведем следующее построение.

Аналогично [6] построим t-кривую, разбивающую ячейку A на две треугольные области, в границу каждой из которых входят: три периодические точки - источник α, седло σ, сток ω, а также устойчивая сепаратриса l^s_σ (будем называть ее s-кривой) с граничными точками α и σ, неустойчивая сепаратриса l^u_σ (u-кривая) с граничными точками ω и σ и кривая $\mathcal{I}$ (t- кривая) с граничными точками α и σ. В силу того, что границами треугольных областей являются сепаратрисы l^u_σ, l^s_σ, t-кривая и диффеоморфизм f сохраняет ориентацию, то период треугольной области равен m_f [4].

[3] Периодом компоненты связности $A \in \tilde{M}$ называется наименьшее натуральное число $k \in \mathbb{N}$, такое что $f^k(A) = A$

[4] Периодом треугольной области δ называется наименьшее натуральное число $k \in \mathbb{N}$, такое что $f^k(\delta) = \delta$

Обозначим через $\mathcal{T}$ множество t-кривых, построенных во всех ячейках множества $\tilde{M}$. Положим $M_1 = \tilde{M} \backslash \mathcal{T}$, тогда M_1 представляется в виде объединения треугольных областей.

Стороной треугольной области назовем замыкание одной из s, u или t компонент связности границы.

Будем говорить, что две треугольные области, имеют общую сторону, если она принадлежит замыканиям обеих треугольников.

Построим трехцветный граф $T(f)$, соответствующий полученному разбиению M_1 на треугольники следующим образом:

1. вершины графа T взаимно-однозначно соответствуют треугольникам разбиения M_1;

2. две вершины графа инцидентны ребру цвета s, t или u, если соответствующие этим вершинам треугольные области имеют общую s, t или u кривую.

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Трехцветный граф не зависит от выбора t-кривой.*

В силу предложения 1.1. трехцветные графы $T_1(f)$ и $T_2(f)$, полученные по различным разбиениям на треугольные области, в точности совпадают.

Пусть Δ — множество всех треугольных областей диффеоморфизма f, Γ - множество всех вершин трехцветного графа $T(f)$ и $\pi : \Delta \to \Gamma$ отображение, которое ставит в соответствие каждой треугольной области диффеоморфизма f вершину графа $T(f)$.

Диффеоморфизм f индуцирует на множестве вершин графа $T(f)$ автоморфизм $S_f = \pi f \pi^{-1}$.

Так как все треугольные области имеют период m_f, то все вершины трехцветного графа имеют период m_f (доказательство этого факта приведено в разделе 2.).

Основной результат данной работы содержится в следующей теореме.

Т е о р е м а 1.1. *Для того чтобы диффеоморфизмы $f \in \tilde{G}$ и $f' \in \tilde{G}$ были топологически сопряжены необходимо и достаточно, чтобы существовал изоморфизм η графов $T(f)$ и $T(f')$, сопрягающий автоморфизмы графов, то есть $S'_{f'} = \eta S_f \eta^{-1}$.*

2. Вспомогательные сведения

В этом разделе содержатся ряд предложений, формулировки и доказательства которых имеются в книге [2] и работе [1].

О п р е д е л е н и е 2.1. *Компактное $f-$инвариантное множество $A \subset M^2$ называется аттрактором дискретной динамической системы f, если оно имеет компактную окрестность $U_A : f(U_A) \subset$ int U_A и $A = \bigcap\limits_{k \geq 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется захватывающей.*

Репеллер R определяется как аттрактор для f^{-1}.

В силу пункта 1 теоремы 2.2.2 [2] множество $A = W^u_{\Omega_0 \cup \Omega_1} = \bigcup\limits_{\sigma \in \Omega_1} l^u_\sigma \cup \Omega_0$ является аттрактором, а множество $R = W^s_{\Omega_2} = \Omega_2$ репеллером. В этом случае согласно построению размерность репеллера R равна 0, а размерность аттрактора равна единице.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Аттрактор A является связным множеством.*

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Пусть ω - сток диффеоморфизма $f \in G$. Тогда для произвольных сепаратрис $l', l'' \subset L_\omega$ верно следующее равенство $m_{l'} = m_{l''}$.*

П р е д л о ж е н и е 2.3. *Пусть σ - седловая точка диффеоморфизма $f \in G$. Тогда периодические данные орбиты $\mathcal{O}_\sigma$ имеют в точности один из следующих видов: $(m_f, 1, +1)$ или $(\frac{m_f}{2}, 1, -1)$.*

П р е д л о ж е н и е 2.4. *Любая сепаратриса $l \in L_f$ диффеоморфизма $f \in G$ имеет период m_f.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения 2.3. седловые точки могут иметь период m_f или $m_f/2$. Имеют место два случая: 1 случай - седловая точка σ имеет период m_f и тип ориентации $+1$, тогда и период сепаратрис точки σ равен m_f; 2 случай - седловая точка σ имеет период $m_f/2$ и тип ориентации -1, тогда период седловой точки σ диффеоморфизма f^2 имеет период m_f и тип ориентации $+1$ и период сепаратрис точки σ равен m_f; период сепаратрис седловой точки σ диффеоморфизма f либо $m_f/2$, либо m_f, но $m_f/2$ быть не может, так как она не неподвижна. То есть период сепаратрис точки σ при типе ориентации -1 также равен m_f.

Таким образом, все сепаратрисы $l \in L_f$ диффеоморфизма $f \in G$ имеют период m_f.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

С л е д с т в и е 2.1. *Любая треугольная область $\delta \in \Delta_f$ диффеоморфизма f имеет период m_f.*

П р е д л о ж е н и е 2.5. *Автоморфизм S_f обладает следующим свойством: все вершины трехцветного графа $T(f)$ имеют период m_f.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу следствия 2.1. все треугольные области из множества Δ_f имеет период m_f, то есть для любой треугольной области $\delta \in \Delta$ верно, что $f^{m_f}(\delta) = \delta$ и $f^k(\delta) \neq \delta$ для любого $k < m_f$, где $k \in \mathbb{N}$. Положим $\gamma = \pi(\delta)$ вершина трехцветного графа, соответствующая треугольной области δ. Тогда $S_f^{m_f}(\gamma) = \pi f^{m_f} \pi^{-1}(\gamma) = \pi f^{m_f}(\delta) = \pi(\delta) = \gamma$. Аналогичным образом проверяется, что $f^k(\delta) \neq \delta$ для $k < m_f$, где $k \in \mathbb{N}$ Таким образом вершина $\gamma \in \Gamma$ имеет период m_f.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Пусть a и b инвариантные сепаратрисы диффеоморфизма f, имеющие неподвижный сток ω своей граничной точкой. Тогда существует гладкий диск B_ω такой, что $\omega \in B_\omega$ и B_ω пересекает каждую из сепаратрис в единственной точке. Компоненту связности множества $B_\omega \setminus (a \cup b)$, не содержащую других сепаратрис $l \in L_\omega$ обозначим J_*. Будем рассматривать область J, ограниченную сепаратрисами a и b такую, что $J \cap J_* \neq \emptyset$.

П р е д л о ж е н и е 2.6. *Возможно построить такую кривую $\gamma \in J$, что она пересекает каждую из инвариантных кривых a и b в единственной точке, причем $f(\gamma)$ также пересекает каждую из кривых a и b в единственной точке и $\gamma \cap f(\gamma) = \emptyset$.*

3. Необходимые обозначения

Рассмотрим диффеоморфизмы $f, f' \in \tilde{G}$, трехцветные графы которых изоморфны, то есть существует изоморфизм $\eta : T(f) \to T(f')$.

Зафиксируем произвольную треугольную область δ диффеоморфизма f, в границу этой треугольной области входит стоковая точка ω. Положим $h_\Delta = \pi'^{-1} \eta \pi$, под действием этого отображения δ перейдет в треугольную область $\delta' = h_\Delta(\delta) = \pi'^{-1}\eta\pi(\delta)$ диффеоморфизма f'. В границу треугольной области δ' входит стоковая точка диффеоморфизма f', которую мы обозначим ω'. Таким образом отображение h_Δ индуцирует отображение $h_{\Omega_0} : \Omega_0 \to \Omega'_0$, действующее по следующему правилу $h_{\Omega_0}(\omega) = \omega'$ для каждой стоковой точки $\omega \in \Omega_0$.

Для стоковой неподвижной точки ω диффеоморфизма f обозначим через $\tilde{L}_\omega$ множество всех t и u кривых, для которых ω является граничной точкой и через n_ω - число кривых принадлежащих $\tilde{L}_\omega$ [5].

Аналогично лемме 3.2.1 книги [2], устанавливается, что существует гладкий замкнутый диск $B_\omega \subset W^s_\omega$, такой что $\omega \in intB_\omega$, $f(B_\omega) \subset B_\omega$ и любая кривая $\tau^\nu_\omega \in \tilde{L}_\omega$ (где ν - цвет ребра, $\nu \in \{u, t\}$) пересекает кривую $c_\omega = \partial B_\omega$ в единственной точке. Зададим в некоторой точке кривой c_ω пару векторов ($\overrightarrow{\theta}; \overrightarrow{n}$) такую, что вектор $\overrightarrow{n}$ направлен внутрь диска B_ω, вектор $\overrightarrow{\theta}$ касается кривой c_ω и задает на ней направление обхода, при котором диск B_ω остается слева (назовем такой обход положительным). Занумеруем кривые, пересекающие c_ω: $\tau^{\nu_1}_\omega, \tau^{\nu_2}_\omega, \ldots \tau^{\nu_{n_\omega}}_\omega$ в соответствии с порядком, в котором они встречаются при выбранном обходе вдоль c_ω, начиная с некоторой кривой из множества $\tilde{L}_\omega$. Для определенности положим, что $\tau^{\nu_1}_\omega$ имеет цвет t. Обозначим через δ_{2k-1} треугольную область, в границу которой входят кривые $\tau^{\nu_{2k-1}}_\omega$ и $\tau^{\nu_{2k}}_\omega$. Аналогичным образом обозначим через δ_{2k} треугольную область, в границу которой входят кривые $\tau^{\nu_{2k}}_\omega$ и $\tau^{\nu_{2k+1}}_\omega$. Область со сторонами $\tau^{\nu_1}_\omega$ и $\tau^{\nu_{n_\omega}}_\omega$ обозначим δ_{n_ω} (рис. 3.1). Заметим, что кривые $\tau^{\nu_{2k-1}}_\omega$ и $\tau^{\nu_{2k}}_\omega$ $k = \overline{1, n_\omega/2}$ имеют разный цвет, так как они являются сторонами одной треугольной области. Из наших обозначений следует, что все $\tau^{\nu_{2k-1}}_\omega$ являются t-кривыми, $\tau^{\nu_{2k}}_\omega$ - u-кривыми.

Обозначим через $\Gamma_\omega \subset \Gamma$ множество вершин трехцветного графа $T(f)$, которым соответствуют треугольные области диффеоморфизма f, содержащие ω в своих замыканиях и положим $\gamma_i = \pi(\delta_i)$, где $i = \overline{1, n_\omega}$.

[5] По построению число n_ω четное. Действительно, число сепаратрис, содержащих ω в своем замыкании совпадает с числом ячеек множества $\tilde{M}$, также содержащих ω в своем замыкании. В каждой такой ячейке была выбрана в точности одна t-кривая. Таким образом число n_ω совпадает с удвоенным числом ячеек множества $\tilde{M}$, содержащих ω в своем замыкании.

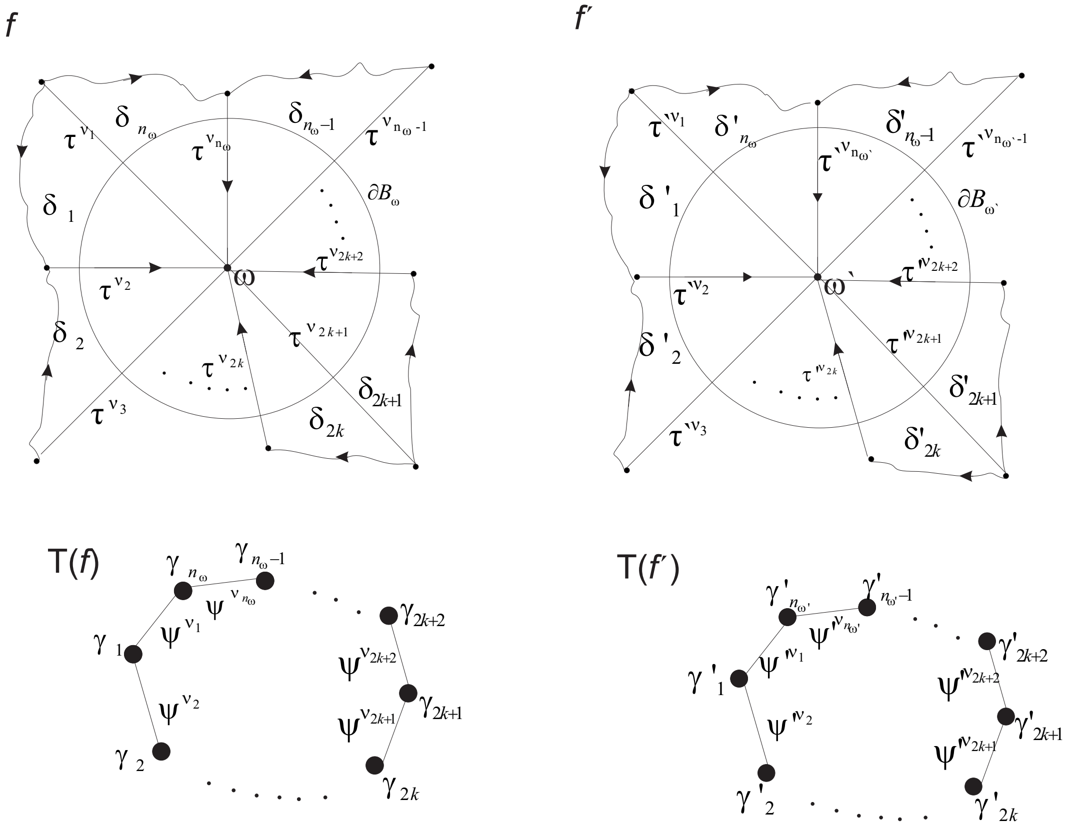


Рисунок **3.1**

Треугольные области в окрестности стока

Применим отображение h_Δ к треугольным областям δ_{2k-1} и δ_{2k}. Отображение π переводит треугольные области δ_{2k-1} и δ_{2k}, имеющие общую сторону $\tau_\omega^{\nu_{2k}}$, в вершины $\gamma_{2k-1} = \pi(\delta_{2k-1})$ и $\gamma_{2k} = \pi(\delta_{2k})$ трехцветного графа, которые инцидентны некоторому ребру, которое обозначим $\psi^{\nu_{2k}}$. В силу изоморфизма графов вершины γ_{2k-1} и γ_{2k} графа $T(f)$ перейдут в вершины $\gamma'_{2k-1} = \eta(\gamma_{2k-1})$ и $\gamma'_{2k} = \eta(\gamma_{2k})$ графа $T(f')$, инцидентные ребру $\psi'^{\nu_{2k}} = \eta_1(\psi^{\nu_{2k}})$[6]. Вершинам γ'_{2k-1} и γ'_{2k} трехцветного графа $T(f')$ соответствуют треугольные области $\delta'_{2k-1} = \pi'^{-1}(\gamma'_{2k-1})$ и $\delta'_{2k} = \pi'^{-1}(\gamma'_{2k})$ в границу которых входит сток ω' диффеоморфизма f'. Общую сторону треугольных областей δ'_{2k-1} и δ'_{2k} обозначим через $\tau_{\omega'}^{\prime\nu_{2k}}$.

Напомним, что через L_ω мы обозначили множество сепаратрис, содержащих сток $\omega \in \Omega_0$ в своем замыкании. Стороны треугольных областей вида $\tau_\omega^{\nu_{2k}}$ по определению являются неустойчивыми сепаратрисами, то есть $\tau_\omega^{\nu_{2k}} \in L_\omega$, где $k = \overline{1; n_\omega \setminus 2}$. По описанному выше правилу каждой сепаратрисе $\tau_\omega^{\nu_{2k}}$ мы поставили в соответствие сепаратрису $\tau_{\omega'}^{\prime\nu_{2k}}$, таким образом, отображение h_Δ индуцирует отображение $h_{L_\omega} : L_\omega \to L_{\omega'}$, где $\omega' = h_{\Omega_0}(\omega)$, такое что $h_{L_\omega}(\tau_\omega^{\nu_{2k}}) = \tau_{\omega'}^{\prime\nu_{2k}}$

Треугольным областям δ_{2k} и δ_{2k+1}, граничащим по стороне $\tau_\omega^{\nu_{2k+1}}$, ставятся в соответствие треугольные области $\delta'_{2k} = h_\Delta(\delta_{2k})$ и $\delta'_{2k+1} = h_\Delta(\delta_{2k+1})$, граничащие по стороне $\tau_{\omega'}^{\prime\nu_{2k+1}}$, где $k = \overline{1, n_\omega/2}$.

Треугольным областям δ_{n_ω} и δ_1, граничащим по стороне $\tau_\omega^{\nu_1}$, ставятся в соответствие треугольные области $\delta'_{n_{\omega'}} = h_\Delta(\delta_{n_\omega})$ и $\delta'_1 = h_\Delta(\delta_1)$, граничащие по стороне $\tau_{\omega'}^{\prime\nu_1}$.

[6] Отображение η, осуществляющее изоморфизм графов, индуцирует отбражение η_1, которое переводит ребро графа $T(f)$ в ребро графа $T(f')$ с сохранением отношения инцидентности.

Таким образом, множество вершин Γ_ω трехцветного графа $T(f)$ под действием η переходит на множество $\Gamma_{\omega'}$ трехцветного графа $T(f')$, где $\omega' = h_{\Omega_0}(\omega)$.

4. Доказательство теоремы 1.1.

Необходимость

Необходимость теоремы 1.1. следует из леммы 4.1., доказанной ниже.

Лемма 4.1. *Если диффеоморфизмы $f \in \tilde{G}$ и $f' \in \tilde{G}$ топологически сопряжены, то существует изоморфизм η графов $T(f)$ и $T(f')$, сопрягающий автоморфизмы графов, то есть $S'_{f'} = \eta S_f \eta^{-1}$.*

Доказательство. Пусть диффеоморфизмы f и f' топологически сопряжены, то есть существует гомеоморфизм h такой, что $f' = hfh^{-1}$.

Положим $\tilde{\Delta}'$ разбиение M'_1 на треугольные области, где в качестве t-кривых используются кривые $h(t)$. По полученному разбиению построим трехцветный граф $\tilde{T}(f')$.

Докажем, что $T(f)$ и $\tilde{T}(f')$ изоморфны.

Гомеоморфизм h индуцирует взаимно-однозначное соответствие $h_\Delta : \Delta \to \tilde{\Delta}'$, действующее по следующему правилу $h_\Delta(\delta) = \tilde{\delta}'$, где $\delta \in \Delta(\tilde{\delta}' \in \tilde{\Delta}')$.

Отображение $\eta = \pi' h_\Delta \pi^{-1}$ является взаимно-однозначным соответствием между множествами Γ и Γ'. Покажем, что η является изоморфизмом трехцветных графов, для этого достаточно показать, что если две вершины a, b инцидентны ребру ψ^ν (определенного цвета $\nu \in \{s, t, u\}$), то вершины $a' = \pi' h_\Delta \pi^{-1}(a)$ и $b' = \pi' h_\Delta \pi^{-1}(b)$ инцидентны некоторому ребру ψ'^ν того же цвета.

Вершинам a и b инцидентным ребру ψ^ν соответствуют две треугольные области $\delta_a = \pi^{-1}(a)$ и $\delta_b = \pi^{-1}(b)$, имеющие общую сторону τ^ν (τ того же цвета, что и ψ^ν). Области δ_a и δ_b преобразуются под действием гомеоморфизма h_Δ в треугольные области $h_\Delta(\delta_a)$ и $h_\Delta(\delta_b)$ с общей стороной τ'^ν. Это означает, что вершины a и b, инцидентные ребру ψ^ν, под действием $\eta = \pi' h_\Delta \pi^{-1}$ преобразуются в вершины $a' = \pi'(h_\Delta(\delta_a))$ и $b' = \pi'(h_\Delta(\delta_b))$ графа $T(f')$, инцидентные ребру ψ'^ν.

Таким образом $T(f)$ и $\tilde{T}(f')$ изоморфны. В силу утверждения 1.1. трехцветные графы $\tilde{T}(f')$ и $T(f')$ совпадают, следовательно $T(f)$ и $T(f')$ изоморфны.

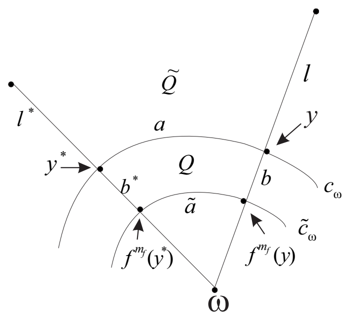
Используя определения топологической сопряженности диффеоморфизмов f и f' распишем $S'_{f'} = \pi'\ f'\pi'^{-1} = \pi'\ hfh^{-1}\pi'^{-1} = \pi'\ h\pi^{-1}\pi\ f\pi^{-1}\pi\ h^{-1}\pi'^{-1} = \eta\ S_f \eta^{-1}$. Таким образом изоморфизм η сопрягает автоморфизмы S_f и $S'_{f'}$ графов $T(f)$ и $T(f')$. Доказательство закончено.

Достаточность

Рассмотрим диффеоморфизмы $f, f' \in G$, трехцветные графы которых изоморфны, то есть существует изоморфизм $\eta : T(f) \to T(f')$.

Достаточность теоремы 1.1. следует из лемм 4.4., 4.5., доказанных ниже.

Зафиксируем произвольную сепаратрису $l \in L_\omega$. Для кривых $c_\omega = \partial B_\omega$ и $\tilde{c}_\omega = \partial f^{m_f}(B_\omega)$ положим, что $y = c_\omega \cap l$ и $f^{m_f}(y) = \tilde{c}_\omega \cap l$. Положим $L^l_\omega = \bigcup\limits_{k=1}^{m_f} f^k(l) \cap W^s_\omega$ (то есть множество L^l_ω - состоит из сепаратрис орбиты l, лежащих в области притяжения стока ω).



Р и с у н о к **4.1**

Построение гомеоморфизма на границе греугольной области

Каждой стоковой периодической точке ω периода m_ω однозначно соответствует подграф T_ω графа $T(f)$, представляющий собой замкнутую кривую, гомеоморфную окружности и образованную четным числом ребер, таких, что ребра, имеющие общую вершину имеют разный цвет одного из типов u или t.

Обозначим через T^i_ω подграф, вершины которого являются образами вершин подграфа T_ω под действием автоморфизма S^i_f, а ребра имеют тип u или t. Положим $\mathcal{T}_\omega = \bigcup\limits_{i=0}^{m_\omega-1} T^i_\omega$.

Определим гомеоморфизм S_ω множества $\mathcal{T}_\omega$ на себя следующим образом. Для каждой вершины $\gamma \in \mathcal{T}_\omega$ положим: $\tilde{S}_\omega(\gamma) = S_f(\gamma)$. Пусть γ_1 и γ_2 вершины инцидентные ребру ψ^ν цвета $\nu \in \{s,t\}$. Из свойств автоморфизма S_f следует, что для вершин $S^i_f(\gamma_1)$ и $S^i_f(\gamma_2)$ найдется в точности одно ребро $\tilde{\psi}^\nu$ цвета ν, которому они инцидентны. Определим $S_\omega : \psi \to \tilde{\psi}$, полагая его произвольным гомеоморфизмом на внутренности ребра ψ и равным $\tilde{S}_\omega$ на границе.

Изоморфизм графов $\eta : T(f) \to T(f')$, сопрягающий автоморфизмы S_f и $S_{f'}$, индуцирует гомеоморфизм $\tilde{\eta} : S_\omega \to S_{\omega'}$, такой что $S_{\omega'} = \tilde{\eta} S_\omega \tilde{\eta}^{-1}$.

Положим $\gamma \in \mathcal{T}_\omega$ и q минимальное из чисел $q_f \in \{1, \cdots, m_f - 1\}$ такое, что $\gamma^* = S^{q_f}_\omega(\gamma)$ и хотя бы одна из компонент связности, обозначим ее через K_ω, множества $T_\omega \setminus (\gamma \cup \gamma^*)$ не содержит образов вершины γ под действием S^i_ω для всех $i \in \{1, \cdots, m_f - 1\}$.

Компонента связности K_ω, является порождающей областью для действия гомеоморфизма S_ω на множестве $\mathcal{T}_\omega$, то есть $\bigcup\limits_{i=0}^{m_f} \overline{S^i_\omega(K_\omega)} = \mathcal{T}_\omega$.

Положим $K'_{\omega'} = \tilde{\eta}(K_\omega)$, эта область является порождающей для гомеоморфизма S'_ω. В силу топологической сопряженности S_ω и $S_{\omega'}$ сопряжены и степени гомеоморфизмов $\tilde{\eta} S^{q_f}_\omega = S^{q_f}_{\omega'} \tilde{\eta}$. Граничными точками области $K'_{\omega'}$ будут точки $\gamma' = \tilde{\eta}(\gamma)$ и $\gamma'^* = S^{q_f}_{\omega'}(\gamma') = \tilde{\eta}^{-1} S^{q_f}_\omega \tilde{\eta}(\gamma')$.

Таким образом число q_f будет минимальным из чисел $q_f \in \{1, \cdots, m_f - 1\}$ таким, что $\gamma'^* = S^q_\omega(\gamma')$ и хотя бы одна из компонент связности, множества $T_{\omega'} \setminus (\gamma' \cup \gamma'^*)$ не содержит образов вершины γ' под действием $S^i_{\omega'}$ для всех $i \in \{1, \cdots, m_f - 1\}$.

Таким образом, доказана следующая лемма

Л е м м а 4.2. *Если существует изоморфизм η графов $T(f)$ и $T(f')$, сопрягающий автоморфизмы S_f и $S'_{f'}$, то числа q_f и $q_{f'}$ равны.*

В силу того, что вершинам трехцветного графа $T(f)$ соответствуют треугольные области диффеоморфизма f, то число q_f будет минимальным из возможных $q_f \in \{1, \cdots, m_f - 1\}$ таких, что сепаратриса $l^* = f^{q_f}(l)$ и хотя бы одна из компонент связности множества $B_\omega \setminus (l \cup l^*)$ не содержит образов сепаратрисы $l \in L^l_\omega$ под действием

f^i для всех $i \in \{1, \cdots, m_f - 1\}$. Из леммы 4.2. следует, что $q_f = q_{f'}$ для сепаратрис из множеств L_ω и $L_{\omega'}$

Положим $M_2 = M^2 \setminus \bigcup\limits_{\sigma \in \Omega_1} W^s_\sigma$, $M'_2 = M^2 \setminus \bigcup\limits_{\sigma' \in \Omega_1} W^s_{\sigma'}$.

Лемма 4.3. *Пусть существует изоморфизм η графов $T(f)$ и $T(f')$, сопрягающий автоморфизмы S_f и $S'_{f'}$, тогда существует гомеоморфизм $\tilde{h} : M_2 \to M'_2$, такой что $\tilde{h}f = f'\tilde{h}$.*

Доказательство. Рассмотрим диффеоморфизмы $f, f' \in G$, трехцветные графы которых изоморфны, то есть существует изоморфизм $\eta : T(f) \to T(f')$.

Положим $b(b')$ замкнутый интервал, принадлежащий сепаратрисе $l(l')$, с граничными точками y и $f^{m_f}(y)$ (y' и $f'^{m_f}(y')$). Пусть $h_b : b \to b'$, произвольный сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, удовлетворяющий следующим условиям: 1. $h_b(y) = y'$; 2. $h_b(f^{m_f}(y)) = f'^{m_f}(y')$. Продолжим h_b до гомеоморфизма $h_l : l \to l'$ следующим образом: $h_l(x) = f'^{p \cdot m_f} h_b f^{-p \cdot m_f}(x)$, где $x \in l$, $p \in \mathbb{Z}$ такое, что $f^{-p \cdot m_f}(x) \in b$.

Напомним, что $l^* = f^q(l)$ и зададим гомеоморфизм $h_{l^*} : l^* \to l'^*$ следующим образом: $h_{l^*} = f'^{q \cdot m_f} h_l f^{-q \cdot m_f}$, где $q \in \{1, \cdots, m_f - 1\}$ такое, что $f^{-q \cdot m_f}(l^*) = l$. Покажем, что h_{l^*} удовлетворяет условию $h_{l^*} f^{m_f} = f'^{m_f} h_{l^*}$. Так как $h_l f^{m_f} = f'^{m_f} h_l$, то распишем $h_{l^*} f^{m_f} = f'^{m_f \cdot q} h_l f^{-m_f \cdot q} f^{m_f} = f'^{m_f \cdot q} h_l f^{m_f} f^{-m_f \cdot q} = f'^{m_f \cdot q} f'^{m_f} h_l f^{-m_f \cdot q} = f'^{m_f} f'^{m_f \cdot q} h_l f^{-m_f \cdot q} = f'^{m_f} h_{l^*}$.

Положим b^* замкнутый интервал, принадлежащий сепаратрисе l^*, с граничными точками $y^* = c_\omega \cap l^*$ и $f^{m_f}(y^*) = \tilde{c}_\omega \cap l^*$. Отображение h_{b^*} - это ограничение h_{l^*} на b^*, то есть $h_{b^*} = h_{l^*}|_{b^*}$.

Рассмотрим произвольный замкнутый гладкий диск $B_{\omega'}$, содержащий ω', с границей $c_{\omega'} = \partial B_{\omega'}$, такой что $c_{\omega'} \cap l' = y'$ и $c_{\omega'} \cap l'^* = y'^*$. Согласно лемме 2 можно таким образом поправить $c_{\omega'}$, что $f'(B_{\omega'}) \subset B_{\omega'}$ и $f'(B_{\omega'}) \cap B_{\omega'} = \emptyset$.

Положим a - замкнутый интервал, принадлежащий кривой c_ω с граничными точками y и y^* такой, что $a \cap \bigcup\limits_{k=1}^{m_f} f^k(l) = \{l, l^*\}$. Аналогичные обозначения введем для диффеоморфизма f'. Обозначим через h_a произвольный сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h_a : a \to a'$ такой, что $h_a(y) = y'$ и $h_a(y^*) = y'^*$.

Далее положим, что $\tilde{a}$ - это замкнутый интервал, принадлежащий кривой $\tilde{c}_\omega$ с граничными точками $f^{m_f}(y)$ и $f^{m_f}(y^*)$ такой, что $\tilde{a} \cap \bigcup\limits_{k=1}^{m_f} f^k(l) = \{l, l^*\}$. Определим отображение $h_{\tilde{a}} : \tilde{a} \to \tilde{a}$ следующим образом: положим $h_{\tilde{a}}(f^{m_f}(y)) = f'^{m_f}(y')$ и произвольной точке $\xi \in \tilde{a}$ поставим в соответствие $\xi' \in \tilde{a}'$, где $\xi' = f'^{m_f} h_{\tilde{a}} f^{-m_f}(\xi)$.

Обозначим через Q область, граница которой представляется в виде $\partial Q = a \cup \tilde{a} \cup b \cup b^*$ (рис. 3.1). Пусть $h_Q : \partial Q \to \partial Q'$ гомеоморфизм, заданный следующим образом:

$$h_Q(x) = \begin{cases} h_a(x), & \text{если } x \in a; \\ h_{\tilde{a}}(x), & \text{если } x \in \tilde{a}; \\ h_b(x), & \text{если } x \in b; \\ h_{b^*}(x), & \text{если } x \in b^*. \end{cases}$$

Тогда существует гомеоморфизм $H_Q : Q \to Q'$ такой, что $H_Q|_{\partial Q} = h_Q|_{\partial Q}$.

Положим $\tilde{Q}$ - область, ограниченная сепаратрисами l и l^* и не содержащая других сепаратрис из множества L^l_ω. Продолжим H_Q, заданный на Q на $\tilde{Q}$, следующим образом: $H_{\tilde{Q}}(x) = f'^{p \cdot m_f} H_Q f^{-p \cdot m_f}(x)$, где $x \in \tilde{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$ такое, что $f^{-p \cdot m_f}(x) \in Q$.

На остальных областях $\tilde{Q}_k$, в границу каждой из которых входят две сепаратрисы из множества L^l_ω и не содержащих других сепаратрис из множества L^l_ω, зададим гомеоморфизм $H_{\tilde{Q}_k} : \tilde{Q}_k \to \tilde{Q}'_k$. Положим $H_{\tilde{Q}_k} = f'^{p \cdot m_f} H_{\tilde{Q}} f^{-p \cdot m_f}$, $p \in \mathbb{Z}$ такое, что $f^{-p \cdot m_f}(\tilde{Q}_k) = \tilde{Q}$.

Покажем, что $H_{\tilde{O}_k}$ удовлетворяет условию $H_{\tilde{O}_k} f^{m_f} = f'^{m_f} H_{\tilde{O}_k}$. Так как $H_{\tilde{O}} f^{m_f} = f'^{m_f} H_{\tilde{O}}$, то распишем $H_{\tilde{O}_{k^*}} f^{m_f} = f'^{p \cdot m_f} H_{\tilde{O}_k} f^{-p \cdot m_f} f = f'^{p \cdot m_f} H_{\tilde{O}_k} f^{m_f} f^{-p \cdot m_f} = f'^{p \cdot m_f} f'^{m_f} H_{\tilde{O}_k} f^{-p \cdot m_f} = f'^{m_f} f'^{p \cdot m_f} H_{\tilde{O}_k} f^{-p \cdot m_f} = f'^{m_f} H_{\tilde{O}_k}$.

Определим гомеоморфизм $\tilde{h} : M^2 \setminus \bigcap\limits_{\sigma \in \Omega_1} W^s_\sigma \to M^2 \setminus \bigcap\limits_{\sigma' \in \Omega_1} W^s_{\sigma'}$, так что $\tilde{h}$ совпадает с h_ω для всех $\omega \in \Omega_0$.

Доказательство закончено.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится понятие схемы диффеоморфизма, введенное в [2].

Положим $V_f = W^s_{\Omega_0} \setminus \Omega_0$ - пространство орбит диффеоморфизма f, названное в [2] характеристическим многообразием и $\hat{V}_f = V_f / f$ - характеристическим пространством орбит для диффеоморфизма f. В силу [2] (предложение 2.1.5, теорема 2.1.3) многообразие $\hat{V}_f$ гомеоморфно двумерному тору $\mathbb{T}^2$. Обозначим через $p_{\hat{V}_f} : V_f \to \hat{V}_f$ естественную проекцию, являющуюся накрытием, индуцирущим отображение $\zeta_f : \pi_1(\hat{V}_f) \to \mathbb{Z}$, которое состоит из нетривиальных гомоморфизмов в группу $\mathbb{Z}$ на фундаментальной группе каждого тора из множества $\hat{V}_f$.

Для любой седловой точки $\sigma \in \Omega_1$ положим $\hat{W}^u_\sigma = p_{\hat{V}_f}(W^u_\sigma \setminus \sigma)$ и $\mathbb{W}^u_f = \bigcup_{\sigma \in L_{\Omega_1}} W^u_\sigma$ и введем автоморфизм $\varphi_f = p_{\hat{V}_f} f p^{-1}_{\hat{V}_f} : \hat{V}_f \to \hat{V}_f$.

Набор $S_f = (\hat{V}_f, \mathbb{W}^u_f, \zeta_f, \varphi_f)$ назовем схемой диффеоморфизма f.

Определение 4.1. *Схемы S_f и $S_{f'}$ диффеоморфизмов назовем эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\hat{\varphi} : \hat{V}_f \to \hat{V}_{f'}$, такой что:*

1. $\zeta_f([c]) = \zeta_{f'}([\hat{\varphi}(c)])$ *для любой замкнутой кривой* $c \subset \hat{V}_f$
2. *для любой седловой точки* $\sigma \in \Omega_1$ *существует* $\sigma' \in \Omega'_1$, *такая что* $\widehat{\varphi}(\hat{W}^u_\sigma) = \hat{W}^u_{\sigma'}$;
3. $\hat{\varphi}\hat{\varphi}_f = \hat{\varphi}_{f'}\hat{\varphi}$

Следующая лемма устанавливает взаимосвязь схемы и трехцветного графа:

Лемма 4.4. *Если диффеоморфизмы f, f' имеют изоморфные трехцветные графы T_f, T'_f, то их схемы S_f, $S_{f'}$ эквивалентны.*

Доказательство. В силу леммы 4.3. существует гомеоморфизм $\tilde{h} : M^2 \setminus \bigcup\limits_{\sigma \in \Omega_1} W^s_\sigma \to M^2 \setminus \bigcup\limits_{\sigma' \in \Omega_1} W^s_{\sigma'}$, сопрягающий ограничения диффеоморфизмов на этих множества. Отображение $\hat{\varphi} = p'_{\hat{V}_{f'}} \tilde{h} p^{-1}_{\hat{V}_f}$ является гомеоморфизмом, осуществляющим эквивалентность схем $\hat{V}_f$ и $\hat{V}_{f'}$.

Доказательство закончено.

Обратимся к лемме 4.5., доказанной в книге [2].

Лемма 4.5. *Диффеоморфизмы $f, f' \in G$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы S_f и $S_{f'}$ эквивалентны.*

Теперь доказательство достаточности условий теоремы 1.1. следует из лемм 4.4., 4.5.

Список литературы

1. Безденежных А. Н., Гринес В. З., “Динамические свойства и топологическая классификация градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях”, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений: межвуз. тематич. сб. науч. тр.*. Т. Ч. 2, ред. Е. А. Леонтович-Андронова, ГГУ, Горький, 1987, 24–32.

2. Гринес В. З., Починка О. В, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 424 с.

3. Леонтович Е., Майер А. О, “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, *Доклады академии наук СССР*, **4**, 103 (1955), 557–560.

4. Ошемков А. А., Шарко В. В., “О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях”, *Математический сборник*, **8**, 189 (1998), 93-140.

5. Peixoto M. M., “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical systems*, 1973, 389-419.

6. Капкаева С. Х., “О топологической сопряженности градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей посредством трехцветного графа”, *Журнал СВМО*, **4**, 14 (2012), 34-43.

On classification of gradient-like diffeomorphisms on surfaces by means automorphisms of three-color graphs.

© V. Z. Grines[7], S. H. Kapkaeva[8]

Abstract. This article is a continuation of the paper [6], in which the conditions of topological conjugacy of gradient-like diffeomorphisms are found, under suggestion that wandering set consists of only fixed points. In this paper we consider the class of orientation preserving gradient-like diffeomorphisms whose nonwandering set admits an existence of periodic orbits of period greater than one. To each diffeomorphism we appreciate three-color graph equipped by an automorphism given on the set of vertices of the graph. It is stated that all vertices of the graph have the same period under action of the automorphism. It is proved that the three-color graph equipped with the automorphism, is a complete topological invariant in the considered class of diffeomorphisms

Key Words: Morse-Smale diffeomorphisms, gradient-like diffeomorphisms, topological conjugate diffeomorphisms, three-color graph.

[7] Professor, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; vgrines@yandex.ru.
[8] Student, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; kapkaevasvetlana@yandex.ru.