УДК 517.95

Смешанная задача для нелинейного уравнения в частных производных высокого порядка с максимумами по времени

© Т. К. Юлдашев[1], К. Х. Шабадиков[2]

Аннотация. В данной работе изучаются вопросы однозначной разрешимости для нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных, содержащего параболический оператор произвольной натуральной степени в линейной левой части и максимумы по времени в нелинейной правой части уравнения.

Ключевые слова: смешанная задача, уравнение высокого порядка, метод разделения переменных, обобщенные решения, однозначная разрешимость, максимумы по времени.

В области D рассматривается нелинейное псевдогиперболическое уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=f\left(t,x,u(t,x),\int\limits_0^t K(t,s)\max\left\{u(\tau,x)|\tau\in\left[\delta_1;\delta_2\right]\right\}ds\right) \tag{1.1}$$

с начальными

$$u(t,x)_{|t\notin D_T}=\varphi_0(t,x),\ u(t,x)_{|t=0}=\varphi_1(x),\ \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}u(t,x)_{|t=0}=\varphi_k(x),\ k=\overline{2,m} \tag{1.2}$$

и граничными условиями

$$u(t,x)_{|x=0}=u_{xx}(t,x)_{|x=0}=\cdots=\frac{\partial^{2(m-1)}}{\partial x^{2(m-1)}}u(t,x)_{|x=0}=$$

$$=u(t,x)_{|x=l}=u_{xx}(t,x)_{|x=l}=\cdots=\frac{\partial^{2(m-1)}}{\partial x^{2(m-1)}}u(t,x)_{|x=l}=0, \tag{1.3}$$

где $f(t,x,u,\vartheta)\in C(D\times\mathbb{R}^2)$, $\varphi_i(x)\in C^{2m}(D_l)$, $\varphi_i(x)_{|x=0}=\varphi_i''(x)_{|x=0}=\cdots=\varphi_i^{2m-2}(x)_{|x=0}=\varphi_i(x)_{|x=l}=\varphi_i''(x)_{|x=l}=\cdots=\varphi_i^{2m-2}(x)_{|x=l}=0$, $i=\overline{1,m}$, $\delta_k=\delta_k(t,u(t,x))\in C(D_T\times\mathbb{R})$, $k=1,2$, $0<K(t,s)\in C(D_T^2)$, $\varphi_0(0,x)=\varphi_1(x)$, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[0,T]$, $D_l\equiv[0,l]$, $0<T<\infty$, $0<l<\infty$, $0<m$ – натуральное число.

Отметим, что дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом находят много приложений: в теории автоматического управления, в теории автоколебательных систем, при изучении технических, экономических, экологических и других проблем [1], [2]. В частности, уравнения с запаздывающим аргументом появляются всякий раз, когда в рассматриваемой физической или технической задаче сила, действующая на материальную точку, зависит от скорости и положения этой точки не только в данный момент, но и в некоторый момент, предшествующий данный [3], [4].

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск; tursunbay@rambler.ru

[2] Доцент кафедры дифференциальных уравнений, Ферганский государственный университет, г. Фергана, Узбекистан; tursunbay@rambler.ru

В 70-е годы прошлого столетия появился новый особый класс обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений, правая часть которых наряду с «обычным» аргументом t зависит от конструкции $\max\Big\{x(\tau)|\tau\in\Big[\delta_1(t);\delta_2(t)\Big]\Big\}$, где $\delta_i(t)$ – отклонения аргумента, $i=1,2$, $0<\delta_1(t)<\delta_2(t)<\infty$. Их принято называть дифференциальными уравнениями с максимумами. Обыкновенные дифференциальные уравнения с максимумами впервые систематически изучались А. Р. Магомедовым [5]. В работе [6] показаны особенности теоретического исследования дифференциальных уравнений с максимумами.

Следует отметить, что изучению разного типа линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и их систем посвящены много работ и при этом применены разные методы (см., напр. [7] - [11]).

В данной работе, как и в [12], используется метод разделения переменных, основанный на поиске решения смешанной задачи (1.1)-(1.3) в виде ряда Фурье

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\,b_n(x), \tag{1.4}$$

где $b_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\lambda_n x,\ \lambda_n=\dfrac{n\pi}{l}$.

Множество $\Big\{a(t)=(a_n(t))\,|a_n(t)\in C\,[0,T]\,,\,n=1,2,3,\ldots\Big\}$ введением нормы

$$\|a(t)\|_{B_2(T)}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in D_T}|a_n(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

становится банаховым пространством и его обозначают так $B_2(T)$.

Для каждого $a(t)\in B_2(T)$ определяется оператор

$$Qa(t)=u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)b_n(x).$$

Через $E_2(D)$ обозначается множество значений этого оператора. Очевидно, что $Q\colon B_2(T)\to E_2(D)$ и $E_2(D)\subset L_2(D)$.

Обозначается через $W_2^{(k)}(D)$ множество функций $\Phi(t,x)$ таких, что $\Phi(t,x)$, $\dfrac{\partial^2}{\partial\,x^2}\Phi(t,x),\ldots,\dfrac{\partial^{2(m-1)}}{\partial\,x^{2(m-1)}}\Phi(t,x)$ при фиксированном $t\in D_T$ принадлежат области определения оператора $-\dfrac{\partial^{2m}}{\partial\,x^{2m}}$, имеют производные порядка k по t, принадлежащие $L_2(D_l)$ и обращаются в нуль при $t\geq T-\delta$ ($0<\delta$ – зависит от $\Phi(t,x)$), где

$$L_{2,2}(D)=\left\{u(t,x):\left[\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^l|u(t,x)|^2dx\right)dt\right]^{\frac{1}{2}}<\infty\right\}.$$

Ясно, что пространство $W_2^{(k)}(D)$ всюду плотно в пространстве $L_2(D)$.

О п р е д е л е н и е 1.1. *Если функция* $u(t,x) \in E_2(D)$ *для любого* $\Phi(t,x) \in W_2^{(2)}(D)$ *удовлетворяет следующему интегральному тождеству*

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l \Big\{u(t,y)\Big[\frac{\partial^m}{\partial t^m}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m-1}\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m+2}}{\partial t^{m-2}\partial y^4}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+3}}{\partial t^{m-3}\partial y^6}\Phi(t,y) + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-3}}{\partial t^3\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-2}}{\partial t^2\partial y^{2m-4}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{2m-1}}{\partial t\,\partial y^{2m-2}}\Phi(t,y) + \frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\Phi(t,y)\Big]-$$

$$-f\Big(t,y,u(t,y),\int\limits_0^t K(t,s)\max\Big\{u(\tau,y)|\tau\in\Big[\delta_1;\delta_2\Big]\Big\}ds\Big)\Phi(t,y)\Big\}\,dydt =$$

$$= \int\limits_0^l \varphi_1(y)\Big[\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^m}{\partial t^{m-2}\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m-3}\partial y^4}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+2}}{\partial t^{m-4}\partial y^6}\Phi(t,y) + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-4}}{\partial t^2\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-3}}{\partial t\,\partial y^{2m-4}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{2m-2}}{\partial y^{2m-2}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy-$$

$$-\int\limits_0^l \varphi_2(y)\Big[\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-3}\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^m}{\partial t^{m-4}\partial y^4}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m-5}\partial y^6}\Phi(t,y) + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-5}}{\partial t\,\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-4}}{\partial y^{2m-4}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy+$$

$$+\int\limits_0^l \varphi_3(y)\Big[\frac{\partial^{m-3}}{\partial t^{m-3}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-4}\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-5}\partial y^4}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^m}{\partial t^{m-6}\partial y^6}\Phi(t,y) + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-6}}{\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy - \cdots -$$

$$-\int\limits_0^l \varphi_{m-2}(y)\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy+$$

$$+\int\limits_0^l \varphi_{m-1}(y)\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy - \int\limits_0^l \varphi_m(y)\Big[\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy,$$

то она называется обобщенным решением смешанной задачи (1.1)-(1.3).

Покажем, что коэффициенты разложения $a_n(t)$ удовлетворяют следующей счетной системе нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ):

$$a_n(t) = w_n(t)+$$

$$+\int_0^t\int_0^l f\Big(s,y,Qa(s),\int_0^s K(s,\theta)\max\Big\{Qa(\tau)|\tau\in\Big[\delta_1(\theta,Qa(\theta));\delta_2(\theta,Qa(\theta))\Big]\Big\}d\theta\Big)\times$$
$$\times P_n(t,s)b_n(y)dyds,\ t\in D_T, \tag{1.5}$$

где

$$w_n(t)=\Big[\Big(1+\lambda_n^2t+\frac{\lambda_n^4}{2!}t^2+\frac{\lambda_n^6}{3!}t^3+\cdots+\frac{\lambda_n^{2m-2}}{(m-1)!}t^{m-1}\Big)\varphi_{1n}+$$
$$+t\Big(1+\lambda_n^2t+\frac{\lambda_n^4}{2!}t^2+\frac{\lambda_n^6}{3!}t^3+\cdots+\frac{\lambda_n^{2m-4}}{(m-2)!}t^{m-2}\Big)\varphi_{2n}+$$
$$+\frac{t^2}{2!}\Big(1+\lambda_n^2t+\frac{\lambda_n^4}{2!}t^2+\frac{\lambda_n^6}{3!}t^3+\cdots+\frac{\lambda_n^{2m-6}}{(m-3)!}t^{m-3}\Big)\varphi_{3n}+$$
$$+\cdots+\frac{t^{m-3}}{(m-3)!}\Big(1+\lambda_n^2t+\frac{\lambda_n^4}{2!}t^2\Big)\varphi_{(m-2)n}+$$
$$+\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\Big(1+\lambda_n^2t\Big)\varphi_{(m-1)n}+\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\varphi_{mn}\Big]\cdot\exp\Big\{-\lambda_n^2t\Big\},$$

$$P_n(t,s)=(m-1)!\cdot(t-s)^{m-1}\cdot\exp\Big\{-\lambda_n^2(t-s)\Big\},\ \varphi_{jn}=\int_0^l\varphi_j(y)b_n(y)dy,\ j=\overline{1,m}.$$

Действительно, согласно определению обобщенного решения для приближенного решения смешанной задачи (1.1)-(1.3) имеем

$$\int_0^t\int_0^l\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)b_n(y)\Big[\frac{\partial^m}{\partial s^m}\Phi(s,y)+m\frac{\partial^{m+1}}{\partial s^{m-1}\partial y^2}\Phi(s,y)+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m+2}}{\partial s^{m-2}\partial y^4}\Phi(s,y)+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+3}}{\partial s^{m-3}\partial y^6}\Phi(s,y)+\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-3}}{\partial s^3\partial y^{2m-6}}\Phi(s,y)+$$
$$+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-2}}{\partial s^2\partial y^{2m-4}}\Phi(s,y)+m\frac{\partial^{2m-1}}{\partial s\,\partial y^{2m-2}}\Phi(s,y)+\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\Phi(s,y)\Big]-$$
$$-f\Big(s,y,\sum_{i=1}^{\infty}a_i(s)b_i(y),\int_0^s K(s,\theta)\max\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}a_i(\tau)b_i(y)|\tau\in\Big[\delta_1;\delta_2\Big]\Big\}d\theta\Big)\Phi(s,y)\Big\}\,dyds=$$
$$=\int_0^l\varphi_1(y)\Big[\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\Phi(t,y)+m\frac{\partial^m}{\partial t^{m-2}\partial y^2}\Phi(t,y)+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m-3}\partial y^4}\Phi(t,y)+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+2}}{\partial t^{m-4}\partial y^6}\Phi(t,y)+\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-4}}{\partial t^2\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)+$$
$$+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-3}}{\partial t\,\partial y^{2m-4}}\Phi(t,y)+m\frac{\partial^{2m-2}}{\partial y^{2m-2}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy-$$
$$-\int_0^l\varphi_2(y)\Big[\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}\Phi(t,y)+m\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-3}\partial y^2}\Phi(t,y)+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^m}{\partial t^{m-4}\partial y^4}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m-5}\partial y^6}\Phi(t,y)+\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-5}}{\partial t\,\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-4}}{\partial y^{2m-4}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy+$$

$$+\int\limits_0^l\varphi_3(y)\Big[\frac{\partial^{m-3}}{\partial t^{m-3}}\Phi(t,y)+m\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-4}\partial y^2}\Phi(t,y)+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-5}\partial y^4}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m}}{\partial t^{m-6}\partial y^6}\Phi(t,y)+\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-6}}{\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy-$$

$$-\cdots-\int\limits_0^l\varphi_{m-2}(y)\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,y)+m\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial y^2}\Phi(t,y)+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy+$$

$$+\int\limits_0^l\varphi_{m-1}(y)\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,y)+m\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy-\int\limits_0^l\varphi_m(y)\Big[\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy, \qquad (1.6)$$

где $\delta_j=\delta_j\Big(\theta,\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i(\theta)b_i(y)\Big)$, $j=1,2$.

Пусть будет $\Phi(t,x)=\Phi_i(t,x)=h(t)\cdot b_i(x)\in W_2^{(m)}(D)$, $i=1,2,3,\ldots$, где $h(t)\in C^m(D_T)$. Тогда из (1.6) следует

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^l\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)b_n(y)\Big[(-1)^m h^{(m)}(s)b_i(y)+(-1)^{m-1}m\lambda_i^2h^{(m-1)}(s)b_i(y)+$$

$$+(-1)^{m-2}\frac{m(m-1)}{2}\lambda_i^4h^{(m-2)}(s)b_i(y)+\cdots+$$

$$+\frac{m(m-1)}{2}\lambda_i^{2m-4}h''(s)b_i(y)-m\lambda_i^{2m-2}h'(s)b_i(y)+\lambda_i^{2m}h(s)b_i(y)\Big]-$$

$$-f\Big(s,y,Qa(s),\int\limits_0^sK(s,\theta)\max\Big\{Qa(\tau)|\tau\in\Big[\delta_1(\theta,Qa(\theta));\delta_2(\theta,Qa(\theta))\Big]\Big\}d\theta\Big)\times$$

$$\times h(s)\Big\}dyds=0,\ t\in D_T.$$

Учитываем, что функции $b_n(x)$ полны и ортонормированны в $L_2(D_l)$. Тогда из последнего равенства получаем

$$\int\limits_0^t\Big[a_n(s)\Big((-1)^m h^{(m)}(s)+(-1)^{m-1}m\lambda_i^2h^{(m-1)}(s)+(-1)^{m-2}\frac{m(m-1)}{2}\lambda_i^4h^{(m-2)}(s)+$$

$$+\cdots+\frac{m(m-1)}{2}\lambda_i^{2m-4}h''(s)-m\lambda_i^{2m-2}h'(s)+\lambda_i^{2m}h(s)\Big)-$$

$$-\int\limits_0^lf\Big(s,y,Qa(s),\int\limits_0^sK(s,\theta)\max\Big\{Qa(\tau)|\tau\in\Big[\delta_1(\theta,Qa(\theta));\delta_2(\theta,Qa(\theta))\Big]\Big\}d\theta\Big)\times$$

$$\times h(s)b_n(y)dy\Big]ds=0,\ t\in D_T.$$

Далее, путем интегрирования по частям имеем

$$\int\limits_0^T h(t)\Big[a_n^{(m)}(t)+m\lambda_n^2a_n^{(m-1)}(t)+\frac{m(m-1)}{2}\lambda_n^4a_n^{(m-2)}(t)+\cdots+$$

$$+\frac{m(m-1)}{2}\lambda_n^{2m-4}a_n''(t)+m\lambda_n^{2m-2}a_n'(t)+\lambda_n^{2m}a_n(t)-$$

$$-\int\limits_0^l f\Big(t,y,Qa(t),\int\limits_0^t K(t,s)\max\Big\{Qa(\tau)|\tau\in\Big[\delta_1(s,Qa(s));\delta_2(s,Qa(s))\Big]\Big\}ds\Big)\times$$

$$\times b_n(y)dy\Big]dt=0,\ t\in D_T. \tag{1.7}$$

Так как $h(t)$ – любая функция, удовлетворяющая указанным выше условиям, то $a_n(t)$ имеет обобщенные производные порядка m по t в смысле Соболева на отрезке D_T. Поэтому из (1.7) следует

$$a_n^{(m)}(t)+m\lambda_n^2a_n^{(m-1)}(t)+\frac{m(m-1)}{2}\lambda_n^4a_n^{(m-2)}(t)+\cdots+$$

$$+\frac{m(m-1)}{2}\lambda_n^{2m-4}a_n''(t)+m\lambda_n^{2m-2}a_n'(t)+\lambda_n^{2m}a_n(t)=$$

$$=\int\limits_0^l f\Big(t,y,Qa(t),\int\limits_0^t K(t,s)\max\Big\{Qa(\tau)|\tau\in\Big[\delta_1(s,Qa(s));\delta_2(s,Qa(s))\Big]\Big\}ds\Big)\times$$

$$\times b_n(y)dy,\ t\in D_T. \tag{1.8}$$

Система (1.8) решается методом вариации произвольных постоянных

$$a_n(t)=\Big(C_{1n}+C_{2n}t+C_{3n}t^2+C_{4n}t^3+\cdots+C_{mn}t^{m-1}\Big)\cdot\exp\Big\{-\lambda_n^2t\Big\}+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\Big(s,y,Qa(s),\int\limits_0^s K(s,\theta)\max\Big\{Qa(\tau)|\tau\in\Big[\delta_1(\theta,Qa(\theta));\delta_2(\theta,Qa(\theta))\Big]\Big\}d\theta\Big)\times$$

$$\times b_n(y)P_n(t,s)dyds,\ t\in D_T, \tag{1.9}$$

где

$$P_n(t,s)=(m-1)!\cdot(t-s)^{m-1}\cdot\exp\Big\{-\lambda_n^2(t-s)\Big\}.$$

Для определения коэффициентов $C_{in}(i=\overline{1,m})$ используются условия

$$a_n(0)=\varphi_{1n},a_n'(0)=\varphi_{2n},a_n''(0)=\varphi_{3n},\ldots,a_n^{m-1}(0)=\varphi_{mn}.$$

При этом начальные данные φ_{in} подбираются из условия (1.2) таким образом

$$\varphi_i(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{in}b_n(x),\ \varphi_i(x)\in L_2(D_l),\ i=\overline{1,m}.$$

Тогда имеем

$$C_{1n} = \varphi_{1n},$$

$$C_{2n} = \lambda_n^2 \varphi_{1n} + \varphi_{2n},$$

$$C_{3n} = \frac{1}{2!}\Big[\lambda_n^4 \varphi_{1n} + 2\lambda_n^2 \varphi_{2n} + \varphi_{3n}\Big],$$

$$C_{4n} = \frac{1}{3!}\Big[\lambda_n^6 \varphi_{1n} + 3\lambda_n^4 \varphi_{2n} + 3\lambda_n^2 \varphi_{3n} + \varphi_{4n}\Big],$$

....

$$C_{mn} = \frac{1}{(m-1)!}\Big[\lambda_n^{2m-2}\varphi_{1n} + (m-1)\lambda_n^{2m-4}\varphi_{2n} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\lambda_n^{2m-6}\varphi_{3n} +$$

$$+ \cdots + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\lambda_n^4 \varphi_{(m-2)n} + (m-1)\lambda_n^2 \varphi_{(m-1)n} + \varphi_{mn}\Big].$$

Подстановка найденных значений $C_{in} (i = \overline{1, m})$ в (1.9) дает ССНИУ (1.5).

Рассмотрим укороченную систему нелинейных интегральных уравнений (УСНИУ):

$$a_n^N(t) = w_n(t) +$$

$$+ \int_0^t \int_0^l f\Big(s, y, Q^N a(s), \int_0^s K(s,\theta) \max\Big\{Q^N a(\tau) | \tau \in \Big[\delta_1(\theta, Q^N a(\theta)); \delta_2(\theta, Q^N a(\theta))\Big]\Big\} d\theta\Big) \times$$

$$\times P_n(t,s) b_n(y) dy ds, \; t \in D_T, \tag{1.10}$$

где $w_n(t)$ и $P_n(t,s)$ определяются как в ССНИУ (1.5), $Q^N a(t) = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n^N(t) \cdot b_n(x)$.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. $\int\limits_0^t \left\| f\left(s, x, Qw(s), \int\limits_0^s K(s,\theta) Qw(\theta) d\theta\right) \right\|_{L_2(D_l)} ds \le \Delta < \infty$*;*

2. $f(t, x, u, \vartheta) \in Lip\Big\{L_{0|u}, L_1(t)_{|\vartheta}\Big\}$, $0 < L_0 = const,\ 0 < L_1(t) \in C(D_T)$*;*

3. $\delta_i\big(t, u\big) \in Lip\Big\{L_{1+i}(t)_{|u}\Big\}$, $0 < L_{1+i}(t) \in C(D_T),\ i = 1, 2$*;*

4. $\| w(t) \|_{B_2^N(T)} < \infty$*, где* $\| w(t) \|_{B_2^N(T)} = \left[\sum\limits_{n=1}^{N} \max_{t \in D_T} |w_n(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

Тогда УСНИУ (1.10) *имеет единственное решение в пространстве* $B_2^N(T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем метод последовательных приближений:

$$\begin{cases} a_n^{N0}(t) = w_n(t),\ a_n^{Nk+1}(t) = w_n(t) + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_0^l f\Big(s, y, Q^N a^k(s), \int\limits_0^s K(s,\theta) \max\Big\{Q^N a^k(\tau) | \tau \in \Big[\delta_1^k; \delta_2^k\Big]\Big\} d\theta\Big) \times \\ \times P_n(t,s) b_n(y) dy ds,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots,\ t \in D_T, \end{cases} \tag{1.11}$$

где $\delta_i^k = \delta_i(\theta, Q^N a^k(\theta)),\ i = 1, 2$.

В силу условий теоремы для первой разности $a_n^{N1}(t) - a_n^{N0}(t)$ из (1.11) получим

$$\Big\| a^{N1}(t) - a^{N0}(t) \Big\|_{B_2^N(T)} \le$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} \int_0^t \int_0^l \Big| f\Big(s, y, Q^N a^0(s), \int_0^s K(s,\theta) \max\Big\{Q^N a^0(\tau) | \tau \in \Big[\delta_1^0; \delta_2^0\Big]\Big\} d\theta\Big)\Big| \times$$

$$\times |P_n(t,s)| \cdot |b_n(y)| dy ds \leq$$

$$\leq M_1 M_2 \int_0^t \int_0^l \Big| f\Big(s, y, Q^N a^0(s), \int_0^s K(s,\theta) \max\Big\{Q^N a^0(\tau) | \tau \in \Big[\delta_1^0; \delta_2^0\Big]\Big\} d\theta\Big)\Big| dy ds \leq$$

$$\leq M_1 M_2 \sqrt{l} \Delta, \tag{1.12}$$

где $M_1 = \|P(t,s)\|_{B_2^N(T)}$, $M_2 = \|b(x)\|_{B_2^N(l)}$.

С учетом (1.12) в силу второго и третьего условий теоремы для второй разности $a_n^{N2}(t) - a_n^{N1}(t)$ получим следующую оценку

$$\left\| a^{N2}(t) - a^{N1}(t) \right\|_{B_2^N(T)} \leq$$

$$\leq M_1 M_2 \int_0^t \int_0^l \Big| f\Big(s, y, Q^N a^1(s), \int_1^s K(s,\theta) \max\Big\{Q^N a^1(\tau) | \tau \in \Big[\delta_1^1; \delta_2^1\Big]\Big\} d\theta\Big) -$$

$$- f\Big(s, y, Q^N a^0(s), \int_1^s K(s,\theta) \max\Big\{Q^N a^0(\tau) | \tau \in \Big[\delta_1^0; \delta_2^0\Big]\Big\} d\theta\Big)\Big| dy ds \leq$$

$$\leq M_1 M_2^2 \int_0^t \int_0^l \Big[L_0 \left\| a_n^{N1}(s) - a_n^{N0}(s) \right\|_{B_2^N(T)} +$$

$$+ L_1(s) \int_0^s K(s,\theta) \cdot \Big\| \max\Big\{ a^{N1}(\tau) | \tau \in \Big[\delta_1(\theta, Q^N a^1(\theta)); \delta_2(\theta, Q^N a^1(\theta))\Big]\Big\} -$$

$$- \max\Big\{ a^{N0}(\tau) | \tau \in \Big[\delta_1(\theta, Q^N a^0(\theta)); \delta_2(\theta, Q^N a^0(\theta))\Big]\Big\} \Big\|_{B_2^N(T)} d\theta \Big] dy ds \leq$$

$$\leq M_1 M_2^2 \int_0^t \int_0^l \Big[L_0 \left\| a_n^{N1}(s) - a_n^{N0}(s) \right\|_{B_2^N(T)} +$$

$$+ L_1(s) \int_0^s K(s,\theta) \cdot \Big\| \max\Big\{ a^{N1}(\tau) | \tau \in \Big[\delta_1(\theta, Q^N a^1(\theta)); \delta_2(\theta, Q^N a^1(\theta))\Big]\Big\} -$$

$$- \max\Big\{ a^{N1}(\tau) | \tau \in \Big[\delta_1(\theta, Q^N a^0(\theta)); \delta_2(\theta, Q^N a^0(\theta))\Big]\Big\} +$$

$$+ \max\Big\{ a^{N1}(\tau) | \tau \in \Big[\delta_1(\theta, Q^N a^0(\theta)); \delta_2(\theta, Q^N a^0(\theta))\Big]\Big\} -$$

$$- \max\Big\{ a^{N0}(\tau) | \tau \in \Big[\delta_1(\theta, Q^N a^0(\theta)); \delta_2(\theta, Q^N a^0(\theta))\Big]\Big\} \Big\|_{B_2^N(T)} d\theta \Big] dy ds \leq$$

$$\leq M_1 M_2^2 \int_0^t \int_0^l \Big[L_0 \left\| a_n^{N1}(s) - a_n^{N0}(s) \right\|_{B_2^N(T)} +$$

$$+L_1(s)\int\limits_0^s K(s,\theta)\cdot\Big\|\max_{0\le\theta\le s}\Big|a^{N1}(\theta)-a^{N0}(\theta)\Big|+$$

$$+\Delta\sum_{i=1}^{2}\Big|\delta_i(\theta,Q^Na^1(\theta))-\delta_i(\theta,Q^Na^0(\theta))\Big|\Big\|_{B_2^N(T)}d\theta dyds\le$$

$$\le\Delta M_1^2M_2^3 l^{\frac{3}{2}}\Big(L_0+\max_{t\in D_T}\eta(t)\Big)t, \qquad (1.13)$$

где $\eta(t)=L_1(t)\cdot\int\limits_0^t|K(t,s)|\cdot\Big[1+\Delta\cdot\big(L_2(s)+L_3(s)\big)\Big]ds$.

Для произвольного натурального числа k подобно (1.13) получим

$$\big\|a^{Nk+1}(t)-a^{Nk}(t)\,\big\|_{B_2^N(T)}\le\Delta\Big(L_0+\max_{t\in D_T}\eta(t)\Big)^{k+1}l^{\frac{1}{2}+k}M_1^{k+1}M_2^{2k+1}\frac{t^k}{k!}. \qquad (1.14)$$

Существование решения УСНИУ (1.10) следует из оценки (1.14), так как при $k\to\infty$ последовательность функций $\{a^{Nk}(t)\}$ сходится равномерно по t к функции $a^N(t)\in B_2^N(T)$. Покажем единственность этого решения в пространстве $B_2^N(T)$. Пусть УСНИУ (1.10) имеет два решения: $a^N(t)\in B_2^N(T)$ и $\vartheta^N(t)\in B_2^N(T)$. Тогда для их разности получим оценку

$$\big\|a^N(t)-\vartheta^N(t)\big\|_{B_2^N(T)}\le\Delta\Big(L_0+\max_{t\in D_T}\eta(t)\Big)lM_1M_2^2\int\limits_0^t\big\|a^N(s)-\vartheta^N(s)\big\|_{B_2^N(T)}ds. \qquad (1.15)$$

Применяя к (1.15) неравенства Гронуолла, получим, что $\big\|a^N(t)-\vartheta^N(t)\big\|_{B_2^N(T)}\equiv 0$ для всех $t\in D_T$. Отсюда следует единственность решения УСНИУ (1.10) в пространстве $B_2^N(T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Подставляя ССНИУ (1.5) в ряд (1.4), получим формальное решение смешанной задачи (1.1)-(1.3):

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[w_n(t)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\Big(s,y,Qa(s),\int\limits_0^s K(s,\theta)\max\Big\{Qa(\tau)|\tau\in\Big[\delta_1(\theta,Qa(\theta));\delta_2(\theta,Qa(\theta))\Big]\Big\}d\theta\Big)\times$$

$$\times P_n(t,s)b_n(y)dyds\Big]\cdot b_n(x). \qquad (1.16)$$

Т е о р е м а 1.2. *Пусть выполняются условия теоремы 1.1. и* $\|w(t)\,\|_{B_2(T)}<\infty$. *Если* $a(t)\in B_2(T)$ *является решением ССНИУ* (1.5), *то ряд* (1.16) *сходится к обобщенному решению смешанной задачи* (1.1)-(1.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $a(t)\in B_2(T)$, то в силу условий теоремы следует, что

$$\lim_{N\to\infty}f\left(t,x,u^N(t,x),\int\limits_0^t K(t,s)\max\Big\{u^N(\tau,x)|\tau\in\Big[\delta_1\big(s,u^N\big);\delta_2\big(s,u^N\big)\Big]\Big\}ds\right)=$$

$$
= f\left(t, x, u(t,x), \int\limits_0^t K(t,s)\max\Big\{u(\tau,x)|\tau\in\Big[\delta_1\big(s,u\big);\delta_2\big(s,u\big)\Big]\Big\}ds\right) \tag{1.17}
$$

в смысле метрики $L_2(D)$.

Строим последовательность функционалов:

$$
V_N=\int\limits_0^T\int\limits_0^l\Big\{u^N(t,y)\Big[\frac{\partial^m}{\partial t^m}\Phi(t,y)+m\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m-1}\partial y^2}\Phi(t,y)+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m+2}}{\partial t^{m-2}\partial y^4}\Phi(t,y)+
$$

$$
+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+3}}{\partial t^{m-3}\partial y^6}\Phi(t,y)+\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-3}}{\partial t^3\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)+
$$

$$
+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-2}}{\partial t^2\partial y^{2m-4}}\Phi(t,y)+m\frac{\partial^{2m-1}}{\partial t\,\partial y^{2m-2}}\Phi(t,y)+\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\Phi(t,y)\Big]-
$$

$$
-f\Big(t,y,u^N(t,y),\int\limits_0^t K(t,s)\max\Big\{u^N(\tau,y)|\tau\in\Big[\delta_1^N;\delta_2^N\Big]\Big\}ds\Big)\Phi(t,y)\Big\}\,dydt=
$$

$$
=\int\limits_0^l\varphi_1^N(y)\Big[\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\Phi(t,y)+m\frac{\partial^m}{\partial t^{m-2}\partial y^2}\Phi(t,y)+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m-3}\partial y^4}\Phi(t,y)+
$$

$$
+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+2}}{\partial t^{m-4}\partial y^6}\Phi(t,y)+\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-4}}{\partial t^2\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)+
$$

$$
+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-3}}{\partial t\,\partial y^{2m-4}}\Phi(t,y)+m\frac{\partial^{2m-2}}{\partial y^{2m-2}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy-
$$

$$
-\int\limits_0^l\varphi_2^N(y)\Big[\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}\Phi(t,y)+m\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-3}\partial y^2}\Phi(t,y)+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^m}{\partial t^{m-4}\partial y^4}\Phi(t,y)+
$$

$$
+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m-5}\partial y^6}\Phi(t,y)+\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-5}}{\partial t\,\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)+
$$

$$
+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-4}}{\partial y^{2m-4}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy+
$$

$$
+\int\limits_0^l\varphi_3^N(y)\Big[\frac{\partial^{m-3}}{\partial t^{m-3}}\Phi(t,y)+m\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-4}\partial y^2}\Phi(t,y)+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-5}\partial y^4}\Phi(t,y)+
$$

$$
+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^m}{\partial t^{m-6}\partial y^6}\Phi(t,y)+\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-6}}{\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy-\cdots-
$$

$$
-\int\limits_0^l\varphi_{m-2}^N(y)\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,y)+m\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial y^2}\Phi(t,y)+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy+
$$

$$
+\int\limits_0^l\varphi_{m-1}^N(y)\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,y)+m\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy-\int\limits_0^l\varphi_m^N(y)\Big[\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy, \tag{1.18}
$$

где $\delta_j^N=\delta_j(t,u^N(t,x)),\ j=1,2$.

Интегрируя по частям отдельные слагаемые в (1.18) и учитывая условия теоремы и начальные условия

$$a_n(0) = \varphi_{1n}, a'_n(0) = \varphi_{2n}, a''_n(0) = \varphi_{3n}, \ldots, a_n^{m-1}(0) = \varphi_{mn},$$

получаем:

$$V_N = \int\limits_0^l \Big(\varphi_1(y) - \sum_{n=1}^N \varphi_{1n} b_n(y)\Big)\times$$

$$\times\Big[\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^m}{\partial t^{m-2}\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m-3}\partial y^4}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+2}}{\partial t^{m-4}\partial y^6}\Phi(t,y) + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-4}}{\partial t^2\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-3}}{\partial t\,\partial y^{2m-4}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{2m-2}}{\partial y^{2m-2}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0} dy-$$

$$-\int\limits_0^l \Big(\varphi_2(y) - \sum_{n=1}^N \varphi_{2n} b_n(y)\Big)\times$$

$$\times\Big[\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-3}\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m}}{\partial t^{m-4}\partial y^4}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m-5}\partial y^6}\Phi(t,y) + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-5}}{\partial t\,\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-4}}{\partial y^{2m-4}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0} dy+$$

$$+\int\limits_0^l \Big(\varphi_3(y) - \sum_{n=1}^N \varphi_{3n} b_n(y)\Big)\times$$

$$\times\Big[\frac{\partial^{m-3}}{\partial t^{m-3}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-4}\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-5}\partial y^4}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m}}{\partial t^{m-6}\partial y^6}\Phi(t,y) + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-6}}{\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0} dy - \cdots -$$

$$-\int\limits_0^l \Big(\varphi_{m-2}(y) - \sum_{n=1}^N \varphi_{m-2n} b_n(y)\Big)\times$$

$$\times\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi(t,y)\Big]_{t=0} dy+$$

$$+\int\limits_0^l \Big(\varphi_{m-1}(y) - \sum_{n=1}^N \varphi_{m-1n} b_n(y)\Big)\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(t,y)\Big]_{t=0} dy$$

$$-\int\limits_0^l \Big(\varphi_m(y) - \sum_{n=1}^N \varphi_{mn} b_n(y)\Big)\Big[\Phi(t,y)\Big]_{t=0} dy+$$

$$+\int_0^T\int_0^l \Phi(t,y)\Big[f\Big(t,y,u(t,y),\int_0^t K(t,s)\max\Big\{u(\tau,y)|\tau\in\Big[\delta_1;\delta_2\Big]\Big\}ds\Big)-$$
$$-\sum_{n=1}^N\int_0^l f\Big(t,z,u^N(t,z),\int_0^t K(t,s)\max\Big\{u^N(\tau,z)|\tau\in\Big[\delta_1^N;\delta_2^N\Big]\Big\}ds\Big)\times$$
$$\times b_n(z)dz\Big]\cdot b_n(y)dydt. \tag{1.19}$$

Очевидно, что первые m интегралов в (**??**) стремятся к нулю при $N\to\infty$, так как $\varphi_i(x)\in L_2(D_l)$. Сходимость последней разности в (1.19) при $N\to\infty$ следует из (1.17). Отсюда заключаем, что $\lim_{N\to\infty}V_N=0$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Список литературы

1. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б., *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наука, М., 1971, 296 с.

2. Азбелов Н. И., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф., *Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения*, Инст. Компьютер. Исследов., М., 2002, 384 с.

3. Мышкис А. Д., *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом*, Наука, М., 1972, 352 с.

4. Норкин С. Б., *Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом*, Наука, М., 1965, 350 с.

5. Магомедов А. Р., *Обыкновенные дифференциальные уравнения с максимумами*, Элм, Баку, 1991, 220 с.

6. Yuldashev T. K., Shabadikov K. H., *Introduction to the theory of nonlinear functional differential equations with maxima*, Hayot, Andijan, 1998, 128 с.

7. Александров В. М., Коваленко Е. В., *Задачи механики смлошных сред со смешанными граничными условиями*, Наука, М., 1986, 336 с.

8. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967, 736 с.

9. Нахушев А. М., “Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод”, *Дифференц. уравнения*, **18**:1 (1982), 72–81.

10. Похожаев С. И., “Об априорных оценках и градиентных катастрофах гладких решений гиперболических систем законов сохранения”, *Труды МИ РАН*, **243** (2003), 257–288.

11. Пулькина Л. С., “Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения”, *Мат. заметки*, **74**:3 (2003), 435–445.

12. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка”, *Журнал средневолжского мат. общества*, **14**:2 (2012), 137–142.

Mixed value problem for nonlinear partial equation of higher order with time maxima

© **T. K. Yuldashev, K. H. Shabadikov**[3]

Abstract. It is studied the questions of one valued solvability of mixed value problem for nonlinear partial integro-differential equation, consisting the parabolic operator of arbitrary natural power on the linear left-hand side and time maxima on the nonlinear right-hand side of this equation.
Key Words: mixed value problem, equation of the higher order, method of separation variables, generalized solution, one valued solvability, time maxima.

[3] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursunbay@rambler.ru.; Associate professor of Differential Equations Chair, Fergana State University, Fergana, Uzbekistan