В Средневолжском математическом обществе

УДК 681.3; 519.711

Популяция автоматов — модель сложной системы

© В. А. Воробьев[1], Ю. В. Березовская[2], А. Ю. Кочнев[3]

Аннотация. Описана модель коллективного поведения автоматов — популяция автоматов. Для моделирования динамики популяции применяется Каузальная Сеть. Позициям сети соответствуют состояния автоматов. Маркировка сети задаёт число автоматов, находящихся в соответствующих состояниях. Переходы отображают события, возникающие в результате совместных действий элементов популяции. На переходах сети заданы их вероятности. Это позволяет автоматически получить систему дифференциальных уравнений динамики средних с задержками времени. Система решается численно.

Ключевые слова: популяция автоматов, каузальная сеть, сеть Петри, динамика средних, моделирование.

1. Введение

Популяция автоматов — это система из N взаимодействующих автоматов (не обязательно одинаковых), в которых смена состояний отдельного автомата обусловлена состояниями некоторых других автоматов. А именно, состояния «воздействующих» автоматов влияют на «изменяемые» автоматы и переводят их в новые состояния, причём способ передачи воздействий и связи между автоматами не рассматриваются. Предполагается, что 1) все N_i автоматов в состоянии i равномерно распределены по системе и вероятность найти в любом месте автомат в состоянии i равна $\frac{N_i}{N}$ (сильное перемешивание); 2) все потоки событий в системе простейшие.

Популяции автоматов моделируют разнообразные массовые объекты: биологические, экономические и технические системы, параллельные программы [1]. С этой целью автоматы должны иметь стохастические характеристики — вероятности переходов в каждом такте. Поскольку число состояний популяции чрезвычайно велико, вычисления проводятся не для всех возможных состояний популяции, а для среднего числа автоматов в различных состояниях. Таким образом, полученный случайный процесс представляет динамику популяции «в среднем». Трудность состоит в том, что в известном методе динамики средних [2] все компоненты независимы друг от друга. Следует учесть взаимодействия между автоматами. Отсутствие метрики в популяции позволяет исследовать такие случайные системы, используя достижения теории параллельных процессов [1, 3]. В настоящей работе развиты идеи из [1, 3], опираясь на теорию сетей Петри и марковских процессов.

[1] Профессор кафедры программирования и высокопроизводительных вычислений, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; vva100@atnet.ru.

[2] Старший преподаватель кафедры программирования и высокопроизводительных вычислений, САФУ имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; myumla.myu@gmail.com

[3] Заведующий отделением ИТ-образования, САФУ имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; derxyz@yandex.ru

2. Каузальная сеть

2.1. Определение каузальной сети

Каузальная сеть (К-сеть) — это маркированная сеть Петри, в которой для каждого перехода задана интенсивность события-перехода, как функция от маркировки входных позиций перехода. Вид этих функций зависит от предметной области и задаётся отдельно в каждом конкретном случае. Потоки событий-переходов простейшие, т.е. стационарные (интенсивности меняются медленно), ординарные и без последействия.

Определение 2.1. *Каузальная сеть — это двудольный граф* $\boldsymbol{G} = \langle Q, D, \boldsymbol{In}, \boldsymbol{Out}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}\rangle$ *, где*

$Q = \{q_i \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$ *— множество позиций, соответствующее множеству состояний, на которых определены все автоматы;*

$D = \{d_j \mid j = 1, 2, \ldots, m\}$ *— множество переходов автоматов из состояния в состояние;*

$\boldsymbol{In}$ *— функция предшествования, ставит в соответствие каждой паре* (q_i, d_j) *неотрицательное число* $k_{ij} \geq 0$ *, где* k_{ij} *— вес дуги из позиции* q_i *в переход* d_j *, если соответствующей дуги нет,* $k_{ij} = 0$ *(*$^*d_j$ *— множество входных позиций перехода);*

$\boldsymbol{Out}$ *— функция следования, ставит в соответствие каждой паре* (d_j, q_i) *неотрицательное число* $k_{ij} \geq 0$ *, где* k_{ji} *— вес дуги из перехода* d_j *в позицию* q_i *, если соответствующей дуги нет,* $k_{ji} = 0$ *(*d_j^* *— множество выходных позиций перехода);*

$\boldsymbol{M}_t = \{N_{it} \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ *— вектор маркировки, своими компонентами задающий число автоматов, находящихся в момент времени* t *в каждом из состояний множества* Q *;*

$\boldsymbol{R} = \{p_j(\boldsymbol{M}_t(^*d_j)) \mid j = 1, \ldots, m\}$ *— вектор-функция интенсивностей переходов, определяющая среднее число срабатываний перехода* d_j *в течение одного такта или число таких срабатываний в единицу времени, зависящее от маркировки множества* $^*d_j$ *.*

Позиция $q_0 \in Q$ называется внешней, имеет сколь угодно большое или единичное (если надо) значение маркера N_0, не меняет его при переходах и может не изображаться на рисунке графа. Состояния автоматов и позиции множества $\{q_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ назовём собственными. Граф $\mathbf{G}$ изображает причинно следственные связи между состояниями автоматов и интенсивности этих связей.

В отличие от канонической сети Петри множество весовых коэффициентов дуг К-сети — это положительные действительные числа, приписанные входным и выходным дугам j-того перехода: k_{ij} или k_{ji}, соответственно. Точно также мы будем допускать действительные числа в качестве маркеров N_i для позиций. Это позволит маркировать сеть вероятностями состояний автоматов и вообще избавиться от целых чисел. В таких случаях будем считать популяцию счётным множеством.

2.2. Описание К-сети

Описание К-сети состоит в описании двух ее частей:

1. статическая часть — маркировка $\mathbf{M}_0$ в начальный момент времени $t = 0$;
2. динамическая часть — описание переходов.

Каждый переход d_j описывается выражениями:

1. перечисление множества $^*d_j$ с коэффициентами k_{ij};
2. перечисление множества d_j^* с коэффициентами k_{ji};
3. интенсивность $p_j(\mathbf{M}_t(^*d_j))$ перехода;
4. тип перехода,

5. задержки во времени.

В общем случае описание перехода это выражение вида:

${}^*d_j > d_j^* : p_j(\mathbf{M}_t({}^*d_j)) :$ тип, задержки.

Внешнее состояние в описании не присутствует, так что допустимы переходы с неполной левой или правой частью.

3. Каузальные модели популяций

Как и сеть Петри, К-сеть может использоваться для моделирования сложных систем, состоящих из множества взаимодействующих элементов — популяций. Абстрагируясь от природы популяции, будем называть её элементы автоматами. А саму динамическую модель, построенную на основе К-сети, будем называть каузальной моделью (К-моделью). Этот последний термин подчёркивает динамический характер и модельную функцию К-сети.

3.1. К-модель мобилизации

Проще всего пояснить основные идеи популяционного моделирования на примере. Рассмотрим, например, замкнутую «популяцию», которую представим как популяцию автоматов-особей с двумя состояниями L (live, живая) и D (dead, мёртвая). Вероятность гибели особи (перехода из L в D) в течение одного такта равна p. Живая особь, может поглотить одну мёртвую и разделиться на двух живых или, иначе говоря, оживить мёртвую особь. Вероятность этого события в течение одного такта равна q. Временем на поглощение и деление можно пренебречь по сравнению со временем поиска добычи. В популяции определены два перехода: гибель, независимая от состояния популяции, и восстановление, возможное только при наличии одной живой и одной мёртвой особи.

При описании К-моделей общего вида мы использовали обозначение N_i для числа автоматов, находящихся в состоянии i. Чтобы не загромождать запись уравнений буквой N, её можно опускать, и тогда имя состояния будет обозначать и число автоматов в этом состоянии как это показано на Рис.3.1 и принято в элементарной алгебре. С той же целью экономии обозначений мы записываем функцию времени $X(t)$ в виде X_t или вообще без индекса.

Предложенная К-модель имеет множество различных интерпретаций. Это и модель заселения мест (D) экологической ниши живыми (L) организмами, и модель замены отказавших узлов системы (D) исправными узлами (L), это и модель спасения раненых на поле боя живыми бойцами, это, наконец, модель мобилизации призывников (D) теми, кто уже призван в армию (L), причём призывники активно избегают призыва — «умирают». Последняя интерпретация позволяет называть описанную популяцию моделью мобилизации, как это принято в экономической литературе. Автоматы этой модели мы будем называть особями.

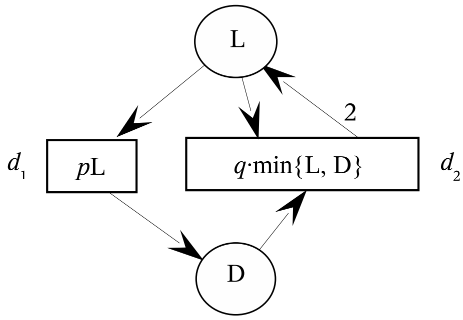

Рисунок **3.1**

Каузальная сеть линейной модели мобилизации

Зададим описание К-сети для модели мобилизации представленной на Рис.3.1. Описание переходов:

$L_0 = L_{beg}$, $D_0 = D_{beg}$;

$L > D : pL$: линейный;

$L : D > 2L : q \cdot \min\{L, D\}$: линейный.

Интерпретация предложенного описания популяции зависит от единицы времени. Если единица времени достаточно мала, то $p \ll 1$ и $q \ll 1$ — вероятности срабатывания переходов в течение такта, а pL и $q \cdot \min\{L, D\}$ — среднее число автоматов, изменяющих состояние за такт. Если единица времени велика, то p и q — интенсивности переходов одного автомата, а величины pL или $q \cdot \min\{L, D\}$ — это интенсивности переходов на всём множестве автоматов.

3.2. Динамика К-модели

Граф, который мы назвали К-сетью, — это статическая модель популяции автоматов. Она задаёт только причинно следственные связи между элементами системы автоматов. Динамическая модель популяции — К-модель — определяется функционированием К-сети. Функционирование К-сети подобно несущей сети Петри с учётом интенсивностей переходов, а именно: переход d_j срабатывает только тогда, когда маркировка его входа такова, что $\mathbf{M}(^*d_j) \geq \mathbf{In}(d_j)$. Один переход К-сети описывает множество допустимых изменений состояний автоматов, заданное интенсивностью. В нашем примере: $L \geq 1$ и $\min\{L, D\} \geq 1$. При срабатывании перехода маркировка на его входе уменьшается, а на выходе увеличивается согласно интенсивностям. В нашем примере переход $L > D : pL$ уменьшает маркировку L и увеличивает маркировку D на pL, а переход: $L :> 2L : q \cdot \min\{L, D\}$: линейный уменьшает D на $q \cdot \min\{L, D\}$ и увеличивает L на $q \cdot \min\{L, D\}$.

Пусть $N_t = \sum_{i=1}^{n} N_{it}$ — численность популяции в момент t, $P_{it} = \frac{N_{it}}{N_t}$ — доля автоматов, находящихся в момент t в состоянии N_i. При $N_t \to \infty$ величина P_{it} — это вероятность пребывания автомата в i-том состоянии. Вектор-функция

$$\mathbf{P}_t = \{P_{it} \mid i = 1, \ldots, n\}$$

задаёт динамику популяции в среднем или её *поведение*.

3.3. Уравнения динамики средних для замкнутой популяции

Пусть $R = d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots, d_s$ — допустимая последовательность переходов К-сети. Рассмотрим только тот случай, когда сеть такова, что каждый из её переходов неоднократно найдётся в последовательности R при достаточно длительном наблюдении. Вектор $\mathbf{R}$ длины m, в котором j-тая компонента это число вхождений перехода d_j в последовательность R, называется *характеристикой* последовательности R или *характеристикой динамики* К-сети. Взяв период наблюдения К-сети за единицу времени, мы отождествим характеристику $\mathbf{R}$ и вектор-функцию

$$\mathbf{R} = \{p_j(\mathbf{M}_t(^*d_j)) \mid j = 1, \ldots, m\}$$

интенсивностей переходов. Пусть теперь $\mathbf{R}$ — вектор-столбец длины m, характеризующий динамику (число переходов) К-сети за единичное время. Тогда вектор-столбец $\mathbf{R}\Delta t$ — характеристика динамики за время Δt.

Функции $\mathbf{In}$ и $\mathbf{Out}$ для К-сети задаются $(n \times m)$-матрицами инциденций, где строкам соответствуют позиции сети (кроме внешней), а столбцам — переходы. Элементы этих матриц значения k_{ij} и k_{ji}, соответственно. Вектор столбец $\mathbf{R}$ соответствует длине строки матриц $\mathbf{In}$ и $\mathbf{Out}$. Наглядно это демонстрирует Таблица 1. Динамика К-сети (К-модель)

Таблица 1: Матричное описание К-модели мобилизации

$\mathbf{In}$	d_1	d_2
L	1	1
D	0	1

$\mathbf{Out}$	d_1	d_2
L	0	2
D	1	0

$\mathbf{D}$	d_1	d_2
L	-1	1
D	1	-1

$\mathbf{R} = \{p_j(\mathbf{M}_t(^*d_j)) \mid j = 1, 2\}$
pL
$q \cdot min\{L, D\}$

задаётся матричным уравнением К-сети, аналогичным фундаментальному уравнению сети Петри:

$$\Delta\mathbf{M} = \mathbf{Out} \bullet \mathbf{R}\Delta t - \mathbf{In} \bullet \mathbf{R}\Delta t = (\mathbf{Out} - \mathbf{In}) \bullet \mathbf{R}\Delta t = \mathbf{D} \bullet \mathbf{R}\Delta t$$

где:

$\mathbf{Out} - \mathbf{In} = \mathbf{D}$ — оператор изменения маркировки сети или $\mathbf{D}$-оператор (от Derivative — производная);

$\Delta\mathbf{M}$ — вектор-столбец длины n — изменение маркировки сети при срабатывании любой допустимой последовательности переходов с характеристикой $\mathbf{R}\Delta t$;

$\bullet$ — матричное умножение.

Устремим Δt к нулю, и заменим его на дифференциал dt. Тогда и $\Delta\mathbf{M}$ станет величиной более высокого порядка малости по отношению к $\mathbf{M}$: $\Delta\mathbf{M} = o(\mathbf{M})$ и её тоже можно заменить на dM. Теперь можно перейти к дифференциальному виду, и записать дифференциальное уравнение динамики средних К-сети в векторном виде:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{D} \bullet \mathbf{R}$$

Приравняв производную нулю, получим уравнение для стационарного режима:

$$\mathbf{D} \bullet \mathbf{R} = 0$$

Кроме этих уравнений для замкнутых популяций справедлива нормировка

$$\sum_{i=1}^{n} P_{it} = 1 \text{ или, что то же, } \sum_{i=1}^{n} N_{it} = N$$

Особенностью полученных линейных систем является тот факт, что уравнения в них могут быть расщепляемыми.

В нашем примере с популяцией особей имеем систему

$$\frac{dL}{dt} = q \cdot min\{L, D\} - pL$$

$$\frac{dD}{dt} = pL - q \cdot min\{L, D\}$$

где каждое из уравнений расщепляется на два различных уравнения, действующих в зависимости от соотношения значений L и D. Поскольку популяция замкнута и $N = L + D = const$, эти два дифференциальных уравнения сводятся к одному

$$\frac{dL}{dt} = q \cdot min\{L, N - L\} - pL$$

которое расщепляется на два уравнения и интегрируется.

3.4. Классификация К-моделей

К-модели классифицируются по нескольким критериям.

Во-первых, следует выделить линейные и нелинейные модели взаимодействий. Эти модели отличаются видом функций интенсивностей переходов $p_j(\mathbf{M}_t(^*d_j))$.

Во-вторых, о сложности модели можно судить по числу состояний и автоматов, участвующих в одном акте взаимодействия и в переходе.

В-третьих, К-модели различаются по составу моделируемой популяции.

Все эти различия решающим образом влияют на моделирование популяций и, следовательно, требуют более содержательного описания.

3.4..1 Линейные и нелинейные взаимодействия

Линейные взаимодействия таковы, что интенсивности $p_j(\mathbf{M}_t(^*d_j))$ пропорциональны минимальным маркерам N_{it} в $\mathbf{M}_t(^*d_j)$. Линейные модели адекватны в тех случаях, когда интенсивность перехода является имманентным свойством каждого отдельного автомата. Так в нашей гипотетической популяции способность восстанавливать мертвую особь присуща только части особей, находящихся в состоянии L, но если уж эта способность есть, то она реализуется, и эта реализация единственна в данном такте.

Нелинейные популяции таковы, что $p_j(\mathbf{M}_t(^*d_j))$ зависит от степеней и произведений маркировок N_{it} из $\mathbf{M}_t(^*d_j)$. Нелинейная модель адекватна, если интенсивность перехода пропорциональна вероятности возможных благоприятных сочетаний, причём все эти сочетания и соответствующие переходы могут быть реализованы в одном такте с заданной вероятностью. Так, в модели мобилизации следовало бы учесть вероятность «встречи» одной живой и одной мёртвой особи, точнее попадания мёртвой особи в поле зрения живой. Тогда интенсивность восстановления пропорциональна величине $\frac{L \cdot M}{N}$.

3.4..2 Простые популяции

Сложность популяции задаётся числом взаимодействующих автоматов в каждом переходе. Полезно выделить наиболее простые случаи.

Простые популяции таковы, что взаимодействуют только пары автоматов. Каждый переход инициируется одним или двумя состояниями, а простой $\mathbf{D}$-оператор состоит из нулей и единиц, может быть с разными знаками. В столбцах матрицы D находится не более двух единиц, как в примере с «особями».

3.4..3 Простые растворы и смеси

Автоматизируем подсчёт интенсивностей переходов в простых К-моделях популяций. Будем полагать, что моделируемые популяции *сильно перемешаны*, т.е. каждый автомат в любом состоянии i может оказаться в любом месте с одинаковой вероятностью $\frac{N_i}{N}$ независимо от расстояния до него.

Что касается *линейных* взаимодействий, то формулы для интенсивностей переходов, представленные в п. 3.1 в комментариях не нуждаются и их вычисление всегда можно провести автоматически. Однако *нелинейные* взаимодействия допускают различные интерпретации и способы вычисления интенсивностей. Для простоты рассмотрим только простые нелинейные популяции, поскольку результаты легко обобщаются на нелинейные популяции общего вида. Выделим два типа простых нелинейных взаимодействий: *раствор* и *смесь*.

Взаимодействие типа *раствор* предполагает равномерное размещение взаимодействующих автоматов во множестве мощности N мест, большинство из которых — места, не содержащие взаимодействующих автоматов. Примерами в биологии являются популяции, которые не собираются в одном месте для воспроизводства. Проблемой таких популяций является низкая вероятность встречи, если ареал расселения велик по сравнению с численностью популяции. Вероятность встречи самца и самки может оказаться меньше чем вероятность смерти отдельной особи, и популяция вымирает из-за малой численности в большом ареале расселения.

Взаимодействие типа *смесь* происходит в ограниченной области как, например, птичьи базары, пассажиры в трамвае или покупатели в магазине. Так что вероятность взаимодействия данной пары не зависит от общего числа мест, а зависит только от количества автоматов собравшихся вместе для взаимодействий.

Ясно, что в сложных системах различные взаимодействия могут происходить по-разному: и линейно, и как в растворе, и как в смеси. Поэтому характеристики: линейный, раствор и смесь относятся не ко всей популяции, а отдельно к каждому переходу. Рассмотрим интенсивности переходов для различных типов взаимодействий.

Пусть тройка (i, j, k) обозначает переход автомата из состояния j в состояние k под воздействием автомата, находящегося в состоянии i, а $p(i, j, k)$ — вероятность такого перехода. При этом число автоматов в состоянии i не изменяется, если $i \neq k$. Будем полагать, что каждый автомат занимает ровно одно место в пространстве, где «живёт» популяция. Общее число таких мест равно N. При этом часть мест может быть пустой, т.е. популяция как бы «растворена» во множестве мощности N. Пусть теперь:

N_i — число автоматов в состоянии i;

N_{ijk} — общая интенсивность перехода (i, j, k), т.е. число автоматов, совершающих этот переход в каждом такте моделирования;

V_{ij} — область взаимодействия для перехода (i, j, k) — число мест в окрестности состояния i (или j), в которые должны попасть оба автомата i и j, чтобы взаимодействие состоялось. Ясно, что области взаимодействия состояний i и j одинаковы, т.е. $V_{ij} = V_{ji}$; Следует так же иметь в виду, что области V_{ij} должны быть порядка одного места: $V_{ij} \approx 1$, чтобы можно было пренебречь их пересечениями.

$K(i, j, k) = p(i, j, k)V_{ij}$ — интенсивность перехода (i, j, k) для одной пары автоматов, попавших в область взаимодействия размера V_{ij} в состояниях i и j.

Наша задача состоит в вычислении общей интенсивности перехода N_{ijk} для различных типов взаимодействия.

Для линейных взаимодействий очевидно:

$$N_{ijk} = K(i, j, k) \cdot min\{N_i,\ N_j\}, \tag{3.1}$$

В растворе плотность автоматов в состоянии j равна $p_j = \frac{N_j}{N}$, общий объём области взаимодействия равен $V_{ij} \cdot min\{N_i, N_j\}$. Пусть $N_i = min\{N_i, N_j\}$. Тогда число взаимодействующих автоматов равно

$$N_{ijk} = V_{ij} \cdot min\{N_i,\ N_j\} \times p_j = \frac{V_{ij}N_iN_j}{N}$$

.

Отсюда следует, что для взаимодействия в растворе при $i \neq j$:

$$N_{ijk} = p(i,j,k)\frac{V_{ij}N_iN_j}{N} = K(i,j,k)\frac{N_iN_j}{N}, \tag{3.2}$$

Для взаимодействия в растворе при $i = j$:

$$N_{ijk} = p(i,j,k)\frac{V_{ij}N_iN_j}{2N} = K(i,j,k)\frac{N_iN_j}{2N}, \tag{3.3}$$

Аналогичные рассуждения для взаимодействия в смеси приводят к выводу, что значение N, следует заменить на сумму $(N_i + N_j)$ поскольку в этом случае оба взаимодействующих множества автоматов «смешаны друг с другом», а прочие автоматы роли не играют. Так для заражения гриппом больные и здоровые люди должны встречаться в каком-нибудь тесном месте, например в офисе, чтобы обменяться вирусом, а прочие обстоятельства — размер города или всей страны — роли не играют. Итак, для взаимодействия в смеси получим:

$$N_{ijk} = p(i,j,k)\frac{V_{ij}N_iN_j}{(Ni+Nj)} = K(i,j,k)\frac{N_iN_j}{(N_i+N_j)}, \tag{3.4}$$

Соотношения $\frac{N_iN_j}{N}$, $\frac{N_iN_j}{2N}$ и $\frac{N_iN_j}{N_i+N_j}$ задают вероятность встречи автоматов в i-том и j-том состояниях в области действия всех i-тых автоматов.

Обратим внимание, что если никаких других состояний, кроме i и j, в системе нет, то $N_i + N_j = N$, и интенсивности переходов в растворе и смеси совпадают. Кроме того, при условии $i = j$ с теми же состояниями могут взаимодействовать только половина автоматов раствора, а область взаимодействия сократится вдвое, что и отражено в формулах. В смеси это обстоятельство учитывается автоматически, поскольку $N_i + N_j = 2N_j = 2N$.

При линейном взаимодействии условие $i = j$ означает, что автомат, находящийся в состоянии i, самостоятельно переходит в состояние k независимо ни от каких других автоматов. Если все переходы в популяции линейные и для всех переходов $i = j$, то имеет место простейшая, т.е. линейная автоматная популяция.

При нелинейном переходе условие $i = j$ означает, что для взаимодействия необходима встреча двух автоматов в i-том состоянии, один из которых перейдет в k-тое состояние с интенсивностью $K(i,i,k)$.

Если при переходах автоматов из одних состояний в другие общее число автоматов N неизменно, то популяция является замкнутой. В замкнутой популяции можно получить статистические вероятности состояний автоматов $P_i = \frac{N_i}{N}$.

Интерес представляют открытые популяции, где возможно удаление автоматов и появление новых. Для записи этих действий используется *внешнее* или 0-*состояние* q_0, обозначаемое символом «*» или «-». Будем считать, что автоматов находящихся в 0-состоянии всегда достаточно для реализации переходов, а численность 0-состояний не меняется.

Появление новых автоматов происходит под воздействием уже существующих. Автоматы, находящиеся в состоянии i, добавляют в состояние j новые автоматы с интенсивностью $K(i,^*,j)$. Количество появившихся автоматов равно $K(i,^*,j)N_i$ при всех типах взаимодействий. Отметим, что при порождении новых автоматов интенсивность — это любое число, соответствующее числу «потомков».

4. Метод компьютерного моделирования популяций

Предметом настоящего раздела является метод моделирования простой популяции автоматов, функционирующей в дискретном времени $T = 1, 2, 3, \ldots, t, \ldots$ с помощью компьютерной программы «Популяция». Вообще говоря, такие системы можно моделировать линейными или нелинейными системами дифференциальных уравнений. Для решения этих уравнений можно использовать известные численные методы, писать программы или использовать готовые системы прикладных программ. Проблема состоит в высокой трудоёмкости этого пути. Между тем построение требуемых уравнений и их численное решение настолько стандартная процедура, что можно ограничиться только заданием К-сети. Кроме того, в дидактических целях программа должна быть простой, легко управляемой и давать наглядные результаты в виде графиков и массивов результатов моделирования.

4.1. Моделирование простых и автоматных популяций

Пусть N — количество автоматов, n — число состояний, в которых может находиться каждый из автоматов. При этом каждый конкретный автомат не обязательно имеет все n состояний. Популяция может состоять из автоматов различных классов, отличающихся набором состояний и поведением. В каждом i-том состоянии пребывает N_i автоматов, так что $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_n$ (n — натуральное, N_i — неотрицательное действительное при $i = 1, \ldots, n$). Использование действительных чисел вместо целых позволяет не задавать очень большие числа N_i и избежать погрешности при округлении. В конечном итоге нас все равно интересует только динамика или поведение популяции. При этом можно использовать статистические вероятности и другие статистические характеристики.

В каждом такте, то есть через заданный промежуток времени, количество автоматов в j-том состоянии изменяется или остается тем же. Это происходит следующим образом. Некоторое состояние i влияет на состояние j и переводит его в состояние k с интенсивностью $K(i,j,k)$. Изменение количества N_{it} автоматов в такте t имеет вид:

$$N_i(t+1) = N_{it} + \Delta N_{it},$$

где $\Delta N_i = V_i - I_i + R_i$, а $V_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} N_{jki}$ — число автоматов перешедших в i-тое состояние; $I_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n} min(N_i, N_{jik})$ — число автоматов, покинувших i-тое состояние; $R_i = \sum_{j=1}^{n} N_j \cdot K(j,^*, i)$ — число автоматов, «родившихся» в i том состоянии. Здесь N_{ijk} вычисляются по формулам 3.1— 3.4 для соответствующего типа взаимодействия. Чтобы получить среднее количество автоматов в каждом состоянии на $(t+1)$-ом шагу, необходимо воспользоваться этими формулами t раз.

Заключение

Итак, получен метод составления и численного решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений динамики средних (К-модели) с запаздыванием времени на базе маркированного графа параллельных процессов в популяции взаимодействующих автоматов (К-сети).

Несмотря на некоторую ограниченность данного подхода класс моделируемых популяций включает множество интересных систем, допускающих множество интерпретаций в различных предметных областях: вычислительная техника, биология, социология, история, экономика и т.д. — везде, где поведение системы можно представить как параллельное функционирование множества автоматов, взаимодействующих между собой.

Имея программу «Популяция» достаточно описать поведение отдельных элементов исследуемой системы в их связи с другими элементами и получается модель, которая легко модифицируется и быстро даёт наглядные результаты. При этом будет представлено и поведение популяции в переходном режиме. А это уже не мало в тех предметных областях, где господствуют качественные рассуждения. Это касается гуманитарных наук, и, особенно, истории. Проблема математизации исторических исследований давно стоит на повестке дня [4-7].

Список литературы

1. Ачасова С. М., Бандман О. Л., *Корректность параллельных вычислительных процессов*, Наука, Сибирское отделение, Новосибирск, М., 1990, 336 с.

2. Воробьёв В. А., Березовская Ю. В., *Теория систем и системный анализ. Стохастические системы.*, учебное пособие, ИПЦ САФУ, Архангельск, 2012, 147 с.

3. Воробьёв В. А., Кочнев А. Ю., “Популяционное моделирование коллективного поведения автоматов”, *Вестник Томского государственного университета. Приложение*, 2007, № 18, Материалы международных, всероссийских и региональных научных конференций, симпозиумов и школ, проводимых в ТГУ, 33–37.

4. Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., *Синергетика и прогнозы будущего*, 2-е изд., Эдиториал УРСС, М., 2001, 288 с.

5. Воробьёв В. А., Воробьёва Т. В., “Экологическая пауза — системный кризис человечества”, *Труды АНИГ «Прогноз»*, **Выпуск 1**, Исследования в области глобального катастрофизма, Новосибирск, 2006, 69–109.

6. Коротаев А. В., Комарова Н. Л., Халтурина Д. А., *Законы истории: Вековые циклы и тысячелетние тренды. Демография, экономика, войны*, изд. 2-е, испр. и доп., ред. Н. Н. Крадин, КомКнига, М., 2007, 256 с.

7. Коротаев А. В., Малков А. С., Халтурина Д. А., *Законы истории: Математическое моделирование развития Мир-Системы. Демография, экономика, культура*, изд. 2-е, испр. и доп., ред. Н. Н. Крадин, КомКнига, М., 2007.

The population of automata is a model of the complex systems

© V. A. Vorob'ev[4], Yu. V. Berezovska [5], A. Yu. Kochnev [6]

Abstract. The population of automata is a model of collective behavior of automata. Modeling of population dynamics is implemented by Causal Petri Net. Net places represent the states of automata. A net marking specifies a number of automata that are in corresponding states. Transitions represent events that result from the joint actions of the elements of a population. For each transition of net some value is specified, it defines probability (rate) of the transition response so a system of differential equations can be built. These equations describe the dynamics of the average number of automata in places while the logical conditions specified by Petri net are implemented. The numerical solution of the system is obtained using computer simulation.

Key Words: population of automata, causal net, Petri net, mean value dynamics, modeling.

[4] Professor, Department of Programming and High-Performance Computing, Northern (Arctic) Federal University, Arkhangelsk; vva100@atnet.ru

[5] Senior lecturer, Department of Programming and High-Performance Computing,Northern (Arctic) Federal University, Arkhangelsk; myumla.myu@gmail.com

[6] Chief of IT-education department, Northern (Arctic) Federal University, Arkhangelsk;derxyz@yandex.ru