УДК 534.113

Метод двойственного восстановления по минорам старших порядков матрицы краевых условий в обратной спектральной задаче для трубы с непротекающей жидкостью

© **Г. Ф. Сафина**[1]

Аннотация. В работе приведен метод решения задачи диагностирования любых закреплений узкой трубы с непротекающей жидкостью. Метод сведен к восстановлению по минорам высщих порядков двух матриц краевых условий обратной спектральной задачи. Решение задачи рассмотрено при известных точных и приближенных значений частот изгибных колебаний трубы, наполненной жидкостью. По найденному методу решения обратной спектральной задачи доказана непрерывная зависимость решения от частот колебаний трубы с непротекающей жидкостью. Приведены примеры.

Ключевые слова: труба с непротекающей жидкостью, частоты колебаний, матрица краевых условий, миноры матрицы, диагностирование закреплений, метод восстановления матриц

1. Введение

Исследования прямой и обратной задач изгибных колебаний трубы с жидкостью относятся к спектральным задачам, а именно к задачам идентефикации параметров механических систем по известным частотам их свободных колебаний. Подобным задачам диагностирования механических систем по их звучанию в настоящее время посвящено много работ, в том числе работы [1] – [7].

Прямая задача определения собственных частот изгибных колебаний трубы с жидкостью рассмотрена приближенными методами в работах [8], [9] при таких закреплениях трубы, как заделка и свободное опирание. Обратная задача — задача диагностирования любых видов закреплений трубы по известным частотам ее колебаний исследована в работе [10].

В продолжение исследований в настоящей работе приведен метод диагностирования закреплений трубы с непротекающей жидкостью по известным значениям частот ее колебаний, который сводится к восстановлению двух матриц из коэффициентов краевых условий по минорам высших порядков. Показана справедливость метода в случаях известных точных и приближенных значений частот колебаний трубы. Метод восстановления двух матриц краевых условий использован также для доказательства непрерывности решения обратной задачи диагностирования закреплений трубы с непротекающей жидкостью.

2. Прямая и обратная спектральные задачи для изгибных колебаний трубы с непротекающей жидкостью

Приведем некоторые известные сведения, необходимые для дальнейшего изложения. Задача изгибных колебаний узкой трубы с несжимаемой жидкостью сводится к решению

[1] Доцент кафедры математического моделирования и информационной безопасности Нефтекамского филиала Башкирского государственного университета, г. Нефтекамск; safinagf@mail.ru

уравнения [8], [9]

$$X^{(4)} + a\,X'' + 2b\,i\,\omega X' - \omega^2\,X = 0 \tag{2.1}$$

с краевыми условиями [10]

$$\begin{array}{ll} U_1(X) = a_1 X(0) + a_4 X'''(0) = 0, & U_2(X) = a_2 X'(0) + a_3 X''(0) = 0, \\ U_3(X) = b_1 X(1) + b_4 X'''(1) = 0, & U_4(X) = b_2 X'(1) + b_3 X''(1) = 0. \end{array} \tag{2.2}$$

В уравнении (2.1): ω – частота колебаний, коэффициенты a и b выражаются через физические параметры системы (труба – жидкость).

Общее решение уравнения (2.1) рассмотрено в виде

$$X = C_1\,e^{\lambda_1 \widetilde{x}} + C_2\,e^{\lambda_2 \widetilde{x}} + C_3\,e^{\lambda_3 \widetilde{x}} + C_4\,e^{\lambda_4 \widetilde{x}}.$$

Здесь $\lambda_j = \lambda_j(\omega)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ — корни характеристического уравнения, соответствующие уравнению (2.1).

В зависимости от коэффициентов a_k и b_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ краевые условия (2.2) определяют различные виды упругого закрепления концов участка трубы, а также заделку, свободное опирание, свободный конец, плавающую заделку.

Частотное уравнение для прямой спектральной задачи (2.1), (2.2) получено стандартно из условия равенства нулю характеристического определителя: $\Delta(\omega) = 0$.

Для математической постановки обратной задачи диагностирования закреплений трубы с жидкостью введена в рассмотрение матрица C порядка 4×8 [10]: $C = \left\| \begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & B \end{array} \right\|$, составленная из нулевых матриц 0, а также матриц

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & a_2 & a_3 & 0 \end{array} \right\|, \quad B = \left\| \begin{array}{cccc} b_1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \end{array} \right\|$$

из коэффициентов краевых условий (2.2). Рассмотрены $M_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}$ – миноры высших порядков матрицы C, образованные из столбцов с номерами k_1, k_2, k_3, k_4.

В данных обозначениях обратная спектральная задача состоит в восстановлении матрицы C с точностью до линейных преобразований ее строк. В работе [10] доказана двойственность решения обратной задачи для трубы с непротекающей жидкостью.

3. Метод восстановления матриц краевых условий обратной спектральной задачи по точным значениям частот колебаний

Рассмотрим теперь метод решения обратной спектральной задачи.

В случае непротекания жидкости по трубе собственные частоты изгибных колебаний трубы ω_k удовлетворяют частотному уравнению

$$\begin{gathered} \Delta(\omega_k) = x_1\,f_{1257}(\omega_k) + x_2\,f_{1268}(\omega_k) + x_3\,f_{1368}(\omega_k) + \\ + x_4\,f_{1278}(\omega_k) + x_5\,f_{1378}(\omega_k) + x_6\,f_{2478}(\omega_k) + x_7\,f_{1357}(\omega_k) + \\ + x_8\,f_{2468}(\omega_k) + x_9\,f_{1256}(\omega_k) + x_{10}\,f_{3478}(\omega_k) = 0, \end{gathered} \tag{3.1}$$

в котором

$$\begin{gathered} x_1 = M_{1257} - M_{1356}, \quad x_2 = M_{1268} - M_{2456}, \quad x_3 = M_{1368} + M_{2457}, \\ x_4 = M_{1278} + M_{3456}, \quad x_5 = M_{1378} - M_{3457}, \quad x_6 = M_{2478} - M_{3468}, \\ x_7 = M_{1357}, \quad x_8 = M_{2468}, \quad x_9 = M_{1256}, \quad x_{10} = M_{3478}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Показано, что если ω_k — 9 значений из всего спектра частот колебаний задачи (2.1), (2.2), то равенства (3.1) образуют систему 9-ти линейных алгебраических уравнений относительно 10-ти неизвестных x_j .

При этом, если $\operatorname{rank}\|\mathrm{f}_{\mathrm{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}}(\omega_\mathrm{k})\|_{10\times 9} = 9$, то система линейных алгебраических уравнений (3.1) имеет единственное с точностью до постоянного множителя решение $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$.

Покажем теперь, что по значениям $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ находятся (с точностью до линейных преобразований строк) две матрицы C.

Так как $\operatorname{rank} C = 4$, то хотя бы один из миноров M_{ijkl} не равен нулю. Пусть, например, $M_{1256} \neq 0$. Тогда матрицу C с помощью линейных преобразований ее строк можно привести к виду

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_3 & 0 \end{Vmatrix}$$

или

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Миноры полученных матриц обозначим соответственно через M_{ijkl} и M^-_{ijkl} $(i = 1, ..., 5;\ j = 2, ..., 6;\ k = 3, ..., 7;\ l = 4, ..., 8)$. Следовательно, матрица C может быть записана через миноры в виде

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-M_{2456}}{M_{1256}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{M_{1356}}{M_{1256}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-M_{1268}}{M_{1256}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{M_{1257}}{M_{1256}} & 0 \end{Vmatrix}$$

или

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-M^-_{2456}}{M^-_{1256}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{M^-_{1356}}{M^-_{1256}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-M^-_{1268}}{M^-_{1256}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{M^-_{1257}}{M^-_{1256}} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Для первой матрицы имеем

$$M_{1356} = a_3, \qquad M_{2456} = -a_4, \qquad M_{1256} = b_3, \qquad M_{1268} = -b_4,$$

для второй матрицы

$$M^-_{1356} = -b_3, \qquad M^-_{2456} = b_4, \qquad M^-_{1257} = -a_3, \qquad M^-_{2468} = a_4.$$

Миноры M_{1256}, M_{1356}, M_{1257}, M_{1268}, M_{2456} и M^-_{1256}, M^-_{1256}, M^-_{1356}, M^-_{1257}, M^-_{1268}, M^-_{2456}, участвующие соответственно в последних двух записях матрицы C, являются основными, а ненулевые миноры M_{1256} и M^-_{1256} — центральными. Таким образом, в случае непротекания жидкости по трубе верна теорема.

Теорема 1 *Если матрица системы уравнений (3.1) имеет ранг 9, то решение обратной задачи восстановления краевых условий (2.2) двойственно.*

4. Восстановление матриц краевых условий обратной спектральной задачи по приближенным значениям частот колебаний

Так как собственные частоты задачи (2.1), (2.2) часто задаются приближенно, то построим теперь приближенное решение обратной задачи.

Пусть ранг системы уравнений (3.1) равен 9 и собственные частоты ω_k известны лишь приближенно $\omega_k \approx \mu_k \quad (k = 1, 2, ..., 9)$. Подставив μ_k в систему уравнений (3.1), найдем неизвестные x_1, x_2, $\ldots$, x_{10}. Согласно теореме определим далее две группы миноров M_{ijkl} и M^{-}_{ijkl}.

Для того, чтобы значения M_{ijkl} и M^{-}_{ijkl}, найденные по искаженным μ_k, являлись минорами какой-либо матрицы, необходимо выполнение соотношений Плюккера [11], которые в данном случае (с учетом $M_{1256} \neq 0$ и нулевых миноров) имеют вид:

$$
\begin{gathered}
M_{1278}M_{1256} = M_{1257}M_{1268},\\
M_{3456}M_{1256} = M_{2456}M_{1356},\\
M_{1357}M_{1256} = M_{1356}M_{1257},\\
M_{2468}M_{1256} = M_{2456}M_{1268},\\
M_{2457}M_{1256} = M_{2456}M_{1257},\\
M_{1368}M_{1256} = M_{1356}M_{1257},\\
M_{2478}M_{1256} = M_{1278}M_{2456} = M_{2457}M_{1268},\\
M_{1378}M_{1256} = M_{1356}M_{1278} = M_{1357}M_{1268},\\
M_{3457}M_{1256} = M_{1356}M_{2457} = M_{1357}M_{2456},\\
M_{3468}M_{1256} = M_{1356}M_{2468} = M_{1368}M_{2456},\\
M_{3478}M_{1256} = M_{1278}M_{3456} = M_{2457}M_{1368} = M_{1357}M_{2468} =\\
= M_{1356}M_{2478} = M_{2456}M_{1378} = M_{1268}M_{3457} = M_{1257}M_{3468}.
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

Такие же соотношения справедливы для миноров M^{-}_{ijkl}. Значит, если числа M_{ijkl}, M^{-}_{ijkl} удовлетворяют соотношениям (4.1), то они являются минорами некоторой матрицы, и по ним можно восстановить краевые условия задачи (2.1), (2.2).

Если же числа M_{ijkl}, M^{-}_{ijkl} не удовлетворяют соотношениям (4.1), то миноры M_{1278}, M_{3456}, M_{1357}, M_{2468}, M_{2457}, M_{1368}, M_{2478}, M_{1378}, M_{3457}, M_{3468}, M_{3478} и M^{-}_{1278}, M^{-}_{3456}, M^{-}_{1357}, M^{-}_{2468}, M^{-}_{2457}, M_{1368}, M_{2478}, M_{1378}, M_{3457}, M^{-}_{3468}, M^{-}_{3478} можно выразить соответственно через основные миноры M_{1256}, M_{1356}, M_{1257}, M_{1268}, M_{2456} и M^{-}_{1256}, M^{-}_{1356}, M^{-}_{1257}, M^{-}_{1268}, M^{-}_{2456}. Условия Плюккера будут выполняться автоматически. Таким образом, в случае непротекания жидкости по трубе можно скорректировать значения M_{ijkl}, M^{-}_{ijkl}, найденные из системы уравнений (3.1), так, чтобы они являлись минорами одних и тех же матриц.

5. Непрерывность решения обратной задачи по частотам колебаний

С помощью найденного метода восстановления двух матриц краевых условий по их минорам высших порядков исследуем вопрос о непрерывности решения обратной задачи для трубы с непротекающей жидкостью.

Вместе с краевыми условиями (2.2) рассмотрим также условия:

$$
\begin{aligned}
U_1(X) &= \widetilde{a}_1X(0) + \widetilde{a}_4X'''(0) = 0, \quad U_2(X) = \widetilde{a}_2X'(0) + \widetilde{a}_3X''(0) = 0,\\
U_3(X) &= \widetilde{b}_1X(1) + \widetilde{b}_4X'''(1) = 0, \quad U_4(X) = \widetilde{b}_2X'(1) + \widetilde{b}_3X''(1) = 0.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Матрицу, составленную аналогично матрице C, но из коэффициентов краевых условий (5.1), обозначим через $\widetilde{C}$. Элементы матрицы $\widetilde{C}$ обозначим через $\widetilde{c}_{ij}$, а миноры высших порядков этой матрицы — через $\widetilde{M}_{ijkl}$. Вместе с матрицами C и $\widetilde{C}$ рассмотрим также матрицу $\widetilde{C}^-$, составленную из векторов $\mathbf{c}_i^- = (\widetilde{c}_{i5}, \widetilde{c}_{i6}, -\widetilde{c}_{i7}, -\widetilde{c}_{i8}, \widetilde{c}_{i1}, \widetilde{c}_{i2}, -\widetilde{c}_{i3}, -\widetilde{c}_{i4})^{\mathrm{T}}$, $(i = 1,\, 2,\, 3,\, 4)$. Пусть элементы матрицы $\widetilde{C}^-$ – $\widetilde{c}_{ij}^-$, а миноры высших порядков — $\widetilde{M}_{ijkl}^-$.

Рассмотрим также классы матриц C, $\widetilde{C}$, $\widetilde{C}^-$, которые обозначим через $[C]$, $[\widetilde{C}]$, $[\widetilde{C}^-]$ соответственно. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (о непрерывности решения обратной задачи) *Пусть* $\{\omega_k\}$, $\{\widetilde{\omega}_k\}$ $(k = 1, ..., 9)$ — *собственные частоты задач (2.1), (2.2) и (2.1), (5.1) соответственно;* $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} \widetilde{C} = \operatorname{rank} \widetilde{C}^- = 4$*;* $C \in [C]$*,* $\widetilde{C} \in [\widetilde{C}]$*,* $\widetilde{C}^- \in [\widetilde{C}^-]$*. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, что для собственных частот, удовлетворяющих неравенству $\sum_{k=1}^{9} |\omega_k - \widetilde{\omega}_k| < \delta$, выполняются $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{8} |c_{ij} - \widetilde{c}_{ij}| < \varepsilon$, $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{8} |c_{ij} - \widetilde{c}_{ij}^-| < \varepsilon$.

Доказательство. По найденному методу решения обратной задачи система уравнений (3.1) имеет единственное с точностью до постоянного множителя решение $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$, по которому находятся (с точностью до линейных преобразований строк) две матрицы C, а именно $C = \widetilde{C}$ или $C = \widetilde{C}^-$. Как показано выше, по значениям $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ определяются две группы миноров M_{ijkl}, M_{ijkl}^- и по ним восстанавливаются две матрицы C.

Найденные миноры можно представить в виде

$$M_{ijkl} = F_n(\omega_1, ..., \omega_9), \qquad n = 1, ..., 10,$$

$$M_{ijkl}^- = F_n^-(\omega_1, ..., \omega_9), \qquad n = 1, ..., 10,$$

где функции $F_n(\omega_1, ..., \omega_9)$, $F_n^-(\omega_1, ..., \omega_9)$ получены из функций f_{ijkl} с помощью конечного числа алгебраических операций. В силу непрерывности решений $X_j = X_j(x, \omega) = e^{\lambda_j x}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ по параметрам ω_k, функции $f_{ijkl}(\omega_k)$ как функции от суммы, разности и произведения непрерывных функций представляют собой непрерывные функции по собственным частотам колебаний ω_k. Значит, функции $F_n(\omega_1, ..., \omega_9)$, $F_n^-(\omega_1, ..., \omega_9)$ также являются непрерывными функциями по параметрам ω_k. Аналогично, система уравнений

$$\begin{gathered}
\Delta(\widetilde{\omega}_k) = \widetilde{x}_1\, f_{1257}(\widetilde{\omega}_k) + \widetilde{x}_2\, f_{1268}(\widetilde{\omega}_k) + \\
+\widetilde{x}_3\, f_{1368}(\widetilde{\omega}_k) + \widetilde{x}_4\, f_{1278}(\widetilde{\omega}_k) + \\
+\widetilde{x}_5\, f_{1378}(\widetilde{\omega}_k) + \widetilde{x}_6\, f_{2478}(\widetilde{\omega}_k) + \\
+\widetilde{x}_7\, f_{1357}(\widetilde{\omega}_k) + \widetilde{x}_8\, f_{2468}(\widetilde{\omega}_k) + \widetilde{x}_9\, f_{1256}(\widetilde{\omega}_k) + \widetilde{x}_{10}\, f_{3478}(\widetilde{\omega}_k) = 0,
\end{gathered}$$

в которой

$$\begin{gathered}
\widetilde{x}_1 = \widetilde{M}_{1257} - \widetilde{M}_{1356}, \quad \widetilde{x}_2 = \widetilde{M}_{1268} - \widetilde{M}_{2456}, \\
\widetilde{x}_3 = \widetilde{M}_{1368} + \widetilde{M}_{2457}, \quad \widetilde{x}_4 = \widetilde{M}_{1278} + \widetilde{M}_{3456}, \\
\widetilde{x}_5 = \widetilde{M}_{1378} - \widetilde{M}_{3457}, \quad \widetilde{x}_6 = \widetilde{M}_{2478} - \widetilde{M}_{3468}, \\
\widetilde{x}_7 = \widetilde{M}_{1357}, \quad \widetilde{x}_8 = \widetilde{M}_{2468}, \quad \widetilde{x}_9 = \widetilde{M}_{1256}, \quad \widetilde{x}_{10} = \widetilde{M}_{3478},
\end{gathered}$$

имеет решение

$$\widetilde{M}_{ijkl} = F_n(\widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_{14}), \qquad n = 1, ..., 10,$$

или

$$\widetilde{M}_{ijkl}^- = F_n^-(\widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_{14}), \qquad n = 1, ..., 10.$$

Аналогичные рассуждения приводят к тому, что функции $F_n(\widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_9)$ и $F_n^-(\widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_9)$ также являются непрерывными функциями по параметрам $\widetilde{\omega}_k$.

Тогда

$$|M_{ijkl}(\omega_1, ..., \omega_9) - \widetilde{M}_{ijkl}(\widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_9)| = |F_n(\omega_1, ..., \omega_9) - F_n(\widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_9)| < \varepsilon_1$$

и

$$|M^-_{ijkl}(\omega_1, ..., \omega_9) - \widetilde{M}^-_{ijkl}(\widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_9)| = |F_n(\omega_1, ..., \omega_9) - F^-_n(\widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_9)| < \varepsilon_1,$$

как только $\sum_{k=1}^{9} |\omega_k - \widetilde{\omega}_k| < \delta$.

Если же миноры M_{ijkl}, $\widetilde{M}_{ijkl}$, M^-_{ijkl}, $\widetilde{M}^-_{ijkl}$ не удовлетворяют соотношениям (4.1), то после корректировки миноров, например, для миноров M_{1278}, $\widetilde{M}_{1278}$, M^-_{1278}, $\widetilde{M}^-_{1278}$, имеем

$$|M_{1278} - \widetilde{M}_{1278}| = |M_{1257}\, M_{1268}/M_{1256} - \widetilde{M}_{1257}\, \widetilde{M}_{1268}/\widetilde{M}_{1256}|,$$

$$|M^-_{1278} - \widetilde{M}^-_{1278}| = |M^-_{1257}\, M^-_{1268}/M^-_{1256} - \widetilde{M}^-_{1257}\, \widetilde{M}^-_{1268}/\widetilde{M}^-_{1256}|.$$

Так как $M_{1256} \neq 0$, $M^-_{1256} \neq 0$, то функции $G_n(\omega_1, ..., \omega_9) = M_{1257}\, M_{1268}/M_{1256}$ и $G_n(\widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_9) = \widetilde{M}_{1257}\, \widetilde{M}_{1268}/\widetilde{M}_{1256}$, $G^-_n(\omega_1, ..., \omega_9) = M^-_{1257}\, M^-_{1268}/M^-_{1256}$ и $G^-_n(\widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_9) = \widetilde{M}^-_{1257}\, \widetilde{M}^-_{1268}/\widetilde{M}^-_{1256}$ являются непрерывными по параметрам ω_k и $\widetilde{\omega}_k$ соответственно, как произведение и частное непрерывных функций M_{ijkl}, $\widetilde{M}_{ijkl}$, M^-_{ijkl}, $\widetilde{M}^-_{ijkl}$. Следовательно,

$$|M_{1256} - \widetilde{M}_{1256}| = |G_n(\omega_1, ..., \omega_9) - G_n(\widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_9)| < \varepsilon_2,$$

$$|M^-_{1256} - \widetilde{M}^-_{1256}| = |G^-_n(\omega_1, ..., \omega_9) - G^-_n(\widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_9)| < \varepsilon_2,$$

как только $\sum_{k=1}^{9} |\omega_k - \widetilde{\omega}_k| < \delta$.

Поступая аналогичным образом и для остальных миноров матриц C и $\widetilde{C}$, получаем

$$|M_{ijkl} - \widetilde{M}_{ijkl}| < \varepsilon_2,$$

$$|M^-_{ijkl} - \widetilde{M}^-_{ijkl}| < \varepsilon_2,$$

как только $\sum_{k=1}^{9} |\omega_k - \widetilde{\omega}_k| < \delta$. Так как коэффициенты краевых условий задач (2.1), (2.2) и (2.1), (5.1) могут быть выписаны по минорам M_{ijkl}, $\widetilde{M}_{ijkl}$, $\widetilde{M}^-_{ijkl}$ матриц C, $\widetilde{C}$, $\widetilde{C}^-$ соответственно, то для коэффициентов матриц C и $\widetilde{C}$ верно $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{8} |c_{ij} - \widetilde{c}_{ij}| < \varepsilon$, $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{8} |c_{ij} - \widetilde{c}^-_{ij}| < \varepsilon$.

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что обратная задача по определению закреплений трубы с жидкостью корректно поставлена. И в случае непротекания жидкости по трубе задача определения параметров закреплений трубы имеет двойственное решение, которое непрерывно зависит от частот ω_k, $(k = 1, ..., 9)$.

6. Применение метода восстановления матриц краевых условий обратной спектральной задачи

Применение найденного метода покажем на примерах.

Пример 1. Упругое закрепление

Рассмотрим задачу (2.1), (2.2) при физических параметрах

$$r_1 = 0,0095\,\text{м}, \quad r = 0,01\text{м}, \quad l = 5\,\text{м}, \quad \rho = 2,7 \cdot 10^3\,\text{кг/м}^3,$$
$$\rho_0 = 10^3\,\text{кг/м}^3, \quad V_0 = 0\,\text{м/с}, \quad E = 6,9 \cdot 10^9\,\text{Н/м}^2, \quad p_0 = 3 \cdot 10^3\,\text{Н/м}^2$$

системы (труба – жидкость). Пусть известны значения 9 собственных частот ω_k задачи (2.1), (2.2):

$\omega_1 = 21.67$, $\omega_2 = 60.87$, $\omega_3 = 120.06$, $\omega_4 = 198.98$, $\omega_5 = 297.66$, $\omega_6 = 416.08$, $\omega_7 = 712.15$, $\omega_8 = 889.79$, $\omega_9 = 1087.18$.

С помощью программы на ЭВМ получаем, что ранг системы (3.1) равен 9, а ее решение имеет вид:

$$x_5 = -3\,K, \quad x_7 = K, \quad x_{10} = -2\,K; \quad \text{остальные } x_i = 0.$$

Из равенства $x_7 = M_{1357} \neq 0$ имеем $a_1 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $b_3 \neq 0$. Откуда получаем, что матрица C (с точностью до линейного преобразования ее строк) имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (K = 1).$$

Тогда получаем $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $a_4 - b_4 = -3$, $a_4\,b_4 = -2$. Откуда имеем $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $a_4 = -1$, $b_4 = 2$ или $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $a_4 = -2$, $b_4 = 1$.

Значит, матрица C (с точностью до линейной эквивалентности) имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, краевые условия таковы:

$$X(0) - X'''(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(1) + 2\,X'''(1) = 0, \quad X''(1) = 0$$

или

$$X(0) - 2\,X'''(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(1) + X'''(1) = 0, \quad X''(1) = 0.$$

Таким образом, по заданным частотам колебаний трубы с непротекающей жидкостью, получили, что левый конец закреплен пружиной с относительной жесткостью на изгиб, равной единице, а правый — с относительной жесткостью на изгиб, равной двум. В то же время имеется еще одно закрепление с подобным спектром частот колебаний трубы, а именно закрепление, при котором левый конец закреплен пружиной с относительной жесткостью на изгиб, равной двум, а правый — с относительной жесткостью на изгиб, равной единице.

Пример 2. Свободная опора — заделка

Рассмотрим снова краевую задачу (2.1), (2.2) при параметрах системы (труба – жидкость). Известны 9 собственных частот ω_k задачи: $\omega_1 = 14.65$, $\omega_2 = 49.10$, $\omega_3 = 103.34$, $\omega_4 = 177.34$, $\omega_5 = 271.09$, $\omega_6 = 384.58$, $\omega_7 = 670.79$, $\omega_8 = 843.504$, $\omega_9 = 1035.96$.

Найдем краевые условия, которые им соответствуют. С помощью ЭВМ получаем решение системы (3.1): $x_1 = K$; $x_i = 0$, $i = 2, 3, \ldots, 10$.

Из равенства $x_1 = M_{1257} - M_{1356} = K$ следует, что $M_{1257} \neq 0$ или $M_{1356} \neq 0$ (иначе ранги матриц A и B были бы равны нулю, что невозможно). Найдем теперь искомые матрицы C, соответствующие этим случаям.

1. Пусть $M_{1257} \neq 0$. Тогда $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $b_3 \neq 0$. Откуда получаем, что матрица C (с точностью до линейной эквивалентности) имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Из равенств $M_{1357}=0$, $M_{1256}=0$ получаем $a_3=0$, $b_2=0$, а из равенств $x_3=M_{1368}+M_{2457}=0$, $x_4=M_{1278}+M_{3456}=0$ имеем $a_4=0$, $b_4=0$.

Следовательно, матрица C имеет вид:

$$C=\left\Vert\begin{matrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{matrix}\right\Vert.$$

2. Пусть $M_{1356}\neq 0$. Тогда тем же способом, что и в случае $M_{1257}\neq 0$, получаем, что матрица C имеет вид:

$$C=\left\Vert\begin{matrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \end{matrix}\right\Vert.$$

Значит, в полном соответствии с найденным методом восстановления двух матриц получаем два решения (заделка)–(свободное опирание) и (свободное опирание)–(заделка):

$$X(0)=0,\quad X'(0)=0,\quad X(1)=0,\quad X''(1)=0;$$

$$X(0)=0,\quad X''(0)=0,\quad X(1)=0,\quad X'(1)=0.$$

Заметим, что краевые условия определены верно, так как именно этим закреплениям по решению прямой спектральной задачи соответствуют заданные значения частот колебаний.

Таким образом, при непротекании жидкости по трубе закрепления концов трубы восстанавливаются с точностью до перестановок закреплений местами.

7. Заключение

В работе рассмотрена обратная спектральная задача по изгибным колебаниям трубы с жидкостью. Приведен метод решения задачи диагностирования закреплений трубы с непротекающей жидкостью по известным частотам ее изгибных колебаний.

В математической постановке метод решения сведен к восстановлению двойственным образом матрицы коэффициентов краевых условий по минорам старших порядков. Решение задачи рассмотрено по известным точным и приближенным значениям частот изгибных колебаний трубы с жидкостью. Приведены примеры применения метода восстановления двух матриц.

По найденному методу решения обратной спектральной задачи доказана непрерывная зависимость решения от частот колебаний трубы.

Список литературы

1. Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д., *Введение в акустическую динамику машин*, Наука, М., 1979.

2. Павлов Б. В., *Акустическая диагностика механизмов*, Машиностроение, М., 1971.

3. Романов В. Г., *Обратные задачи математической физики*, Наука, М., 1984.

4. *Вибрации в технике: справочник в 6-ти т*, **1 Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина**, Машиностроение, М., 1978.

5. Ахатов И. Ш., Ахтямов А. М., “Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний”, *Прикладная математика и механика*, **65**:2 (2001), 290–298.

6. Сафина Г. Ф., “Диагностирование относительной жесткости подкрепленных цилиндрических оболочек по собственным частотам их асимметричных колебаний”, *Контроль. Диагностика*, 2005 №12, 55–59.

7. G. F. Safina, “Investigations of the Torsional Vibrations of a Shaft with Disks”, *Russian Journal of Nondestructive Testing*, **47 №3** (2011), 189-201.

8. Ильгамов М. А., *Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ*, Наука, М., 1969.

9. Томпсон Дж. М. Т., *Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ.*, Мир, М., 1985.

10. Ахтямов А. М., Сафина Г. Ф., “Определение виброзащитного закрепления трубопровода”, *Прикладная механика и техническая физика*, **49 №1** (2008), 139–147.

11. Постников М. М., *Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия*, Наука, М., 1979.

Method of dual restoration on minors the senior orders of a matrix of regional conditions in the return spectral task for a pipe from not proceeding liquid

© G F. Safina[2]

Abstract. The decision method is given in work problems of diagnosing of any fixing of a narrow pipe with not proceeding liquid. The method is reduced to restoration on minors the highest orders of two matrixes of regional conditions of the return spectral tasks. The solution of a task is considered at known exact and approximate values of frequencies of flexural fluctuations of the pipe filled liquid. On the found method of the solution of the return spectral task continuous dependence of the decision on frequencies of fluctuations of a pipe is proved with not proceeding liquid. Examples are given

Key Words: pipe from not proceeding liquid, frequencies of fluctuations, matrix of regional conditions, minors matrixes, diagnosing of fixing, method of restoration of matrixes.

[2] Associate professor of mathematical modeling and information security of Neftekamsk branch The Bashkir state university; Neftekamsk Safinagf@mail.ru