УДК УДК

Доказательство теоремы о локальной разрешимости квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка общего вида с начальными данными в декартовых координатах на линии бесконечной длины

© **С. Н. Алексеенко**[1], **Л. Е. Платонова**[2]

Аннотация. Для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка с начальными условиями, заданными в декартовых координатах, доказана теорема локальной разрешимости задачи Коши. Теорема не включает в себя условных предположений о характере поведения характеристик.

Ключевые слова: квазилинейное дифференциальное уравнение первого порядка, задача Коши, метод дополнительного аргумента.

Основным объектом исследования в данной работе является квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка

$$a_1(x_1, x_2, z)\partial_1 z + a_2(x_1, x_2, z)\partial_2 z = f(x_1, x_2, z), \tag{1.1}$$

где $\partial_i z = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$, a_1, a_2, f – непрерывно дифференцируемые функции. Решение ищется в некоторой окрестности линии L, которая задается уравнением $x_2 = \varphi(x_1)$, $-\infty < x_1 < +\infty$. Соответственно, задача Коши ставится следующим образом:

$$z|_L = \gamma(x_1), \quad x_1 \in (-\infty; +\infty). \tag{1.2}$$

Функции $\varphi(x_1)$, $\gamma(x_1) \in \overline{C}^2(-\infty; +\infty)$, где $\overline{C}^2(-\infty; +\infty)$ – множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, ограниченных вместе со своими 1-ой и 2-ой производными на $(-\infty; +\infty)$. Пусть $N_\gamma = \max\limits_{(-\infty;+\infty)} |\gamma(x_1)|$.

В рамках данной работы рассмотрен случай, когда линия L и область определения неизвестной функции $z(x_1, x_2)$ содержится во множестве

$$\Omega_\beta = \left\{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, \min_{(-\infty;+\infty)}(\varphi(x_1) - \beta_0) \leqslant x_2 \leqslant \max_{(-\infty;+\infty)}(\varphi(x_1) + \beta_0)\right\}, \beta_0 \in \mathbb{R}.$$

Принципиальная особенность изучаемой задачи состоит в том, что наряду с поиском неизвестной функции $z(x_1, x_2)$ ищется и область определения решения. Соответственно, постоянная β_0 должна быть достаточно велика, чтобы искомая область определения $z(x_1, x_2)$ входила в Ω_β. Обозначим эту заранее неизвестную область определения решения задачи (1.1), (1.2) через Ω_ε. Так как в данной статье речь идет о локальной разрешимости, то область Ω_ε представляет собой некоторую окрестность кривой L. Примем для определенности, что все заданные функции a_1, a_2, f определены в области $Q_\rho = \Omega_\beta \times [-\rho N_\gamma, \rho N_\gamma]$, где коэффициент ρ выбирается исходя из вида функций a_1, a_2, f. Сформулируем условия на L, при выполнении которых справедливы нижеприведенные выкладки и утверждения.

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет имени Р. Е. Алексеева, г. Н.Новгород; sn-alekseenko@yandex.ru

[2] Старший преподаватель кафедры математического анализа, теории и методики обучения математике, Нижегородский государственный педагогический университет имени К.Минина, г. Н.Новгород; fluff13@yandex.ru

Область определения решения Ω_ε будем искать в виде полосы шириной ε в направлении Ox_2, прилегающей к L с одной стороны, точнее

$$\Omega_\varepsilon = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty,\ \varphi(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \varphi(x_1) + \varepsilon\}, \Omega_\varepsilon \subset \Omega_\beta.$$

Параметр ε подлежит определению, ограничение на величину ε является одним из основных условий разрешимости задачи (1.1), (1.2). А возможность определения ε "конструктивно", исходя из данных задачи, представляет собой одно из основных преимуществ метода дополнительного аргумента.

В работе [5] для задачи Коши (1.1), (1.2) с помощью метода дополнительного аргумента [1], [3] была разработана схема, позволяющая свести вопрос о разрешимости задачи (1.1), (1.2) в исходных координатах к определению интервала разрешимости системы 15 интегральных уравнений вида

$$U(s, x_1, x_2) = \gamma(W_2(x_1, x_2)) + \int_0^s f(x_1 - \mu_1, H_2(\delta, x_1, x_2), U(\delta, x_1, x_2))\, d\delta, \tag{1.3}$$

$$U_1 = \gamma'(W_2(x_1, x_2))\, W_{21} + \int_0^s (f_1(1 - \mu_{11}) + f_2 H_{21} + f_U U_1)\, d\delta, \tag{1.4}$$

$$U_2 = \gamma'(W_2(x_1, x_2))\, W_{22} + \int_0^s (f_1(-\mu_{12}) + f_2 H_{22} + f_U U_2)\, d\delta, \tag{1.5}$$

$$\mu_1 = \int_s^{W_1(x_1,x_2)} a_1(x_1 - \mu_1, H_2, U(\delta, x_1, x_2))\, d\delta, \tag{1.6}$$

$$H_2 = x_2 - \int_s^{W_1(x_1,x_2)} a_2(x_1 - \mu_1, H_2, U(\delta, x_1, x_2))\, d\delta, \tag{1.7}$$

$$\mu_{11} = a_1 W_{11} + \int_s^{W_1(x_1,x_2)} (a_{11}(1 - \mu_{11}) + a_{12} H_{21} + a_{1U} U_1)\, d\delta, \tag{1.8}$$

$$\mu_{12} = a_1 W_{12} + \int_s^{W_1(x_1,x_2)} (a_{11}(-\mu_{12}) + a_{12} H_{22} + a_{1U} U_2)\, d\delta, \tag{1.9}$$

$$H_{21} = -a_2 W_{11} - \int_s^{W_1(x_1,x_2)} (a_{21}(1 - \mu_{11}) + a_{22} H_{21} + a_{2U} U_1)\, d\delta, \tag{1.10}$$

$$H_{22} = 1 - a_2 W_{12} - \int_s^{W_1(x_1,x_2)} (a_{21}(-\mu_{12}) + a_{22} H_{22} + a_{2U} U_2)\, d\delta, \tag{1.11}$$

$$W_1 = \int_{\varphi(x_1)}^{x_2} W_{12}\, dx_2, \tag{1.12}$$

$$\mu_2 = \int_0^{W_1(x_1,x_2)} a_1(x_1 - \mu_1, H_2, U(\delta, x_1, x_2))\, d\delta, \tag{1.13}$$

$$W_{11} = J^{-1}\Bigg(-\varphi' + \int\limits_0^{W_1(x_1,x_2)} \Big(\varphi'\left(a_{11}(1-\mu_{11}) + a_{12}H_{21} + a_{1U}U_1\right) - \\ - \left(a_{21}(1-\mu_{11}) + a_{22}H_{21} + a_{2U}U_1\right)\Big)d\delta\Bigg), \tag{1.14}$$

$$W_{12} = J^{-1}\Bigg(1 + \int\limits_0^{W_1(x_1,x_2)} \Big(\varphi'\left(a_{11}(-\mu_{12}) + a_{12}H_{22} + a_{1U}U_2\right) - \\ - \left(a_{21}(-\mu_{12}) + a_{22}H_{22} + a_{2U}U_2\right)\Big)d\delta\Bigg), \tag{1.15}$$

$$1-\mu_{21} = J^{-1}\Bigg(a_2 + \int\limits_0^{W_1(x_1,x_2)} \Big(a_1\left(a_{21}(1-\mu_{11}) + a_{22}H_{21} + a_{2U}U_1\right) - \\ -a_2\left(a_{11}(1-\mu_{11}) + a_{12}H_{21} + a_{1U}U_1\right)\Big)d\delta\Bigg), \tag{1.16}$$

$$-\mu_{22} = J^{-1}\Bigg(-a_1 + \int\limits_0^{W_1(x_1,x_2)} \Big(a_1\left(a_{21}(-\mu_{12}) + a_{22}H_{22} + a_{2U}U_2\right) - \\ -a_2\left(a_{11}(-\mu_{12}) + a_{12}H_{22} + a_{1U}U_2\right)\Big)d\delta\Bigg). \tag{1.17}$$

В системе (1.3) – (1.17), которая была названа в [5] резольвентной, U, U_1, U_2, μ_1, H_2, μ_{11}, μ_{12}, H_{21}, H_{22}, W_1, W_{11}, W_{12}, μ_2, μ_{21} μ_{22} новые неизвестные функции.

В работе [5] анонсирована теорема о существовании и единственности решения задачи Коши (1.1), (1.2), в которой сформулирован весь используемый набор условий.

Теорема 1.1. *Пусть* $a_1(x_1,x_2,z)$, $a_2(x_1,x_2,z)$, $f(x_1,x_2,z)$ *непрерывно дифференцируемые функции по всем аргументам в области* Q_ρ; L *— линия, несущая начальные данные:* $x_2 = \varphi(x_1)$; $\varphi(x_1), \gamma(x_1) \in \overline{C}^2(-\infty;+\infty)$; *выполнено основное условие разрешимости* $|J| \geq K_J$. *Тогда существует такое число* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, *задача Коши* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение* $z \in \overline{C}^1(\Omega_\varepsilon)$, *которое при* $s = \omega$ *совпадает с функцией* $u(s,x_1,x_2) = U(s,x_1,x_2)$, *определяемой из резольвентной системы* (1.3) *–* (1.17).

Замечание 1.1. $\varepsilon_0 = \min\left(\dfrac{9}{10\left(10\zeta_1\sigma_1 + \sigma_2\right)}; \dfrac{9N_\gamma}{10\zeta_1 K_f}; \dfrac{10\zeta_1}{\xi_1 + 10\zeta_1\xi_2}; \dfrac{10\zeta_1}{\xi_3 + 10\zeta_1\xi_2}\right)$,

$$\zeta_1 = K_0\left(K_{\varphi'} + 1\right) + K_0\left(K_{a_1} + K_{a_2}\right)\left(1 + K_{\varphi'} + K_{\gamma'}\right) + 2 + X_2 + N_\gamma,$$
$$\sigma_1 = K_0\left(M_{a_1}K_{\varphi'} + M_{a_2}\right)\left(K_{a_1} + K_{a_2} + 1\right) + K_{\gamma'}K_0\left(M_{a_2}K_{a_1} + M_{a_1}K_{a_2}\right) + M_{a_1} + M_{a_2} + M_f,$$
$$\sigma_2 = K_{a_1} + K_{a_2} + K_f,\ \xi_1 = cK_{\varphi'}\left(\left(K_{\gamma'} + 1\right)K_{a_1} + K_{a_2}\right) + 10\zeta_1\left(\left(K_{\gamma'} + 1\right)K_{a_{11}} + K_{f_1} + K_{a_{21}}\right),$$
$$\xi_2 = 10\zeta_1\left(\left(K_{\gamma'} + 1\right)M_{a_1} + M_{a_2} + M_f\right), \xi_3 = c\left(\left(K_{\gamma'} + 1\right)K_{a_1} + K_{a_2}\right),$$
$$J = a_2 - a_1\varphi',\ K_J = K_0^{-1}.$$

Содержащиеся в формулировке теоремы и в замечании к ней константы определены ниже как максимумы известных функций и их производных. Данная статья посвящена доказательству теоремы, анонсированной в [5].

В силу установленного в [5] факта, что функция, определяемая из резольвентной системы (1.3) – (1.17), при $s = W_1$ дает решение задачи (1.1), (1.2), для доказательства теоремы надо установить существование решения резольвентной системы интегральных уравнений, его единственность.

С этой целью воспользуемся методом последовательных приближений. За начальные приближения возьмем: $H_1^0 = x_1$, $H_2^0 = x_2$, $U^0 = \gamma\left(W_2^0\right)$, $W_1^0 = 0$, $W_2^0 = x_1$, $H_{11}^0 = 1$, $H_{12}^0 = 0, H_{21}^0 = 0, H_{22}^0 = 1, U_1^0 = \gamma'$, $U_2^0 = 0, W_{11}^0 = 0, W_{12}^0 = 0, W_{21}^0 = 1$, $W_{22}^0 = 0$.

Перед тем, как записать последовательные приближения к резольвентной системе, условимся верхним индексом "n" обозначать, что у известных функций, зависящих от искомых функций как от аргументов, вместо искомых функций взяты их n - ые итерации. Кроме этого в верхнем пределе интегрирования вместо W_1^n будем писать $W_1\backslash n$. С учетом этих соглашений

$$\mu_1^{n+1} = \int\limits_s^{W_1\backslash n+1} a_1^n d\delta, \tag{1.18}$$

$$H_2^{n+1} = x_2 - \int\limits_s^{W_1\backslash n+1} a_2^n d\delta, \tag{1.19}$$

$$U^{n+1} = \gamma\left(x_1 - \mu_2^{n+1}\right) + \int\limits_0^s f^n d\delta, \tag{1.20}$$

$$W_1^{n+1} = \int\limits_{\varphi(x_1)}^{x_2} W_{12}^n dx_2, \tag{1.21}$$

$$\mu_2^{n+1} = \int\limits_0^{W_1\backslash n+1} a_1^n d\delta, \tag{1.22}$$

$$1 - \mu_{11}^{n+1} = 1 - a_1^{n+1} W_{11}^{n+1} - \int\limits_s^{W_1\backslash n+1} \left(a_{11}^n\left(1 - \mu_{11}^n\right) + a_{12}^n H_{21}^n + a_{1U}^n U_1^n\right) d\delta, \tag{1.23}$$

$$\mu_{12}^{n+1} = a_1^{n+1} W_{12}^{n+1} + \int\limits_s^{W_1\backslash n+1} \left(a_{11}^n\left(-\mu_{12}^n\right) + a_{12}^n H_{22}^n + a_{1U}^n U_2^n\right) d\delta, \tag{1.24}$$

$$H_{21}^{n+1} = -a_2^{n+1} W_{11}^{n+1} - \int\limits_s^{W_1\backslash n+1} \left(a_{21}^n\left(1 - \mu_{11}^n\right) + a_{22}^n H_{21}^n + a_{2U}^n U_1^n\right) d\delta, \tag{1.25}$$

$$H_{22}^{n+1} = 1 - a_2^{n+1} W_{12}^{n+1} - \int\limits_s^{W_1\backslash n+1} \left(a_{21}^n\left(-\mu_{12}^n\right) + a_{22}^n H_{22}^n + a_{2U}^n U_2^n\right) d\delta, \tag{1.26}$$

$$U_1^{n+1} = \gamma'\left(x_1 - \mu_2^{n+1}\right) \cdot \left(1 - \mu_{21}^{n+1}\right) + \int_0^s \left(f_1^n \left(1 - \mu_{11}^n\right) + f_2^n H_{21}^n + f_U^n U_1^n\right) d\delta, \tag{1.27}$$

$$U_2^{n+1} = \gamma'\left(x_1 - \mu_2^{n+1}\right) \cdot \left(-\mu_{22}^{n+1}\right) + \int_0^s \left(f_1^n \left(-\mu_{12}^n\right) + f_2^n H_{22}^n + f_U^n U_2^n\right) d\delta, \tag{1.28}$$

$$\begin{gathered} W_{11}^{n+1} = \Big(J_{n+1}\Big)^{-1}\Big(-\varphi'\left(\mu_2^{n+1}\right) + \int_0^{W_1\backslash n+1} \Big(\varphi'\left(\mu_2^n\right)\left(a_{11}^n\left(1-\mu_{11}^n\right) + a_{12}^n H_{21}^n + a_{1U}^n U_1^n\right) - \\ - \left(a_{21}^n\left(1-\mu_{11}^n\right) + a_{22}^n H_{21}^n + a_{2U}^n U_1^n\right)\Big) d\delta\Big), \end{gathered} \tag{1.29}$$

$$\begin{gathered} W_{12}^{n+1} = \Big(J_{n+1}\Big)^{-1}\Big(1 + \int_0^{W_1\backslash n+1} \Big(\varphi'\left(\mu_2^n\right)\left(a_{11}^n\left(-\mu_{12}^n\right) + a_{12}^n H_{22}^n + a_{1U}^n U_2^n\right) - \\ - \left(a_{21}^n\left(-\mu_{12}^n\right) + a_{22}^n H_{22}^n + a_{2U}^n U_2^n\right)\Big) d\delta\Big) \end{gathered} \tag{1.30}$$

$$\begin{gathered} 1 - \mu_{21}^{n+1} = \Big(J_{n+1}\Big)^{-1}\Big(a_2^{n+1} + \int_0^{W_1\backslash n+1} \Big(a_1^n\left(a_{21}^n\left(1-\mu_{11}^n\right) + a_{22}^n H_{21}^n + a_{2U}^n U_1^n\right) - \\ - a_2^n\left(a_{11}^n\left(1-\mu_{11}^n\right) + a_{12}^n H_{21}^n + a_{1U}^n U_1^n\right)\Big) d\delta\Big), \end{gathered} \tag{1.31}$$

$$\begin{gathered} -\mu_{22}^{n+1} = \Big(J_{n+1}\Big)^{-1}\Big(-a_1^{n+1} + \int_0^{W_1\backslash n+1} \Big(a_1^n\left(a_{21}^n\left(-\mu_{12}^n\right) + a_{22}^n H_{22}^n + a_{2U}^n U_2^n\right) - \\ - a_2^n\left(a_{11}^n\left(-\mu_{12}^n\right) + a_{12}^n H_{22}^n + a_{1U}^n U_2^n\right)\Big) d\delta\Big). \end{gathered} \tag{1.32}$$

Решение системы уравнений (1.3) – (1.17) в области Ω_ε будем искать в предположении $|U| \leqslant K_U$, и, кроме того, $|f| \leqslant K_f$, $|\gamma| \leqslant K_\gamma$. Пусть $\varepsilon = \max\limits_{x_1, x_2 \in \Omega_\varepsilon} |x_2 - \varphi(x_1)|$; $X_2 = \max\limits_{x_1 \in (-\infty; +\infty)} \{|\varphi(x_1) - \beta_0|, |\varphi(x_1) + \beta_0|\}$. С учетом того, что: $|a_i^m| \leqslant K_{ai}, |f^m| \leqslant K_f$, $\left|a_{ij}^m\right| \leqslant K_{aij}, \left|a_{iHj}^m\right| \leqslant K_{aiHj},\ |a_{iU}^m| \leqslant K_{aiU}, |f_{Hi}^m| \leqslant K_{fHi}, |f_U^m| \leqslant K_{f_U}, |\gamma(\mu_2^m)| \leqslant N_\gamma, |\gamma'(\mu_2^m)| \leqslant$ $\leqslant K_{\gamma'},\ |\varphi'(\mu_2^m)| \leqslant K_{\varphi'}, \dfrac{1}{|J_m|} = \dfrac{1}{|a_2^m - a_1^m \varphi'(\mu_2^m)|} \leqslant \dfrac{1}{K_{a_2} + K_{\varphi'} K_{a_1}} = K_0$, где $1 \leqslant m \leqslant n$. Обозначим $v^n = \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|W_{11}^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|W_{12}^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|\mu_1^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|H_2^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|U^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|1 - \mu_{11}^n| +$ $+ \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|\mu_{12}^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|H_{21}^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|H_{22}^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|U_1^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|U_2^n|$,
$\zeta_1 = K_0\left(K_{\varphi'} + 1\right) + K_0\left(K_{a_1} + K_{a_2}\right)\left(1 + K_{\varphi'} + K_{\gamma'}\right) + 2 + X_2 + N_\gamma$, $\sigma_2 = K_{a_1} + K_{a_2} + K_f$,
$\sigma_1 = K_0\left(M_{a_1} K_{\varphi'} + M_{a_2}\right)\left(K_{a_1} + K_{a_2} + 1\right) + K_{\gamma'} K_0\left(M_{a_2} K_{a_1} + M_{a_1} K_{a_2}\right) + M_{a_1} + M_{a_2} + M_f$. Для каждого уравнения системы (1.18)–(1.32) выпишем оценки для последовательных прибли-

жений:

$$\begin{gathered}
\left|\mu_1^{n+1}\right| \leqslant \left|W_1^{n+1}\right| K_{a_1}, \\
\left|H_2^{n+1}\right| \leqslant X_2 + \left|W_1^{n+1}\right| K_{a_2}, \\
\left|\mu_2^{n+1}\right| \leqslant \left|W_1^{n+1}\right| K_{a_1}, \\
\left|U^{n+1}\right| \leqslant N_\gamma + \left|W_1^{n+1}\right| K_f, \\
\left|W_1^{n+1}\right| \leqslant \varepsilon \left\|W_{12}^n\right\|, \\
\left|1-\mu_{11}^{n+1}\right| \leqslant 1 + K_{a_1}\left|W_{11}^{n+1}\right| + M_{a_1}\left|W_1^{n+1}\right|\left(\left\|1-\mu_{11}^n\right\| + \left\|H_{21}^n\right\| + \left\|U_1^n\right\|\right), \\
\left|\mu_{12}^{n+1}\right| \leqslant K_{a_1}\left|W_{12}^{n+1}\right| + M_{a_1}\left|W_1^{n+1}\right|\left(\left\|\mu_{12}^n\right\| + \left\|H_{22}^n\right\| + \left\|U_2^n\right\|\right),
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\left|H_{21}^{n+1}\right| \leqslant K_{a_2}\left|W_{11}^{n+1}\right| + M_{a_2}\left|W_1^{n+1}\right|\left(\left\|1-\mu_{11}^n\right\| + \left\|H_{21}^n\right\| + \left\|U_1^n\right\|\right), \\
\left|H_{22}^{n+1}\right| \leqslant 1 + K_{a_2}\left|W_{12}^{n+1}\right| + M_{a_2}\left|W_1^{n+1}\right|\left(\left\|\mu_{12}^n\right\| + \left\|H_{22}^n\right\| + \left\|U_2^n\right\|\right), \\
\left|U_1^{n+1}\right| \leqslant K_{\gamma'}\left|1-\mu_{21}^{n+1}\right| + M_f\left|W_1^{n+1}\right|\left(\left\|1-\mu_{11}^n\right\| + \left\|H_{21}^n\right\| + \left\|U_1^n\right\|\right), \\
\left|U_2^{n+1}\right| \leqslant K_{\gamma'}\left|\mu_{22}^{n+1}\right| + M_f\left|W_1^{n+1}\right|\left(\left\|\mu_{12}^n\right\| + \left\|H_{22}^n\right\| + \left\|U_2^n\right\|\right), \\
\left|W_{11}^{n+1}\right| \leqslant K_0K_{\varphi'} + K_0\left(K_{\varphi'}M_{a_1} + M_{a_2}\right)\left|W_1^{n+1}\right|\left(\left\|1-\mu_{11}^n\right\| + \left\|H_{21}^n\right\| + \left\|U_1^n\right\|\right), \\
\left|W_{12}^{n+1}\right| \leqslant K_0 + K_0\left(K_{\varphi'}M_{a_1} + M_{a_2}\right)\left|W_1^{n+1}\right|\left(\left\|\mu_{12}^n\right\| + \left\|H_{22}^n\right\| + \left\|U_2^n\right\|\right), \\
\left|1-\mu_{21}^{n+1}\right| \leqslant K_0K_{a_2} + K_0\left|W_1^{n+1}\right|\left(K_{a_1}M_{a_2} + K_{a_2}M_{a_1}\right)\left(\left\|1-\mu_{11}^n\right\| + \left\|H_{21}^n\right\| + \left\|U_1^n\right\|\right), \\
\left|\mu_{22}^{n+1}\right| \leqslant K_0K_{a_1} + K_0\left|W_1^{n+1}\right|\left(K_{a_1}M_{a_2} + K_{a_2}M_{a_1}\right)\left(\left\|\mu_{12}^n\right\| + \left\|H_{22}^n\right\| + \left\|U_2^n\right\|\right).
\end{gathered}$$

Складывая левые и правые части в получившихся неравенствах и учитывая введенные обозначения, получим: $v^{n+1} \leqslant \zeta_1 + \varepsilon\left(\sigma_1\left(v^n\right)^2 + \sigma_2 v^n\right)$. Потребуем, чтобы $\zeta_1 + \varepsilon\left(\left(10\zeta_1\right)^2\sigma_1 + 10\zeta_1\sigma_2\right) \leqslant 10\zeta_1$, тогда $\varepsilon \leqslant \dfrac{9}{10\left(10\zeta_1\sigma_1 + \sigma_2\right)}$. Таким образом, если $v^n \leqslant 10\zeta_1$, то $v^{n+1} \leqslant \zeta_1 + \varepsilon\sigma_1\left(v^n\right)^2 + \varepsilon\sigma_2 v^n \leqslant 10\zeta_1$. То есть мы получили, что v^{n+1} — конечна при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \dfrac{9}{10\left(10\zeta_1\sigma_1 + \sigma_2\right)}$, тогда из $\left|W_{11}^{n+1}\right| + \left|W_{12}^{n+1}\right| + \left|\mu_1^{n+1}\right| + \left|H_2^{n+1}\right| + {}$ $+ \left|U^{n+1}\right| + \left|1-\mu_{11}^{n+1}\right| + \left|\mu_{12}^{n+1}\right| + \left|H_{21}^{n+1}\right| + \left|H_{22}^{n+1}\right| + \left|U_1^{n+1}\right| + \left|U_2^{n+1}\right| \leqslant 10\zeta_1$ следует, что $\left|W_{11}^{n+1}\right|, \left|W_{12}^{n+1}\right|, \left|\mu_1^{n+1}\right|, \left|H_2^{n+1}\right|, \left|U^{n+1}\right|, \left|1-\mu_{11}^{n+1}\right|, \left|\mu_{12}^{n+1}\right|, \left|H_{21}^{n+1}\right|, \left|H_{22}^{n+1}\right|, \left|U_1^{n+1}\right|, \left|U_2^{n+1}\right|$ — ограничены, а значит, $\left|W_{11}^{n+1}\right|, \left|W_{12}^{n+1}\right|$ — ограничены. Тогда $\left|W_1^{n+1}\right| \leqslant \varepsilon\left\|W_{12}^{n+1}\right\|$, $\left|W_1^{n+1}\right| \leqslant 10\zeta_1\varepsilon$, а, следовательно, $\left|\mu_2^{n+1}\right| \leqslant 10\zeta_1\varepsilon K_{a_1}$.

Таким образом все рассматриваемые $n+1$-ые приближения ограничены в области Ω_ε, где $\varepsilon \leqslant \min\left(\dfrac{9}{10\left(10\zeta_1\sigma_1 + \sigma_2\right)}; \dfrac{9N_\gamma}{10\zeta_1 K_f}\right)$. Мы получили, что последовательность, составленная из последовательных приближений ограничена в области Ω_ε.

Получим выражения для разности $n+1$ и n приближений для каждой из функций $\mu_1^n, H_2^n, 1-\mu_{11}^n, \mu_{12}^n, H_{21}^n, H_{22}^n, U^n, U_1^n, U_2^n, W_1^n, W_{11}^n, W_{12}^n, \mu_2^n, 1-\mu_{21}^n, \mu_{22}^n$. Получим систему из 15 неравенств, сложив которые будем иметь:

$$\begin{aligned}
&\left|\mu_1^{n+1}-\mu_1^n\right| + \left|H_2^{n+1}-H_2^n\right| + \left|U^{n+1}-U^n\right| + \left|W_1^{n+1}-W_1^n\right| + \left|W_{11}^{n+1}-W_{11}^n\right| + \left|W_{12}^{n+1}-W_{12}^n\right| + \\
&+ \left|\mu_2^{n+1}-\mu_2^n\right| + \left|\mu_{21}^{n+1}-\mu_{21}^n\right| + \left|\mu_{22}^{n+1}-\mu_{22}^n\right| + \left|\mu_{11}^{n+1}-\mu_{11}^n\right| + \left|\mu_{12}^{n+1}-\mu_{12}^n\right| + \left|H_{21}^{n+1}-H_{21}^n\right| + \\
&+ \left|H_{22}^{n+1}-H_{22}^n\right| + \left|U_1^{n+1}-U_1^n\right| + \left|U_2^{n+1}-U_2^n\right| \leqslant \varepsilon\Big(\chi_1\left\|\mu_1^n-\mu_1^{n-1}\right\| + \chi_2\left\|H_2^n-H_2^{n-1}\right\| + \\
&+ \chi_3\left\|U^n-U^{n-1}\right\| + \chi_4\left\|W_1^n-W_1^{n-1}\right\| + \chi_5\left\|W_{11}^n-W_{11}^{n-1}\right\| + \chi_6\left\|W_{12}^n-W_{12}^{n-1}\right\| + \\
&+ \chi_7\left\|\mu_2^n-\mu_2^{n-1}\right\| + \chi_8\left\|\mu_{21}^n-\mu_{21}^{n-1}\right\| + \chi_9\left\|\mu_{22}^n-\mu_{22}^{n-1}\right\| + \chi_{10}\left\|\mu_{11}^n-\mu_{11}^{n-1}\right\| + \chi_{11}\left\|\mu_{12}^n-\mu_{12}^{n-1}\right\| + \\
&+ \chi_{12}\left\|H_{21}^n-H_{21}^{n-1}\right\| + \chi_{13}\left\|H_{22}^n-H_{22}^{n-1}\right\| + \chi_{14}\left\|U_1^n-U_1^{n-1}\right\| + \chi_{15}\left\|U_2^n-U_2^{n-1}\right\|\Big) \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon\chi\Big(\left\|\mu_1^n-\mu_1^{n-1}\right\| + \left\|H_2^n-H_2^{n-1}\right\| + \left\|U^n-U^{n-1}\right\| + \left\|W_1^n-W_1^{n-1}\right\| + \left\|W_{11}^n-W_{11}^{n-1}\right\| + \\
&+ \left\|W_{12}^n-W_{12}^{n-1}\right\| + \left\|\mu_2^n-\mu_2^{n-1}\right\| + \left\|\mu_{21}^n-\mu_{21}^{n-1}\right\| + \left\|\mu_{22}^n-\mu_{22}^{n-1}\right\| + \left\|\mu_{11}^n-\mu_{11}^{n-1}\right\| + \left\|\mu_{12}^n-\mu_{12}^{n-1}\right\| +
\end{aligned}$$

$\left\|H_{21}^n - H_{21}^{n-1}\right\| + \left\|H_{22}^n - H_{22}^{n-1}\right\| + \left\|U_1^n - U_1^{n-1}\right\| + \left\|U_2^n - U_2^{n-1}\right\|\right)$, $\chi = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 15} \chi_i$, где χ_i – постоянные.

Обозначая $V^{n+1} = colon\left(\mu_1^{n+1}, H_2^{n+1}, U^{n+1}, W_1^{n+1}, W_{11}^{n+1}, W_{12}^{n+1}, \mu_2^{n+1}, \mu_{21}^{n+1}, \mu_{22}^{n+1}, \mu_{11}^{n+1}, \mu_{12}^{n+1}, H_{21}^{n+1}, H_{22}^{n+1}, U_1^{n+1}, U_1^{n+1}\right)$, $\|V^{n+1} - V^n\| = \left|\mu_1^{n+1} - \mu_1^n\right| + \left|H_2^{n+1} - H_2^n\right| + \left|U^{n+1} - U^n\right| + \left|W_1^{n+1} - W_1^n\right| + \left|W_{11}^{n+1} - W_{11}^n\right| + \left|W_{12}^{n+1} - W_{12}^n\right| + \left|\mu_2^{n+1} - \mu_2^n\right| + \left|\mu_{21}^{n+1} - \mu_{21}^n\right| + \left|\mu_{22}^{n+1} - \mu_{22}^n\right| + \left|\mu_{11}^{n+1} - \mu_{11}^n\right| + \left|\mu_{12}^{n+1} - \mu_{12}^n\right| + \left|H_{21}^{n+1} - H_{21}^n\right| + \left|H_{22}^{n+1} - H_{22}^n\right| + \left|U_1^{n+1} - U_1^n\right| + \left|U_2^{n+1} - U_2^n\right|$, получим $\|V^{n+1} - V^n\| \leqslant \varepsilon\chi\|V^n - V^{n-1}\|$. Подберем ε таким образом, чтобы $\varepsilon\chi < 1$ $\left(0 \leqslant \varepsilon \leqslant \min\left(\frac{9}{10\,(10\zeta_1\sigma_1 + \sigma_2)}; \frac{9N_\gamma}{10\zeta_1 K_f}; \frac{1}{\chi+1}\right)\right)$, чтобы $V^n = V^0 + V^1 - V^0 + V^2 - V^1 + \ldots + V^n - V^{n-1}$ можно было оценить суммой.

Введем обозначения:

$$I_1 = \left\|\left(\mu_1^0, H_2^0, U^0, W_1^0, W_{11}^0, W_{12}^0, \mu_2^0, \mu_{21}^0, \mu_{22}^0, \mu_{11}^0, \mu_{12}^0, H_{21}^0, H_{22}^0, U_1^0, U_1^0\right)\right\|,$$
$$I_2 = \left\|\left(\mu_1^1, H_2^1, U^1, W_1^1, W_{11}^1, W_{12}^1, \mu_2^1, \mu_{21}^1, \mu_{22}^1, \mu_{11}^1, \mu_{12}^1, H_{21}^1, H_{22}^1, U_1^1, U_1^1\right)\right\|,$$

тогда $\|V^0\| \leqslant I_1$, $\|V^i - V^{i-1}\| \leqslant \varepsilon^{i-1}\chi^{i-1}I_2, 1 \leqslant i \leqslant n$.

Имеем для ряда $V^0 + V^1 - V^0 + V^2 - V^1 + \ldots + V^n - V^{n-1} + \ldots$ оценку его частичной суммы: $\|V^n\| \leqslant \|V^0\| + \|V^1 - V^0\| + \|V^2 - V^1\| + \ldots + \|V^n - V^{n-1}\| \leqslant I_1 + \frac{I_2}{1 - \varepsilon\chi}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} V^i$ сходится.

Единственность следует из того факта, что для разности двух возможных решений u_I и u_{II} уравнения (9) будет выполняться неравенство $\|u_{II} - u_I\| \leqslant \varepsilon\chi_3\|u_{II} - u_I\|$, где $\varepsilon\chi_3 < 1$.

Определили функции $\mu_1, H_2, U, W_1, W_{11}, W_{12}, \mu_2, \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{11}, \mu_{12}, H_{21}, H_{22}, U_1, U_2$. Система (1.18)–(1.32) решена.

Для завершения доказательства теоремы в соответствии с общей схемой, изложенной в [5] необходимо доказать, что $1 - \mu_{11} = \frac{\partial(x_1-\mu_1)}{\partial x_1}$, $-\mu_{12} = \frac{\partial(x_1-\mu_1)}{\partial x_2}$, $H_{21} = \frac{\partial H_2}{\partial x_1}$, $H_{22} = \frac{\partial H_2}{\partial x_2}$, $U_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}$, $U_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}$, $W_{11} = \frac{\partial W_1}{\partial x_1}$, $W_{12} = \frac{\partial W_1}{\partial x_2}$, $1 - \mu_{21} = \frac{\partial(x_1-\mu_2)}{\partial x_1}$, $-\mu_{22} = \frac{\partial(x_1-\mu_2)}{\partial x_2}$.

Чтобы показать, что $\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1} \to 1 - \mu_{11}$, $\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_2} \to -\mu_{12}$, $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1} \to H_{21}$, $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_2} \to H_{22}$, $\frac{\partial U^n}{\partial x_1} \to U_1$, $\frac{\partial U^n}{\partial x_2} \to U_2$ сложим выражения для $\left|(1-\mu_{11}) - \frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1}\right|$, $\left|(-\mu_{12}) - \frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_2}\right|$, $\left|H_{21} - \frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}\right|$, $\left|H_{22} - \frac{\partial H_2^n}{\partial x_2}\right|$, $\left|U_1 - \frac{\partial U^n}{\partial x_1}\right|$, $\left|U_2 - \frac{\partial U^n}{\partial x_2}\right|$. Вводя обозначения

$$\widehat{V} = \widehat{V}\left(1 - \mu_{11}, \mu_{12}, H_{21}, H_{22}, U_1, U_2\right), \tilde{V}^n = \tilde{V}\left(\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1}, \frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_2}, \frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}, \frac{\partial H_2^n}{\partial x_2}, \frac{\partial U^n}{\partial x_1}, \frac{\partial U^n}{\partial x_2}\right),$$

$$\left\|\widehat{V} - \tilde{V}^n\right\| = \left\|(1-\mu_{11}) - \frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1}\right\| + \left\|(-\mu_{12}) - \frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_2}\right\| + \\ + \left\|H_{21} - \frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}\right\| + \left\|H_{22} - \frac{\partial H_2^n}{\partial x_2}\right\| + \left\|U_1 - \frac{\partial U^n}{\partial x_1}\right\| + \left\|U_2 - \frac{\partial U^n}{\partial x_2}\right\|,$$

получим $\left|\widehat{V} - \tilde{V}^n\right| \leqslant 10\zeta_1\varepsilon\left(M_{a_1} + M_{a_2} + M_f\right) \cdot \left\|\widehat{V} - \tilde{V}^{n-1}\right\| + \Pi_n,$ где

$$\Pi_n = (K_{a_1} + K_{a_2}) \cdot \left(\left|W_{11} - \frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}\right| + \left|W_{12} - \frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}\right|\right) + L_{\gamma'}\left|\mu_2 - \mu_2^n\right| \cdot \left(\left|1 - \mu_{21}\right| + \left|\mu_{22}\right|\right) +$$
$$+ K_{\gamma'} \cdot \left(\left|(1 - \mu_{21}) - \frac{\partial\left(x_1 - \mu_2^n\right)}{\partial x_1}\right| + \left|(-\mu_{22}) - \frac{\partial\left(x_1 - \mu_2^n\right)}{\partial x_2}\right|\right) + (L_{a_1} + L_{a_2})\left(\left\|\mu_1 - \mu_1^{n-1}\right\| +\right.$$
$$\left. + \left\|H_2 - H_2^{n-1}\right\| + \left\|U - U^{n-1}\right\|\right) \cdot \left(\left|\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}\right|\right) +$$
$$+ (M_{a_1} + M_{a_2}) \cdot \left|W_1 - W_1^n\right| \cdot \Big(\left\|1 - \mu_{11}\right\| + \left\|H_{21}\right\| + \left\|U_1\right\| + \left\|\mu_{12}\right\| + \left\|H_{22}\right\| + \left\|U_2\right\|\Big) +$$
$$+ \left|W_1^n\right|\left(\left(\left\|\frac{\partial\left(x_1 - \mu_1^{n-1}\right)}{\partial x_1}\right\| + \left\|\frac{\partial\left(x_1 - \mu_1^{n-1}\right)}{\partial x_2}\right\|\right)(L_{a_{11}} + L_{a_{21}}) +\right.$$
$$\left. + \left(\left\|\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_1}\right\| + \left\|\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_2}\right\|\right)(L_{a_{12}} + L_{a_{22}}) + \left(\left\|\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1}\right\| + \left\|\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_2}\right\|\right)(L_{a_{1U}} + L_{a_{2U}})\right) \cdot$$

$$\cdot\left(\left\|\mu_1 - \mu_1^{n-1}\right\| + \left\|H_2 - H_2^{n-1}\right\| + \left\|U - U^{n-1}\right\|\right) + |s|\left(\left(\left\|\frac{\partial\left(x_1 - \mu_1^{n-1}\right)}{\partial x_1}\right\| +\right.\right.$$
$$\left. + \left\|\frac{\partial\left(x_1 - \mu_1^{n-1}\right)}{\partial x_2}\right\|\right) L_{f_1} + \left(\left\|\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_1}\right\| + \left\|\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_2}\right\|\right) L_{f_2} +$$
$$\left. + \left(\left\|\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1}\right\| + \left\|\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_2}\right\|\right) L_{f_U}\right)\left(\left\|\mu_1 - \mu_1^{n-1}\right\| + \left\|H_2 - H_2^{n-1}\right\| + \left\|U - U^{n-1}\right\|\right).$$

Покажем, что $\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}$, $\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}$, $\frac{\partial\left(x_1 - \mu_2^n\right)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\left(x_1 - \mu_2^n\right)}{\partial x_2}$ ограничены. Для $\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}$ будем иметь следующее

$$\left|\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}\right| = \left|\lim_{\Delta x_1 \to 0}\frac{W_1^n\left(x_1 + \Delta x_1, x_2\right) - W_1^n\left(x_1, x_2\right)}{\Delta x_1}\right| =$$
$$= \left|\lim_{\Delta x_1 \to 0}\frac{1}{\Delta x_1}\Big(\int\limits_{\varphi(x_1 + \Delta x_1)}^{x_2} W_{12}^{n-1} dx_2 - \int\limits_{\varphi(x_1)}^{x_2} W_{12}^{n-1} dx_2\Big)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left\|W_{12}^{n-1}\right\|\left|\lim_{\Delta x_1 \to 0}\frac{-\left(\varphi(x_1 + \Delta x_1) - \varphi(x_1)\right)}{\Delta x_1}\right| = \left\|W_{12}^{n-1}\right\| \cdot \left|\varphi'(x_1)\right| \leqslant \left\|W_{12}^{n-1}\right\| K_{\varphi'}.$$

Ранее было доказано, что $\left|W_1^n\right|$ ограничена, отсюда $\left|W_{11}^n\right|$ и $\left|W_{12}^n\right|$ ограничены. Можно сказать, что $\left|W_{12}^n\right| \leqslant \varepsilon c$. Мы получили, что $\left\|\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}\right\| \leqslant \varepsilon c K_{\varphi'}$.

Для $\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}$ будем иметь следующее

$$\left|\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}\right| = \left|\lim_{\Delta x_2 \to 0}\frac{W_1^n\left(x_1, x_2 + \Delta x_2\right) - W_1^n\left(x_1, x_2\right)}{\Delta x_2}\right| =$$
$$= \left|\lim_{\Delta x_2 \to 0}\frac{1}{\Delta x_2}\left(\int\limits_{\varphi(x_1)}^{x_2 + \Delta x_2} W_{12}^{n-1}\left(x_1; \delta\right) d\delta - \int\limits_{\varphi(x_1)}^{x_2} W_{12}^{n-1}\left(x_1; \delta\right) d\delta\right)\right| \leqslant \left\|W_{12}^{n-1}\right\|.$$

Отсюда имеем $\left\|\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}\right\| \leqslant \varepsilon c$.

Теперь покажем ограниченность $\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_1}$.

$$\left|\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_1}\right|=\left|\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{x_1+\Delta x_1-\mu_2^n\left(x_1+\Delta x_1,x_2\right)-x_1+\mu_2^n\left(x_1,x_2\right)}{\Delta x_1}\right|.$$

$$\left|\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_1}\right|=\left|a_1^{n-1}\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}+\int\limits_s^{W_1\backslash n}\left(a_{11}^{n-1}\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^{n-1}\right)}{\partial x_1}+a_{12}^{n-1}\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_1}+a_{1U}^{n-1}\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1}\right)d\delta\right|\leqslant$$

$$\leqslant K_{a_1}\left|\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}\right|+\left|W_1^n\right|M_{a_1}\left(\left\|\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^{n-1}\right)}{\partial x_1}-1\right\|+\left\|\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_1}\right\|+\left\|\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1}\right\|\right),$$

$$\left|\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_1}\right|\leqslant\varepsilon cK_{a_1}K_{\varphi'}+10\zeta_1\varepsilon M_{a_1}\left(\left\|\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^{n-1}\right)}{\partial x_1}-1\right\|+\left\|\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_1}\right\|+\left\|\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1}\right\|\right). \tag{1.33}$$

Выведем оценки для $\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1},\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1},\frac{\partial U^n}{\partial x_1}$. Сложив неравенства для $\left\|\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1}\right\|$, $\left\|\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}\right\|$, $\left\|\frac{\partial U^n}{\partial x_1}\right\|$, и введя обозначения, $v_1^n=\max\limits_{\Omega_\varepsilon}\left|\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1}\right|+\max\limits_{\Omega_\varepsilon}\left|\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}\right|+\max\limits_{\Omega_\varepsilon}\left|\frac{\partial U^n}{\partial x_1}\right|$, $\xi_1=cK_{\varphi'}\left(\left(K_{\gamma'}+1\right)K_{a_1}+K_{a_2}\right)$, $\xi_2=10\zeta_1\left(\left(K_{\gamma'}+1\right)M_{a_1}+M_{a_2}+M_f\right)$, получим $v_1^n\leqslant\varepsilon\left(\xi_1+\xi_2v_1^{n-1}\right)$. Найдем такое ε, чтобы $\varepsilon\left(\xi_1+10\zeta_1\xi_2\right)\leqslant 10\zeta_1$, то есть $\varepsilon\leqslant\dfrac{10\zeta_1}{\xi_1+10\zeta_1\xi_2}$.

Таким образом, если $v_1^{n-1}\leqslant 10\zeta_1$, то $v_1^n\leqslant 10\zeta_1$. Мы получили, что v_1^n — конечна при $0\leqslant\varepsilon\leqslant\dfrac{10\zeta_1}{\xi_1+10\zeta_1\xi_2}$, тогда из $\left|\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial U^n}{\partial x_1}\right|\leqslant 10\zeta_1$ следует, что $\left|\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1}\right|$, $\left|\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}\right|$, $\left|\frac{\partial U^n}{\partial x_1}\right|$ — ограничены. Таким образом, мы получили, что $\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}$, $\frac{\partial U^n}{\partial x_1}$ ограничены. С учетом формулы (1.33), получим: $\left|\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_1}\right|\leqslant\varepsilon cK_{a_1}K_{\varphi'}+\left(10\zeta_1\right)^2\varepsilon M_{a_1}$, $\left\|\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_1}\right\|\leqslant\varepsilon\left(cK_{a_1}K_{\varphi'}+\left(10\zeta_1\right)^2M_{a_1}\right)$.

Аналогично показывается, что при $0\leqslant\varepsilon\leqslant\dfrac{10\zeta_1}{\xi_3+10\zeta_1\xi_2}$ ограничены $\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_2}$, $\frac{\partial U^n}{\partial x_2}$, а, следовательно, и $\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_2}$. Здесь ζ_1,ξ_2 определены выше, а $\xi_3=c\left(\left(K_{\gamma'}+1\right)K_{a_1}+K_{a_2}\right)$.

В силу $W_{11}^n\to W_{11}$, что $\frac{\partial W_1}{\partial x_1}=W_{11}$ и $\left|W_1^n-W_1\right|\leqslant\varepsilon_1$, так как $W_1^n\to W_1$, получим $\left|W_{11}-\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}\right|\leqslant\varepsilon_1$. Это и означает, что $W_{11}=\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}$.

Равенства $\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}=W_{12}$, $\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_1}=1-\mu_{21}$, $\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_2}=-\mu_{22}$ доказываются аналогично.

Так как $W_{11}^n\underset{n\to\infty}{\to}W_{11}$, $W_{12}^n\underset{n\to\infty}{\to}W_{12}$, $x_1-\mu_{21}^n\underset{n\to\infty}{\to}x_1-\mu_{21}$, $-\mu_{22}^n\underset{n\to\infty}{\to}-\mu_{22}$ и a_1^n, a_2^n, $\gamma'\left(x_1-\mu_2^n\right)$, $\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}$, $\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}$ — ограничены, то $\forall\tilde\varepsilon_{\max}>0\ \exists N\in\mathrm{N}\ \forall n\geq N$ $\left\|\Pi_n\right\|<\tilde\varepsilon_{\max}$.

Значит, $\left\|\widehat{V}-\tilde V^n\right\|\leqslant 10\zeta_1\varepsilon\left(M_{a_1}+M_{a_2}+M_f\right)\left\|\widehat{V}-\tilde V^{n-1}\right\|+\tilde\varepsilon_{\max}$.

Обозначим $A_{\max}=10\zeta_1\varepsilon\left(M_{a_1}+M_{a_2}+M_f\right)$, причем $A_{\max}<1$. Тогда записанное выше неравенство запишется следующим образом $\left\|\widehat{V}-\tilde V^n\right\|\leqslant A_{\max}\left\|\widehat{V}-\tilde V^{n-1}\right\|+\tilde\varepsilon_{\max}$. Из данного неравенства вытекает, что для любого $p \in \mathbb{N}$ будет выполняться неравенство $\left\| \widehat{V} - \tilde{V}^{n+p} \right\| \leqslant A_{\max}^{p+1} \left\| \widehat{V} - \tilde{V}^{n-1} \right\| + \frac{\tilde{\varepsilon}_{\max}}{1-A_{\max}}$. Так как $A_{\max} < 1$, то, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим: $\left\| \widehat{V} - \tilde{V}^{n} \right\| \leqslant \delta$, где $\delta = \dfrac{\tilde{\varepsilon}_{\max}}{1 - A_{\max}}$.

Мы доказали, что $\tilde{V}^n$ в пространстве $C^1(\Omega_\varepsilon)$ сходится по норме $\left\| \tilde{V}^n \right\|$ при $n \to \infty$, то есть $\frac{\partial(x_1-\mu_1^n)}{\partial x_1} \to 1-\mu_{11}$, $\frac{\partial(x_1-\mu_1^n)}{\partial x_2} \to -\mu_{12}$, $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1} \to H_{21}$, $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_2} \to H_{22}$, $\frac{\partial U^n}{\partial x_1} \to U_1$, $\frac{\partial U^n}{\partial x_2} \to U_2$ в пространстве $C^1(\Omega_\varepsilon)$ сходится по норме $\left\| \tilde{V}^n \right\|$.

В результате для последовательностей $\{x_1 - \mu_1^n\}$, $\{H_2^n\}$, $\{U^n\}$ установлены следующие свойства: $x_1 - \mu_1^n \to x_1 - \mu_1 \in C^1(\Omega_\varepsilon)$, $H_2^n \to H_2 \in C^1(\Omega_\varepsilon)$, $U^n \to U \in C^1(\Omega_\varepsilon)$. В силу полноты и замкнутости $C^1(\Omega_\varepsilon)$ получаем, что $x_1 - \mu_1 \in C^1(\Omega_\varepsilon)$, $H_2 \in C^1(\Omega_\varepsilon)$, $U \in C^1(\Omega_\varepsilon)$, а значит и обладают частными производными по s, x_1, x_2, причем $\frac{\partial(x_1-\mu_1^n)}{\partial x_1} \to \frac{\partial(x_1-\mu_1)}{\partial x_1} \equiv 1-\mu_{11}$, $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1} \to \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \equiv H_{21}$, $\frac{\partial(x_1-\mu_1^n)}{\partial x_2} \to \frac{\partial(x_1-\mu_1)}{\partial x_2} \equiv -\mu_{12}$, $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_2} \to \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \equiv H_{22}$, $\frac{\partial U^n}{\partial x_1} \to \frac{\partial U}{\partial x_1} \equiv U_1$, $\frac{\partial U^n}{\partial x_2} \to \frac{\partial U}{\partial x_2} \equiv U_2$. Тем самым теорема полностью доказана.

Список литературы

1. Алексеенко С. Н., “Применение метода дополнительного аргумента к исследованию разрешимости "одноосной"задачи Коши для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2009, № 11, 40–49.

2. Алексеенко С. Н., Платонова Л. Е., “Построение основной разрешающей системы интегральных уравнений для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка в случае параметрического задания начальных данных”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2011, № 13, 61–70.

3. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н., “К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени”, *Докл. АН*, **329**:5 (1993), 543–546.

4. Иманалиев М. И., Панков П. С., Алексеенко С. Н., “Метод дополнительного аргумента”, *Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. Специальный выпуск*, 2006, № 1, 60–64.

5. Алексеенко С. Н., Платонова Л. Е., “Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка общего вида с начальными данными в декартовых координатах на линии бесконечной длины”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14**:3 (2012), 21–28.

The proof of a local solvability theorem for a quasi-linear first-order partial differential equation of the common type with initial data in Cartesian coordinates on an infinite length line

© **S. N. Alekseenko**[3], **L. E. Platonova**[4]

Abstract. The Cauchy problem for a quasi-linear first order partial differential equation in case when initial data is given on an infinite length smooth line with non-vertical gradient is reduced to a system in 15 integral equations. The local solvability of this system of integral equations is proved. Connections between unknown functions of the integral equations and the unknown function and its derivatives of the primary Cauchy problem is established, because at a deriving of the system of integral equations the partial derivatives of a seeking function were taking as new unknown functions, so the inverse passage is necessary and not trivial. As a result, the local solvability theorem is proved. The local solvability conditions do not include conditional assumptions about behavior of the characteristic lines.

Key Words: quasi-linear first order partial differential equation, Cauchy problem, method of an additional argument.

[3] The professor of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; sn-alekseenko@yandex.ru

[4] The assistant lecture of the mathematical analysis chair, Nizhniy Novgorod State Pedagogical University, Nizhniy Novgorod; fluff13@yandex.ru