

УДК 517.9

# О применении разрывного конечно-элементного метода Галёркина для решения двумерных уравнений диффузионного типа на неструктурированных сетках

© В. Ф. Масыгин<sup>1</sup>, Р. В. Жалнин<sup>2</sup>, В. Ф. Тишкин<sup>3</sup>

**Аннотация.** Предлагается новый эффективный алгоритм решения уравнений диффузионного типа на основе разрывного метода Галёркина, который обладает сходимостью и точностью при использовании явной схемы. Отличительной особенностью предложенного метода является использование двойственной сетки для отыскания части параметров. Исследование метода проводится на примере начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности. Расчеты двумерных модельных задач показывают хорошую точность предложенного метода.

**Ключевые слова:** параболические уравнения, разрывные методы Галёркина, сходимоссть и точность численного метода.

## 1. Описание алгоритма решения уравнений диффузионного типа на основе разрывного метода Галёркина

Построение и исследование алгоритма метода решения уравнений диффузионного типа на основе разрывного метода Галёркина проведем на примере начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности:

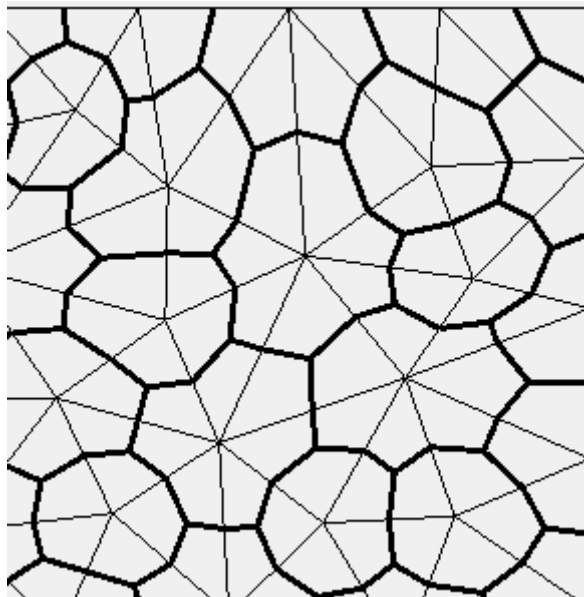
$$\begin{aligned} \rho C_\nu \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div}(\kappa \cdot \operatorname{grad} u), \quad (x, y) \in G, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, y, t) &= g(x, y, t), \quad (x, y) \in \gamma, \\ u(x, y, 0) &= u_0(x, y), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $C_\nu$  - коэффициент теплоемкости при постоянном объеме,  $\rho$  - плотность,  $\kappa$  - коэффициент теплоемкости,  $u$  - температура в точке  $(x, y)$  в момент времени  $t$ ,  $f$  - плотность тепловых источников,  $\gamma$  - граница области расчета,  $g(x, y, t), u_0(x, y)$  - заданные функции. Область  $G \cup \gamma$  - произвольная односвязная. В области  $G \cup \gamma$  - введем треугольную сетку  $\omega_p = \{P_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N\}$ , содержащую внутренние и граничные точки области. На  $\omega_p$  построим триангуляцию Делоне:  $T(\omega_p) = \{T_k = T(T_k^1 : \{x_1, y_1\}, T_k^2 : \{x_2, y_2\}, T_k^3 : \{x_3, y_3\})\}$ . Пусть  $T(\omega_p)$  содержит все узлы  $\omega_p$ ; все треугольники  $T_k$  имеют ненулевую площадь и пересекаются не более чем по образующим их вершинам или ребрам. В каждом из треугольников определим центр и середины сторон. В треугольнике  $T_k$  с вершинами в точках  $T_k^1 : \{x_1, y_1\}, T_k^2 : \{x_2, y_2\}, T_k^3 : \{x_3, y_3\}$  центр  $(x_c, y_c)$  определим как:  $x_c = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, y_c = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ . Также примем в рассмотрение двойственную сетку, составленную из барицентрических объемов вокруг каждой из точек  $\omega_p$ , образованных отрезками, соединяющими центры треугольников с серединами сторон. Точка из  $\omega_p$  будет являться центром для соответствующей ей ячейки двойственной сетки.

<sup>1</sup> Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева, г. Саранск; vmasyagin@gmail.com.

<sup>2</sup> Старший преподаватель кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева, г. Саранск; zhalnin@gmail.com.

<sup>3</sup> Заместитель директора Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва; tishkin@imamod.ru.



Двойственная сетка

Для аппроксимации первого уравнения из (1.1) необходимо преобразовать его к системе дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка [1]. Для этого введем дополнительные переменные [2]:  $q_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $q_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ . Тогда первое уравнение в исходной системе (1.1) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \rho C_\nu \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} k q_x + \frac{\partial}{\partial y} k q_y + f, & (x, y) \in G, & \quad 0 < t \leq T, \\ q_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & (x, y) \in G, & \quad 0 < t \leq T, \\ q_y &= \frac{\partial u}{\partial y}, & (x, y) \in G, & \quad 0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (1.2)$$

Таким образом, (1.2) – это система дифференциальных уравнений 1-го порядка. Для решения такой системы будем использовать предлагаемый метод на основе разрывного метода Галёркина.

На каждом треугольнике  $T_k \in T(\omega_p)$  введем систему линейных базисных функций  $\{\varphi_i\} \in P^1$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $\varphi_0 = 1$ ,  $\varphi_1 = x - x_c$ ,  $\varphi_2 = y - y_c$ , где  $(x_c, y_c)$  – центр треугольника  $T_k$ . На каждой ячейке двойственной сетки  $D_k$  введем систему линейных базисных функций  $\{\psi_i\} \in P^1$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $\psi_0 = 1$ ,  $\psi_1 = x - x_c$ ,  $\psi_2 = y - y_c$ , где  $(x_c, y_c)$  – центр ячейки  $D_k$ .

Приближенное решение  $u_k$  будем искать в треугольнике  $T_k$  в виде разложения по базису:  $u_k = u_{0k} + u_{1k}(x - x_c) + u_{2k}(y - y_c)$ ,  $u_{ik} = u_{ik}(t)$ ,  $u_{ik} \in T_k$ ,  $i = \overline{0, 2}$ ,  $(x_c, y_c)$  – центр треугольника, где неизвестные коэффициенты разложения зависят от времени.

Приближенные решения  $q_{xk}, q_{yk}$  будем искать в ячейке  $D_k$  в виде разложения по базису:  $q_{xk} = q_{x0k} + q_{x1k}(x - x_c) + q_{x2k}(y - y_c)$ ,  $q_{xik} = q_{xik}(t)$ ,  $q_{xik} \in D_k$ ,  $i = \overline{0, 2}$ ,  $(x_c, y_c)$  – центр ячейки  $D_k$ ,  $q_{yk} = q_{y0k} + q_{y1k}(x - x_c) + q_{y2k}(y - y_c)$ ,  $q_{yik} = q_{yik}(t)$ ,  $q_{yik} \in D_k$ ,  $i = \overline{0, 2}$ ,  $(x_c, y_c)$  – центр ячейки  $D_k$ , где неизвестные коэффициенты разложения зависят от времени.

Умножим первое уравнение из (1.2) на базисную функцию  $\varphi_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , и проинтегрируем произведение по треугольнику  $T_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , где  $N$  – число треугольников. Точное

решение  $u$  заменим приближенным  $u_k$  [3]. После интегрирования по частям получим:

$$\begin{aligned}
 (\rho C_\nu)_k \sum_{i=0}^2 \frac{\partial u_{ik}}{\partial t} \int_{T_k} \varphi_i \varphi_m ds &= \oint_{\partial T_k} n_x \kappa q_x \varphi_m dl + \oint_{\partial T_k} n_y \kappa q_y \varphi_m dl - \\
 - \int_{T_k} \kappa q_x \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} ds - \int_{T_k} \kappa q_y \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} ds + \int_{T_k} \Phi_k \varphi_m ds, & \quad m = \overline{0, 2}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

Умножим второе и третье уравнения из (1.2) на базисную функцию  $\psi_i, i = 0, 1, 2$ , и проинтегрируем произведение по ячейке  $D_k, k = \overline{1, M}$ , где  $M$  – число ячеек двойственной сетки. Получим:

$$\sum_{i=0}^2 q_{xik} \int_{T_k} \varphi_i \varphi_m ds = \oint_{\partial D_k} n_x u \psi_m dl - \int_{T_k} u_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x} ds, \quad m = \overline{0, 2}, \quad k = \overline{1, M}, \quad (1.4)$$

$$\sum_{i=0}^2 q_{yik} \int_{T_k} \varphi_i \varphi_m ds = \oint_{\partial D_k} n_y u \psi_m dl - \int_{T_k} u_k \frac{\partial \psi_m}{\partial y} ds, \quad m = \overline{0, 2}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (1.5)$$

Сначала из систем (1.4) и (1.5) находим  $q_{x0k}, q_{x1k}, q_{x2k}, q_{y0k}, q_{y1k}, q_{y2k}$  на текущем временном слое, используя значения  $u_k$  с предыдущего временного слоя, а после подставляем их в систему (1.3) для нахождения  $u_{0k}, u_{1k}, u_{2k}$  на текущем временном слое.

Для вычисления двойных и криволинейных интегралов будем использовать квадратурные формулы Гаусса.

## 2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода по границе треугольника $T_k$ и ячейки двойственной сетки $D_k$

Пусть  $A : \{x_1, y_1\}$  и  $B : \{x_2, y_2\}$  – координаты начала и конца ребра треугольника или ячейки двойственной сетки.

$$\begin{aligned}
 \int_A^B f(x, y) dl &= \frac{x_2 - x_1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2} \times \\
 &\times \left[ f\left(\frac{x_2 + x_1}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}}, \frac{\left(\frac{x_2 + x_1}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}} - x_1\right)(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} + y_1\right) \right] + \\
 &+ f\left(\frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}}, \frac{\left(\frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}} - x_1\right)(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} + y_1\right)
 \end{aligned}$$

Если  $x_2 = x_1$

$$\int_A^B f(x, y) dl = \frac{y_2 - y_1}{2} \left[ f\left(x_1, \frac{y_2 + y_1}{2} - \frac{y_2 - y_1}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(x_1, \frac{y_2 + y_1}{2} + \frac{y_2 - y_1}{2\sqrt{3}}\right) \right]$$

### 3. Вычисление двойного интеграла по треугольнику $T_k$ и ячейке двойственной сетки $D_k$

Двойной интеграл по ячейке двойственной сетки считаем как сумму двойных интегралов по треугольникам, из которых она состоит. Следуя работе [4] возьмем три точки на каноническом треугольнике:

$$\begin{aligned}\tilde{t}_1 &: \left( \zeta_1 = \frac{2}{3}, \eta_1 = \frac{1}{6} \right), & \omega_1 &= \frac{1}{3}, \\ \tilde{t}_2 &: \left( \zeta_2 = \frac{1}{6}, \eta_2 = \frac{2}{3} \right), & \omega_2 &= \frac{1}{3}, \\ \tilde{t}_3 &: \left( \zeta_3 = \frac{1}{6}, \eta_3 = \frac{1}{6} \right), & \omega_3 &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Значение интеграла по треугольнику с вершинами в точках  $T_k^1 : \{x_1, y_1\}$ ,  $T_k^2 : \{x_2, y_2\}$ ,  $T_k^3 : \{x_3, y_3\}$  равно

$$\int_{T_k} f(x, y) ds = J \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} f(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \approx J \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \tilde{f}(\zeta_i, \eta_i) \omega_i,$$

где  $J = |(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|$  - якобиан перехода к каноническому треугольнику,  $\tilde{f}$  - значение подынтегральной функции в образах точек  $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2$  и  $\tilde{t}_3$  в исходном треугольнике  $\{T_k^1 T_k^2 T_k^3\}$ .

### 4. Вычисления на границе расчетной области

Значения  $u(x, y, t)$  на границе  $\gamma$  расчетной области брались исходя из граничных условий. На граничных треугольниках производилась реконструкция решения. После каждой итерации по времени модифицировались коэффициенты  $u_{0k}, u_{1k}, u_{2k}$  так, чтобы на граничной стороне в точности выполнялось граничное условие с сохранением значения  $u(x, y, t)$  в центре треугольника  $(x_c, y_c)$ . Реконструкция производилась по формулам:

$$\begin{cases} \widetilde{u}_{0k} = u_{0k}, \\ \widetilde{u}_{1k} = \frac{(g(x_1, y_1, t) - u_{0k})(y_2 - y_c) - (g(x_2, y_2, t) - u_{0k})(y_1 - y_c)}{(x_1 - x_c)(y_2 - y_c) - (x_2 - x_c)(y_1 - y_c)}, \\ \widetilde{u}_{2k} = \frac{g(x_1, y_1, t) - u_{0k} - u_{1k}(x_1 - x_c)}{y_1 - y_c}, \end{cases}$$

где  $k$  - номер граничного треугольника,  $u_{0k}, u_{1k}, u_{2k}$  - значения коэффициентов до реконструкции,  $\widetilde{u}_{0k}, \widetilde{u}_{1k}, \widetilde{u}_{2k}$  - значения коэффициентов после реконструкции,  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  - координаты начала и конца граничного ребра треугольника,  $g(x_1, y_1, t), g(x_2, y_2, t)$  - значения на границе расчетной области.

### 5. Результаты расчетов

Тестирование предложенного метода производилось с помощью расчетов ряда двумерных модельных задач. В качестве задачи 1 рассматривалась задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, y, 0) &= \sin(\pi x)\sin(\pi y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u(0, y, t) &= 0, u(1, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0, t) &= 0, u(x, 1, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

точное решение которой  $u^T = e^{-2\pi^2 t} \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ . Расчет производился до значения  $T = 0.0001$  с числом  $K = \tau/h^2 = 4,48 \cdot 10^{-7}$ , где  $h$  - характеристический размер сетки.

В таблице 1 указано значение погрешности метода  $\sum_{i=1}^N (u_i - u^T)^2 S_i$ , где  $S_i$ - площадь  $i$ -го треугольника. В таблице представлены результаты работы предлагаемого алгоритма с использованием разрывного метода Галёркина с реконструкцией на граничных треугольниках (схема 1) и без реконструкции (схема 2) и результаты работы метода конечных объемов (FVM). В третьей и четвертой строках показан порядок сходимости метода по отношению к результату на предыдущей более грубой сетке.

Таблица 1. Значения погрешности  $\sum_{i=1}^N (u_i - u^T)^2 S_i$ , полученные при решении задачи 1.

		схема 1		схема 2		FVM	
$N=1964$	$h=0.091$	0.0000025821		0.0000033594		0.0000066337	
$N=7773$	$h=0.047$	0.0000006664	1.95	0.0000006357	2.40	0.0000035176	0.92
$N=31074$	$h=0.024$	0.0000001569	2.09	0.0000001507	2.08	0.0000016554	1.09

Решалась также начально-краевая задача для уравнения теплопроводности [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, y, 0) &= 1 + x + y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u(0, y, t) &= 1 + y, u(1, y, t) = 2 + y, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0, t) &= 1 + x, u(x, 1, t) = 2 + x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

где  $k = 1 + 0.3\sin(10\pi x)$ . Решение сравнивалось с решением  $u^H$ , полученным по чисто неявной разностной схеме с помощью метода расщепления [6] на структурированной сетке  $2001 \times 2001$  узлов. Расчет производился до значения  $T = 0.0001$  с числом  $K = \tau/h^2 = 4,48 \cdot 10^{-7}$ , где  $h$  - характеристический размер сетки. В таблице 2 указано значение погрешности метода  $\sum_{i=1}^N (u_i - u^T)^2 S_i$ , где  $S_i$ - площадь  $i$ -го треугольника.

В таблице представлены результаты работы предлагаемого алгоритма с использованием разрывного метода Галёркина с реконструкцией на граничных треугольниках (схема 1) и без реконструкции (схема 2) и результаты работы метода конечных объемов (FVM). В третьей и четвертой строках показан порядок сходимости метода по отношению к результату на предыдущей более грубой сетке.

Таблица 2. Значения погрешности  $\sum_{i=1}^N (u_i - u^T)^2 S_i$ , полученные при решении задачи 2.

	схема 1	схема 2		FVM		
$N=1964$ $h=0.091$	0.0000009262	0.0000011705		0.0000029433		
$N=7773$ $h=0.047$	0.0000004442	1.06	0.0000004358	1.43	0.0000017046	0.79
$N=31074$ $h=0.024$	0.0000001057	2.07	0.0000001042	2.09	0.0000006992	1.29

Как видно из результатов расчетов, предлагаемый метод обладает более высоким порядком точности по сравнению с методом конечных объемов, а также можно наблюдать сходимость метода при измельчении сетки. Можно заметить, что реконструкция решения на граничных треугольниках дает выгоду только на грубых сетках, на более подробных сетках лучший результат дает решение без реконструкции.

**Вывод.** Итак, создан новый эффективный алгоритм решения уравнений диффузионного типа на основе использования разрывного метода Галёркина. На примере модельных задач численно показано, что предложенный метод обладает сходимостью и хорошей точностью. Созданный метод позволяет существенно уменьшить объем арифметической работы на каждом временном слое по сравнению с использованием неявной схемы на подробной сетке.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Флетчер К., *Численные методы на основе метода Галеркина: Пер. с английского*, Мир, М., 1988, 352 с.
2. Bassi F., Rebay S., “A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier–Stokes Equations”, *J. Comput. Phys.*, **131** (1997), 267–279.
3. Cockburn B., Shu C. W., “Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems”, *J. Sci. Comp.*, **3** (2001), 173–261.
4. Li B. Q., *Discontinuous finite elements in fluid dynamics and heat transfer*, Springer, Berlin, 2006, 578 с.
5. Ладонкина М. Е., Милюкова О. Ю., Тишкин В. Ф., “Консервативные схемы для решения уравнений диффузионного типа на основе использования многосеточных методов”, *Труды Средневолжского математического общества*, **10:2** (2008), 21–44.
6. Киреев В. И., Пантелеев А. В., *Численные методы в примерах и задачах: Учеб. пособие*, 3-е изд. стер., Высш. шк., М., 2008, 480 с.

# Discontinuous finite-element Galerkin method for numerical solution of two-dimensional diffusion problems on unstructured grids

© V. F. Masyagin<sup>4</sup>, R. V. Zhalnin<sup>5</sup>, V. F. Tishkin<sup>6</sup>

**Abstract.** The new effective solution algorithm for parabolic equations on base of discontinuous Galerkin method is offered, which has convergence and accuracy when using the explicit scheme. Distinctive feature of the offered method is the use of the dual grid for finding a part of the parameters. The research method is exemplified by the initial-boundary problem for two-dimensional heat conduction equation. Calculations of two-dimensional modeling problems have shown a good accuracy of offered method.

**Key Words:** parabolic equations, discontinuous Galerkin methods, convergence and accuracy of the method.

---

<sup>4</sup> Postgraduate student of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; vmasyagin@gmail.com.

<sup>5</sup> Assistant Professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; zhalnin@gmail.com.

<sup>6</sup> Deputy Director of the Institute of applied mathematics by name M.V. Keldysh of RAS, Moscow; tishkin@imamod.ru.