УДК 517.9

Приближенное решение интегральных уравнений на нейронных сетях Хопфилда

© И. В. Бойков[1], О. А. Баулина[2]

Аннотация. Исследованы непрерывные методы решения операторных уравнений в банаховых пространствах. Даны приложения этих методов к решению линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма, сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений на нейронных сетях Хопфилда.

Ключевые слова: нейронная сеть Хопфилда, интегральные уравнения Фредгольма, гиперсингулярные интегральные уравнения.

1. Введение

Применение нейронных сетей Хопфилда для решения задач математической физики основано на возможности представления нейрона в виде электронной схемы, описываемой нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением. Согласно этому представлению i-ый нейрон, соединенный с N нейронами сети (включая самого себя), описывается уравнением

$$C_i \frac{u_i}{dt} = -\frac{u_i}{R_i} + \sum_{j=1}^{N} w_{ij} f(u_j) + I_i, i = 1, 2, \ldots, N, \tag{1.1}$$

где w_{ij} – синаптические веса нейронов сети; I_i – ток, представляющий внешнее смещение; u_i – индуцированное локальное поле на входе функции активации $f(u_i)$; $f(u_i)$ – нелинейные функции активации; R_i и C_i – сопротивление утечки и емкость утечки, соответственно.

В работе [1] J.J. Hopfied исследовал возможность применения вычислительных свойств биологических организмов к конструированию вычислительных машин. В основу архитектуры этих машин положено очень большое число взаимосвязанных и очень простых однотипных вычислительных узлов (названных нейронами).

В работе [2] J.J. Hopfied показал возможность реализации подобных компьютеров, получивших название нейронных сетей Хопфилда, используя простые цепи составленные из сопротивлений, емкостей и индуктивностей.

Опишем архитектуру нейронной сети Хопфилда, используемой в данной работе. Предлагаемая сеть, состоящая из n нейронов, показана на рис. 1.1.

В нейронную сеть входят нелинейные устройства, реализующие нелинейные функции $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Эти устройства обозначены на рис. 1 буквой П. В основу построения блока П может быть положена теорема о приближенной аппроксимации функций многих переменных суперпозициями функций одной переменной и операцией сложения [3].

[1] Заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет, г. Пенза; boikov@pnzgu.ru.

[2] Аспирант кафедры высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет, г. Пенза; golovolomka@list.ru.

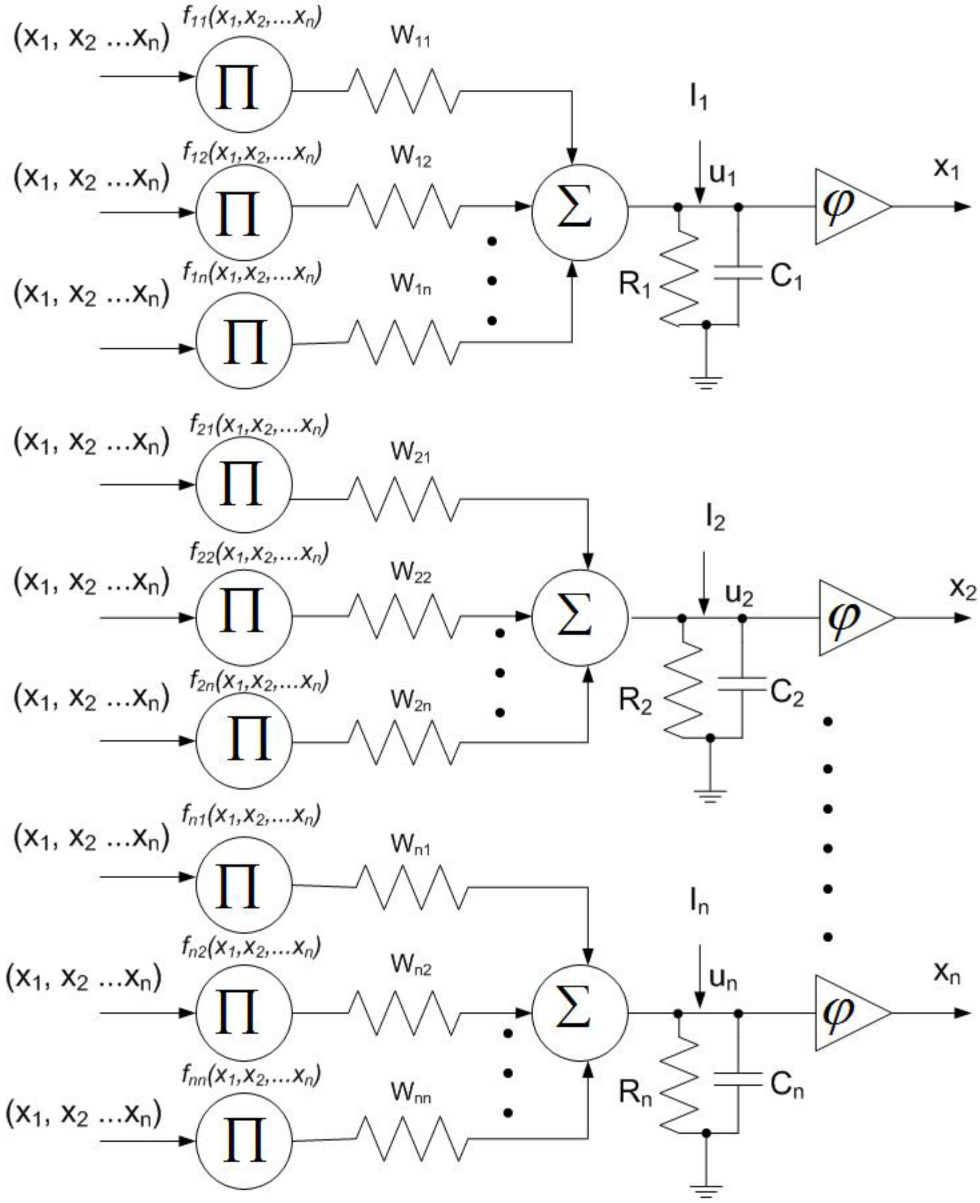

Рисунок **1.1**
Архитектура нейронной сети

Выходные сигналы $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, суммируются в сумматоре с коэффициентами w_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, и после прохождения RC цепочки подаются на вход устройства активации, реализующего функцию $x = \varphi(u)$.

В данной архитектуре используется функция $\varphi(u) = au$. Таким образом, представленная на рис. 1.1 нейронная сеть Хопфилда реализует систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{C_i}{a}\frac{dx_i(t)}{dt} + \frac{x_i(t)}{aR_i} = \sum_{j=1}^{m} w_{ij} f_{ij}(x_1, \ldots, x_n) + I_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Отметим, что в качестве сопротивлений R_i могут браться достаточно большие значения, а также I_i могут полагаться равными нулю. В результате нейронные сети Хопфилда могут моделировать системы уравнений вида

$$\frac{C_i}{a}\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{m} w_{ij} f_{ij}(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

В известных авторам работах численные методы решения задач математической физики на ИНС (искусственных нейронных сетях) основаны на методах минимизации функционалов. В данной работе в основу построения алгоритмов положены методы теории устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ниже используются следующие обозначения $R(a,r) = \{z \in B : \|z-a\| \le r\}$, $S(a,r) = \{z \in B : \|z-a\| = r\}$, $\Lambda(K) = \lim_{h\downarrow 0}(\|I+hK\|-1)h^{-1}$. Здесь $B-$ банахово пространство, $a \in B, K-$ линейный оператор, действующий из B в B, $\Lambda(K)-$ логарифмическая норма [4] оператора K; $I-$ тождественный оператор.

Для наиболее употребительных норм логарифмическая норма известна.

Пусть дана вещественная матрица $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. В n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с нормой

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,\ \|x\|_2 = [\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2]^{1/2},\ \|x\|_3 = \max_{1\le k\le n} |x_k|,$$

логарифмическая норма матрицы A равна [5]:

$$\Lambda_1(A) = \max_j (a_{jj} + \sum_{i\ne j} |a_{ij}|),\ \Lambda_2(A) = \lambda_{\max}\left(\frac{A+A^T}{2}\right),\ \Lambda_3(A) = \max_i (a_{ii} + \sum_{j\ne i} |a_{ij}|).$$

2. Непрерывные методы решения операторных уравнений

Приближенным методам решения нелинейных операторных уравнений посвящена обширная литература, подробная библиография которой содержится в книгах [6], [7]. При этом, в основном, рассматривались дискретные методы, среди которых в первую очередь следует отметить методы простой итерации и Ньютона–Канторовича. Исследование непрерывных аналогов метода Ньютона–Канторович началось, по–видимому, со статьи [8]. Позднее непрерывные аналоги метода Ньютона–Канторовича широко применялись при решении многочисленных задач физики [9], [10]. В работах [9], [10] приведена обширная библиография посвященная непрерывным аналогам метода Ньютона–Канторовича.

В этом разделе приведем несколько утверждений о непрерывных методах решения операторных уравнений, которые ниже будут использованы при обосновании вычислительных методов.

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$A(x) = 0, \tag{2.1}$$

действующее из банахова пространства B в B. Здесь $A(x)-$ нелинейный оператор.

Рассмотрим в банаховом пространстве B задачу Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x(t)), \tag{2.2}$$

$$x(0) = x_0. \tag{2.3}$$

Будем считать, что оператор A имеет непрерывную производную Гато; $A(0) = 0$.

Т е о р е м а 2.1. [11], [12]. *Пусть на любой дифференцируемой кривой* $\varphi(t)$, *расположенной в шаре* $B(0,r)$ *достаточно малого радиуса* r, *интеграл* $\int\limits_0^t \Lambda(A'(\varphi(\tau))d\tau$ *не положителен (отрицателен и* $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Lambda(A'(\varphi(\tau))d\tau=-\alpha, \qquad \alpha>0.$*) Тогда тривиальное решение уравнения* (2.2) *устойчиво (асимптотически устойчиво).*

З а м е ч а н и е 2.1. *Теорема справедлива и при* $r=\infty$.

Из теоремы 2.1. следует, что если для любой дифференцируемой функции $g(t)$, определенной в банаховом пространстве B выполняется неравенство

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Lambda(A'(g(\tau)))d\tau\le-\alpha,\quad \alpha>0, \tag{2.4}$$

то задача Коши (2.2)–(2.3) сходится к решению x^* уравнения (2.1).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.2. [13]. *Пусть уравнение* (2.1) *имеет решение* x^*. *Пусть на любой дифференцируемой кривой* $g(t)$, *расположенной в банаховом пространстве* B, *справедливо неравенство* (2.4). *Тогда решение задачи Коши* (2.2)–(2.3) *сходится к решению* x^* *уравнения* (2.1) *при любом начальном приближении.*

З а м е ч а н и е 2.2. *Из неравенства* (2.4) *следует, что логарифмическая норма* $\Lambda(A'(x))$ *может обращаться в нуль или принимать положительные значения в конечном или счетном числе точек пространства* B.

Т е о р е м а 2.3. [13]. *Пусть уравнение* (2.1) *имеет решение* x^*. *Пусть на любой дифференцируемой кривой* $g(t)$, *расположенной в шаре* $B(x^*,r)$ *выполняются следующие условия:*

1) при любом $t(t>0)$ *выполняется неравенство* $\int\limits_0^t \Lambda(A'(g(\tau)))d\tau\le 0;$

2) справедливо равенство $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Lambda(A'(g(\tau)))d\tau=-\alpha,\alpha>0.$

Тогда решение задачи Коши (2.2)–(2.3) *сходится к решению* x^* *уравнения* (2.1).

3. Приближенное решение интегральных уравнений Фредгольма на нейронных сетях Хопфилда

Решение интегральных уравнений Фредгольма на нейронных сетях Хопфилда изложим на примере одномерного интегрального уравнения

$$x(t)=\int\limits_0^1 h(t,\tau,x(\tau))d\tau+f(t) \tag{3.1}$$

с непрерывным ядром и непрерывной правой частью.

Предположим, что уравнение (3.1) имеет решение $x^*(t)$ в шаре $B(x^*, r)$ пространства $\mathbb{C}[0,1]$.

Приближенное решение $x_N(t)$ уравнения (3.1) определяется из системы уравнений

$$x_N(t_{kN}) = \sum_{l=1}^{N} \alpha_{lN} h(t_{kN}, t_{lN}, x_N(t_{lN})) + f(t_{kN}), \quad k = 1, 2, \dots, N, \tag{3.2}$$

где α_{lN} и t_{lN}, $l = 1, 2, \dots, N$, коэффициенты и узлы квадратурной формулы

$$\int_0^1 g(t)dt = \sum_{l=1}^{N} \alpha_{lN} g(t_{lN}) + R_N(g),$$

в которой коэффициенты $\alpha_{lN} > 0$ $(l = 1, 2, \dots, N)$, узлы t_{lN} $(l = 1, 2, \dots, N)$ лежат в сегменте [0,1].

Условия разрешимости системы (3.2) и сходимости приближенных решений $x_N^*(t)$ системы уравнений (3.2) к точному решению $x^*(t)$ уравнения (3.1) в узлах $t_{lN}, l = 1, 2, \dots, N$, приведены в [7] (теорема 19.5 из главы 4).

Наложим на функцию $h(t, \tau, u)$ следующее условие: во всякой внутренней точке области $B(x^*, r)$ пространства $C[0,1]$ существует производная $h'_3(t_{kN}, t_{lN}, u), k.l = 1, 2, \dots, N$. Здесь $h'_3(t, \tau, u)$ означает производную по третьей переменной.

Введем матрицу $C(u) = \{c_{ij}(u)\}, i, j = 1, 2, \dots, N$, где $c_{ii}(u) = 1 - \alpha_{iN} h'_3(t_{iN}, t_{iN}, u)$, $i = 1, 2, \dots, N$; $c_{ij}(u) = -\alpha_{iN} h'_3(t_{iN}, t_{jN}, u), i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j$.

Из теоремы 2.3. следует, что если $\Lambda(C(u)) < 0$ при $u \in B(x^*, r)$, то решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_{kN}(t)}{dt} = z_{kN}(t) - \sum_{l=1}^{N} \alpha_{lN} h(t_{kN}, t_{lN}, z_{lN}(t)) - f(t_{kN}), \quad k = 1, 2, \dots, N, \tag{3.3}$$

сходится к решению $x^*(t)$ системы уравнений (3.2) в узлах $t_{kN}, k = 1, 2, \dots, N$.

Замечание 3.1. *Условие $\Lambda(C(u)) < 0$ носит достаточный характер и, как показывают модельные примеры, решение системы* (3.3) *при $t \to \infty$ сходится к $x^*(t)$ при более широких условиях.*

Непрерывный метод решения нелинейных уравнений имеет следующие преимущества относительно стандартного метода Ньютона-Канторовича:
1) не требуется существования обратного оператора для производной Фреше нелинейного оператора $K_N x_N$, где $K_N x_N-$ операторная форма записи левой части системы уравнений $x_N(t_{kN}) - \sum\limits_{l=1}^{N} \alpha_{lN} h(t_{kN}, t_{lN}, x_N(t_{lN})) = f_N(t_{kN})$, $k = 1, 2, \dots, N$,
2) в случае выполнения неравенства $\int\limits_0^t \Lambda(C(g(\tau))d\tau < 0$ на любой дифференцируемой функции $g(t)$, сходимость метода не зависит от начальных условий.

Непрерывный метод особенно эффективен в случае уравнений первого рода, которые, как известно, являются некорректными задачами, и их решение требует применение методов регуляризации.

4. Приближенное решение линейных гиперсингулярных интегральных уравнений на нейронных сетях Хопфилда

Рассмотрим одномерное линейное гиперсингулярное интегральное уравнение

$$Kx \equiv a(t)x(t) + b(t)\int\limits_{-1}^{1} \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t)^p} + \int\limits_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad p = 2, 4, \dots . \tag{4.1}$$

На коэффициенты и правую часть уравнения (4.1) наложим следующие условия:
1) функция $b(t) \neq 0$ на сегменте $[-1, 1]$;
2) функции $a(t),\ b(t),\ f(t) \in W^r(1),\ h(t,\tau) \in W^{r,r}(1),\ r \geq p.$
3) уравнение (4.1) однозначно разрешимо и его решение $x^*(t) \in W^r(M),\ M = \text{const}.$

Введем узлы $t_k = -1 + 2k/N,\ k = 0, 1, \dots, N,$ и $\bar{t}_k = t_k + k/N,\ k = 0, 1, \dots, N-1.$ Обозначим через Δ_k сегменты $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}],\ k = 0, 1, \dots, N-1.$

Приближенное решение уравнения (4.1) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \psi_k(t), \tag{4.2}$$

где

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_k \\ 0, & t \notin \Delta_k. \end{cases} \tag{4.3}$$

Значения $\{\alpha_k\},\ k = 0, 1, \dots, N-1,$ определяются из системы уравнений

$$a(\bar{t}_k)\alpha_k + b(\bar{t}_k)\sum_{l=0}^{N-1}{}' \alpha_l \int\limits_{\Delta_l} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_k)^p} + \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l \int\limits_{\Delta_l} h(\bar{t}_k, \tau)d\tau = f(\bar{t}_k), \tag{4.4}$$

$k = 0, 1, \dots, N-1.$ Здесь $\sum'$ означает суммирование по $l \neq k-v, k-v+1, \dots, k-1, k+1, \dots, k+v-1,$ где величина $v (v \geq 1)$ зависит от абсолютной величины коэффициентов $a(t),\ b(t)$ и от значений N. Способ выбора v описан в работе [14] и следует из неравенств (4.5), (4.6).

Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 4.1. [14]. *Пусть выполнены следующие условия: 1) уравнение* (4.1) *имеет единственное непрерывно-дифференцируемое до $p-1$ порядка решение $x^*(t)$; 2) справедливо неравенство $|b(t)| \geq b > 0$ при $t \in (-1, 1)$. 3) функция $h(t,\tau)$ удовлетворяет условию Липшица по второй переменной. Тогда при достаточно больших N система уравнений* (4.4) *имеет единственное решение $x_N^*(t)$ и в метрике пространства R_N справедлива оценка $\|x^* - x_N^*\| \asymp N^{-1}$.*

З а м е ч а н и е 4.1. *При достаточно малых значениях N для однозначной разрешимости системы уравнений* (4.4) *достаточно выполнение следующих условий:*
при $k \neq 0$ и $k \neq N-1$

$$|b(\bar{t}_k)|\frac{2}{p-1}N^{p-1} - |a(\bar{t}_k)|\frac{2}{N}H^* > |b(\bar{t}_k)|\frac{N^{p-1}}{p-1}\left\{\left|\frac{1}{(2v+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2N-2k-1)^{p-1}}\right| + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{1}{(2v+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2k+1)^{p-1}}\right|\right\} + 2H^*; \tag{4.5}$$

при $k = 0$ *или* $k = N-1$

$$|b(\bar{t}_k)|\frac{2}{p-1}N^{p-1} - |a(\bar{t}_k)|\frac{2}{N}H^* > |b(\bar{t}_k)|\frac{2N^{p-1}}{p-1}\left|\frac{1}{(2v+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2N+1)^{p-1}}\right| + 2H^*. \quad (4.6)$$

Этот результат переносится на гиперсингулярные интегральные уравнения следующего вида

$$a(t)x(t) + b(t)\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{|\tau - t|^{p+\lambda}} + \int_{-1}^{1}h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad p = 1, 2, \ldots \quad (4.7)$$

Приближенное решение уравнения (4.7) будем искать в виде кусочно-постоянной функции (4.2), значения $\{\alpha_k\}$ которой определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$a(\bar{t}_k)\alpha_k + \sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l\int_{\Delta_l}\frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_k|^{p+\lambda}} + \sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l\int_{\Delta_l}h(\bar{t}_k,\tau)d\tau = f(\bar{t}_k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \quad (4.8)$$

В работе [14] показано, что при достаточно больших N и при выполнении условия

$$\frac{2}{p+\lambda-1} > \max_t|a(t)| + \frac{2}{N}H^* \quad (4.9)$$

система уравнений (4.5) однозначно разрешима. Здесь $H^* = \max\limits_{-1\le t,\tau\le 1}|h(t,\tau)|$.

При выполнении условий теоремы 4.1. система уравнений (4.4) может быть решена на нейронных сетях Хопфилда.

Для этого систему (4.4) следует представить в эквивалентном виде

$$(\mathrm{sgnb}(\bar{\mathrm{t}}_\mathrm{k}))\left[\mathrm{a}(\bar{\mathrm{t}}_\mathrm{k})\alpha_\mathrm{k} + \mathrm{b}(\bar{\mathrm{t}}_\mathrm{k}){\sum_{\mathrm{l}=0}^{\mathrm{N}-1}}'\alpha_\mathrm{l}\int_{\Delta_\mathrm{l}}\frac{\mathrm{d}\tau}{(\tau - \bar{\mathrm{t}}_\mathrm{k})^\mathrm{p}} + \sum_{\mathrm{l}=0}^{\mathrm{N}-1}\alpha_\mathrm{k}\int_{\Delta_\mathrm{l}}\mathrm{h}(\bar{\mathrm{t}}_\mathrm{k},\tau)\mathrm{d}\tau - \mathrm{f}(\bar{\mathrm{t}}_\mathrm{k})\right] = 0, \quad (4.10)$$

$k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Из утверждений, приведенных в разделе 2 и из замечания к теореме 4.1. следует, что решение системы уравнений

$$\frac{d\alpha_k(t)}{dt} = (\mathrm{sgnb}(\bar{\mathrm{t}}_\mathrm{k}))\left[\mathrm{a}(\bar{\mathrm{t}}_\mathrm{k})\alpha_\mathrm{k}(\mathrm{t}) + \mathrm{b}(\bar{\mathrm{t}}_\mathrm{k}){\sum_{\mathrm{l}=0}^{\mathrm{N}-1}}'\alpha_\mathrm{l}\int_{\Delta_\mathrm{l}}\frac{\mathrm{d}\tau}{(\tau - \bar{\mathrm{t}}_\mathrm{k})^\mathrm{p}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=0}^{N-1}\alpha_k(t)\int_{\Delta_l}h(\bar{t}_k,\tau)d\tau - f(\bar{t}_k)\right], \quad (4.11)$$

$k = 0, 1, \ldots, N-1$, при $t \to \infty$ сходится к решению системы уравнений (4.10) при любом начальном приближении.

В самом деле, запишем систему уравнений (4.11) в виде матричного уравнения

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = A\alpha(t) + F$$

с очевидными обозначениями A и F.

Нетрудно видеть, что при выполнении неравенств (4.5) и (4.6) логарифмическая норма матрицы A отрицательна и, следовательно, в силу утверждений раздела 2, решение системы дифференциальных уравнений (4.11) сходится к решению системы уравнений (4.4).

5. Приближенное решение нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений на нейронных сетях Хопфилда

В этом разделе исследуются приближенные методы решения нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений

$$a(t,x(t))+\int\limits_{-1}^{1}\frac{h(t,\tau,x(\tau))d\tau}{(\tau-t)^p}=f(t), \tag{5.1}$$

где $p-$ целое четное число.

Рассмотрим уравнение (5.1) при $p=2$. Приближенное решение уравнения (5.1) будем искать в виде кусочно-постоянной функции (4.2), коэффициенты которой определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$a(\bar{t}_k,\alpha_k)+\sum_{l=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta_l}\frac{h(\bar{t}_k,\bar{t}_l,\alpha_l)}{(\tau-\bar{t}_k)^2}d\tau=f(\bar{t}_k),\quad k=0,1,\ldots,N-1, \tag{5.2}$$

где $\bar{t}_k=-1+(2k+1)/N, k=0,1,\ldots,N-1.$

Запишем уравнение (5.2) в операторной форме

$$K_Nx_N=F_N,$$

где $x_N=(\alpha_0,\ldots,\alpha_{N-1})^T,\ \ F_N=(f(\bar{t}_0),\ldots,f(\bar{t}_{N-1}))^T,\ \ K_N-N\times N$ матрица.

Производная Фреше матрицы K_N на элементе $x_N^0=(\alpha_0,\ldots,\alpha_{N-1})^T$ имеет вид $K'_N(x_N^0)=\{k_{ij}(x_N^0)\},\ \ i,j=0,1,\ldots,N-1,$ где

$$k_{ii}(x_N^0)=a'_2(\bar{t}_i,\alpha_i^0)+h'_3(\bar{t}_i,\bar{t}_i,\alpha_i^0)\int\limits_{\Delta_i}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_i)^2},\quad i=0,1,\ldots,N-1;$$

$$k_{ij}(x_N^0)=h'_3(\bar{t}_i,\bar{t}_j,\alpha_i^0)\int\limits_{\Delta_j}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_i)^2},\quad i,j=0,1,\ldots,N-1,\ \ i\neq j.$$

Здесь $a'_2(t,u)$ означает производную функции $a(t,u)$ по второй переменной; $h'_3(t,\tau,u)$ означает производную функции $h(t,\tau,u)$ по третьей переменной.

Будем считать, что уравнение (5.1) имеет решение x^* в шаре $B(x^*,R)$ пространства R_N и что для любой дифференцируемой кривой $g(t)\in B(x^*,R)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_0^t\Lambda(K'_N(g(\tau)))d\tau<0.$$

Тогда решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\alpha_k(t)}{dt} = a(\bar{t}_k, \alpha_k(t)) + \sum_{l=0}^{N-1} \int\limits_{\Delta_l} \frac{h(\bar{t}_k, \bar{t}_l, \alpha_l(\tau))}{(\tau - \bar{t}_k)^2} d\tau - f(\bar{t}_k), \tag{5.3}$$

$k = 0, 1, \ldots, N-1,$ сходится к решению $x_N^* = (\alpha_0^*, \ldots, \alpha_{N-1}^*)$ системы уравнений (5.2).

Замечание 5.1. *Аналогичным образом строятся вычислительные схемы решения нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений на нейронных сетях Хопфилда при* $p = 4, 6, \ldots$.

Замечание 5.2. *В случае нечетных* p *в основу построения вычислительных схем следует положить алгоритмы, предложенные и обоснованные в работе* [15].

Замечание 5.3. *Эффективность предложенного метода решения линейных и нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений иллюстрируется на примере уравнений*

$$a(t)x(t) + b(t) \int\limits_{-1}^{1} \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} = f(t), \tag{5.4}$$

$$a(t)x(t) + b(t) \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} = f(t), \tag{5.5}$$

Решениями уравнений (5.4) и (5.5) являются соответственно предельные точки решений систем дифференциальных уравнений (4.11) и (5.3) при $t \to \infty$. Системы (4.11) и (5.3) решались методом Эйлера с шагом h. Результаты численного экспееремента представлены на рис. 5.1. Здесь через N обозначен порядок систем (4.11) и (5.3).

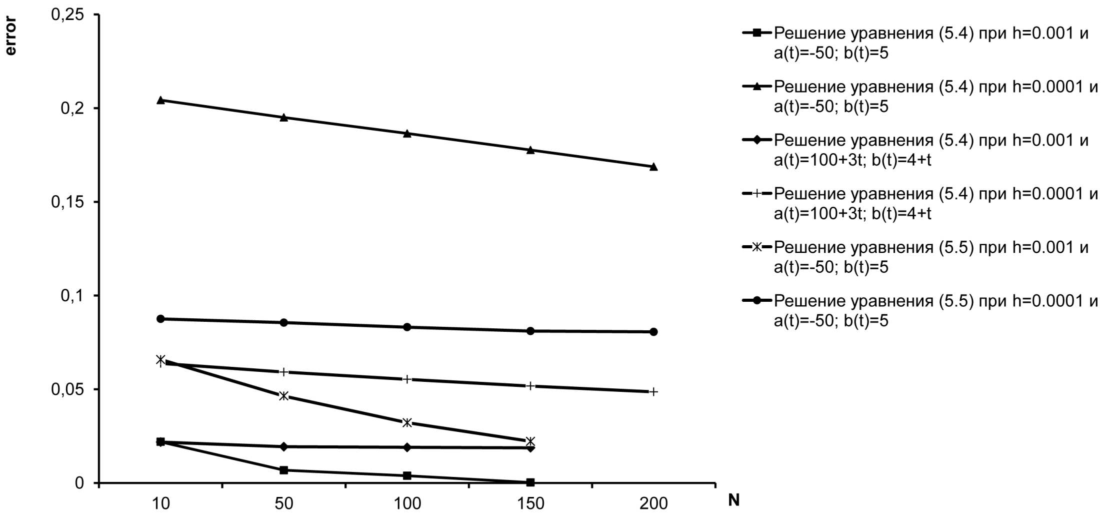

Рисунок **5.1**

Список литературы

1. Hopfield И. В., "Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **79** (April 1982), 2554 - 2558.

2. Hopfield J. J., "Neurons with Graded Response have Collective Computational Properties like those of Two-State Neurons", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **81** (May 1984), 3088 - 3092.

3. Горбань А. Н., Дунин-Барковский В. Л., Кирин А. Н. и др., *Нейроинформатика*, Наука. Сибирское предприятие РАН, Новосибирск, 1998, 296 с.

4. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970, 536 с.

5. Деккер К., Вербер Я., *Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1998, 334 с.

6. Канторович Л. В., Акилов Г. П., *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977, 750 с.

7. Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др., *Приближенное решение операторных уравнений*, Наука, М., 1969, 456 с.

8. Гаврурин М. К., "Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов", *"Изв. вузов. Математика"*, 1958, № 5, 18 - 31.

9. Жидков Е. Н., Макаренко Г. И., Пузынин М. В., "Непрерывный аналог метода Ньютона в нелинейных задачах физики", *Физика элементарных частиц и атомного ядра*, 1973, т.4, N 1, 127 - 166.

10. Пузынина Т. П., *Модифицированные ньютоновские схемы для численного исследования квантово-полевых моделей*, Автореферат дисс. на соискание ученой степени д.ф.-м.н., Тверской государственный университет, Тверь, 2003, 37 с.

11. Бойков И. В., "Об устойчивости решений дифференциальных и разностных уравнений", *ДАН СССР*, 1990, № 6, т. 314, 1298 - 1300.

12. Бойков И. В., *Устойчивость решений дифференциальных уравнений*, Издательство Пензенского государственного университета, Пенза, 2008, 244 с.

13. Бойков И. В., "Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений", *Дифференциальные уравнения*, 2012, № 9, Т. 48, 1308 - 1314.

14. Boykov I. V., Ventsel E. S., Boykova A. I., "An approximate solution of hypersingular integral equations", *Applied Numerical Mathematics 60*, **6** (2010), 607 - 628.

15. Бойков И. В., Бойкова А. И., "Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений с целыми сингулярностями нечетного порядка", *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика.*, 2010, № 3, 15 - 27.

Approximate solution of integral equations on the Hopfield neural networks

© I. V. Boykov[3], O. A. Baulina[4]

Abstract. Continuous methods for solving operator equations in Banach spaces are envestigated. Applications of these methods to the solution of linear and non-linear Fredholm integral equations, singular and hypersingular integral equations on Hopfield neural networks are given.

Key Words: Hopfield neural network, integral Fredholm equations, hypersingular integral equations.

[3] Head of Higher and Applied Mathematics Chair,Penza State University, Penza; boikov@pnzgu.ru.

[4] Post-graduate student of Higher and Applied Mathematics Chair, Penza State University, Penza; golovolomka@list.ru