УДК 517.938

Разрушение соленоидов Смейла-Вильямса

© С. В. Гонченко[1], Е. В. Жужома[2], Н.В. Исаенкова[3]

Аннотация. В статье приводится семейство диффеоморфизмов $f_\nu : S^3 \to S^3$, $-1 \le \nu \le 1$, гладко зависящих от параметра ν, таких, что 1) при любом $-1 \le \nu < 0$ неблуждающее множество диффеоморфизма f_ν состоит из одномерного растягивающегося аттрактора и одномерного сжимающегося репеллера, являющихся соленоидом Смейла-Вильямса; 2) диффеоморфизм f_0 имеет неблуждающее множество, состоящее из двух нуль-мерных транзитивных инвариантных множеств Λ_1 и Λ_2 таких, что каждое их этих множеств локально гомеоморфно произведению канторовых множеств, и ограничение $f_0|_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}$ является частично гиперболическим диффеоморфизмом; 3) при любом $0 < \nu \le 1$ неблуждающее множество диффеоморфизма f_ν состоит из из двух гиперболических нуль-мерных транзитивных инвариантных множеств, локально гомеоморфных произведению двух канторовых множеств.

Ключевые слова: Аттрактор, репеллер, соленоид Смейла-Вильямса

В последнее время появилось большое количество математических моделей, имеющих прикладное значение, в которых появляется соленоид Смейла-Вильямса. Например, при изучении движения кельтского камня [1] и в моделях связанных с нейронными сетями [6]. Серия генераторов стохастических колебаний с гиперболическими растягивающимися аттракторами соленоидального типа построена С.П.Кузнецовым и его соратниками [4], [5]. Такие генераторы играют большую роль в некоторых вариантах скрытой передачи информации (о возможности применения гиперболических шумов при передачи сообщений см. [3], [12]). Указанные модели описываются системами дифференциальных уравнений, фазовые пространства которых содержат (динамическую) надстройку над отображением последования Пуанкаре, переводящего полноторий в себя так, что его образ прокручивается вдоль оси полнотория не менее двух раз. Классическим примером такого отображения является отображение Смейла с равномерным сжатием в направлении, перпендикулярном оси полнотория, и равномерным растяжением вдоль оси полнотория [11]. Отображение Смейла имеет соленоидальный равномерно гиперболический аттрактор, который локально гомеоморфен произведению канторова множества на отрезок (в силу этого свойства, аттрактор Смейла относят в список странных аттракторов) [13]. Анализ некоторых работ, в частности, работы [5], показывает, что отображение вдоль оси полнотория не обязательно является равномерно растягивающим. Поэтому возникла необходимость исследовать более общий класс отображений полнотория в себя. В [2] был рассмотрен класс отображений (названных отображениями Смейла-Виеториса), которые отличались от преобразования Смейла ослаблением условия равномерного растяжения на отображение вдоль оси полнотория: требовалось только чтобы оно было неособым эндоморфизмом. В предположении, что неблуждающее множество имеет гиперболическую структуру было показано, что кроме соленоидального аттрактора Смейла неблуждающее множество может представлять собой совокупность конечного набора изолированных периодических орбит и нетривиального нульмерного базисного множества. Возникает естественный вопрос о возможности плавного перехода (бифуркации) от одного случая к другому. Бифуркации такого вида

[1] Заведующий отделом дифференциальных уравнений НИИ ПМК при ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород;

[2] Профессор кафедры математического анализа, теории и методики обучения, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru.

[3] Старший преподаватель кафедры математического анализа, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; nisaenkova@mail.ru.

можно интерпретировать как бифуркации разрушения (или возникновения) инвариантных множеств (в частности, аттракторов или репеллеров) соленоидального типа.

Согласно [1], в фазовом пространстве системы, описывающей движение кельтского камня, при некоторых параметрах имеются области со странным аттрактором и странным репеллером соленоидального типа, а при других параметрах имеются так называемые области Карапетяна с изолированными периодическими орбитами. Предполагаемые бифуркации можно рассматривать как возможные сценарии перехода от одного типа движения кельтского камня к другому. Кроме этого, система, описывающая движение кельтского камня, инвариантна относительно обращения времени [1]. Поэтому возникает задача найти в пространстве отображений пути, которые отвечают соответствующим бифуркациям и которые были бы инвариантны относительно перехода к обратным отображениям. Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Существует семейство диффеоморфизмов* $f_\nu : S^3 \to S^3$, $-1 \le \nu \le 1$, ***гладко*** *зависящих от параметра* ν, *таких, что*

- *при любом* $-1 \le \nu < 0$ *неблуждающее множество диффеоморфизма* f_ν *состоит из одномерного растягивающегося аттрактора и одномерного сжимающегося репеллера, являющихся соленоидом Смейла-Вильямса;*
- *диффеоморфизм* f_0 *имеет неблуждающее множество, состоящее из двух нульмерных транзитивных инвариантных множеств* Λ_1 *и* Λ_2 *таких, что каждое их этих множеств локально гомеоморфно произведению канторовых множеств, и ограничение* $f_0|_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}$ *является частично гиперболическим диффеоморфизмом;*
- *при любом* $0 < \nu \le 1$ *неблуждающее множество диффеоморфизма* f_ν *состоит из из двух гиперболических нуль-мерных транзитивных инвариантных множеств, локально гомеоморфных произведению двух канторовых множеств.*

Более того, аналогичные утверждения имеют место для семейства обратных диффеоморфизмов $f_\nu^{-1} : S^3 \to S^3$, $-1 \le \nu \le 1$.

Ее доказательство основано на следующей теореме, которая относится к бифуркациям эндоморфизмов окружности S^1 и которая имеет самостоятельный интерес.

Теорема 1.2. *Существует семейство гладких неособых* d*-эндоморфизмов* $g_\nu : S^1 \to S^1$, $-1 \le \nu \le 1$, ***гладко*** *зависящих от параметра* ν, *где* $d \ge 2$, *таких, что*

- *при любом* $-1 \le \nu < 0$ *эндоморфизм* g_ν *гиперболический (структурно устойчивый) и неблуждающее множество эндоморфизма* g_ν *состоит из канторова транзитивного множества и изолированной притягивающей неподвижной точки;*
- *неблуждающее множество эндоморфизма* g_0 *канторово, и в нем содержится негиперболическая неподвижная точка;*
- *при любом* $0 < \nu \le 1$ *эндоморфизм* g_ν *гиперболический (структурно устойчивый) транзитивный и сопряжен линейному растягивающему* d*-эндоморфизму.*

Если предположить, что теорема 1.2. верна, то основная теорема 1.1. вытекает из нее и техники, развитой в работах [2], [7], [8]. Поэтому мы перейдем к доказательству теоремы 1.2..

Пусть $S^1 = [0;1]/(0 \sim 1)$ – единичная окружность, наделенная естественной параметризацией, которая индуцируется проекцией $[0;1] \to S^1$. Сюрьективное C^1 отображение $g : S^1 \to S^1$ называется *эндоморфизмом*. Эндоморфизм g называется *неособым*, если его производная $Dg \neq 0$. Мы для определенности будем рассматривать сохраняющие ориентацию неособые эндоморфизмы с положительной Dg. Зафиксируем $d \in \mathbb{N}$. Неособый эндоморфизм является иммерсией, принадлежащей классу d-накрытий (т.е., отображений окружности в себя степени d, которые являются локальными гомеоморфизмами) [9]. Для краткости эндоморфизм степени d мы будем называть d-эндоморфизмом. Нас будет интересовать случай $d \geq 2$ (при $d = 1$ неособый d-эндоморфизм является диффеоморфизмом). Классическим примером неособого d-эндоморфизма является линейный эндоморфизм $E_d(x) = dx \; mod \, 1$, который является растягивающим [10]. Известно, что неблуждающее множество такого эндоморфизма совпадает с окружностью.

Пусть $U_\delta(x)$ – стандартная бамп-функция, равная единице на промежутке $[-\frac{\delta}{2}; +\frac{\delta}{2}] \subset [-\frac{1}{8}; +\frac{1}{8}]$ с носителем на промежутке $[-\delta; +\delta]$. Более точно,

- $U_\delta(x) = 1$ при всех $x \in \left[-\frac{\delta}{2}; +\frac{\delta}{2}\right]$, $0 < \delta \leq \frac{1}{4}$;
- $U_\delta(x) = 0$ при всех $|x| \geq \delta$;
- $U'_\delta(x) \geq 0$ при всех $x \in \left[-\delta; -\frac{\delta}{2}\right]$, и $U'_\delta(x) \leq 0$ при всех $x \in \left[\frac{\delta}{2}; \delta\right]$.

Далее для определенности считаем $\delta = \frac{1}{8}$ и обозначим U_δ через U. Дополнительно к ранее приведенным свойствам функции U потребуем, чтобы она удовлетворяла следующим требованиям:

- $|U'(x)| \leq 1$ при всех $\frac{3}{48} \leq |x| \leq \frac{4}{48}$, $\frac{5}{48} \leq |x| \leq \frac{6}{48}$;
- $\frac{1}{2} \leq |U'(x)| \leq 48$ и $|U'(x)| \geq \frac{1}{3}$ при всех $\frac{4}{48} \leq |x| \leq \frac{5}{48}$.

Рассмотрим семейство преобразований окружности вида

$$g_\mu(x) = (x^3 + \alpha x + \mu)U(x) + [1 - U(x)]\, dx \;\; mod \; 1. \tag{1.1}$$

Область изменения параметра μ и постоянную $0 < \alpha < 1$ мы уточним ниже. Производная имеет вид

$$g'_\mu(x) = (3x^2 + \alpha)U(x) + [1 - U(x)]\, d + (x^3 + \alpha x + \mu)U'(x) - dU'(x)x \;\; mod \; 1. \tag{1.2}$$

На промежутке $\left[-\frac{1}{16}; \frac{1}{16}\right]$ при $\mu = 0$ имеем равенства $g_0(x) = x^3 + \alpha x$, $g'_0(x) = 3x^2 + \alpha$. Если

$$\sqrt{1 - \alpha} \leq \frac{1}{16}, \tag{1.3}$$

то g_0 на указанном промежутке имеет три неподвижные точки

$$x_- = -\sqrt{1 - \alpha}, \; x_0 = 0, \; x_+ = \sqrt{1 - \alpha}, \text{ причем } g'_0(x_\pm) = 3 - 2\alpha > 1, \; g'_0(0) = \alpha < 1. \tag{1.4}$$

Система

$$\begin{cases} g_\mu(x) &= x \\ g'_\mu(x) &= 1 \end{cases}$$

имеет решения

$$\mu_{crit} = -2\left(\frac{1 - \alpha}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \pm x_{crit} = \pm\sqrt{\frac{1 - \alpha}{3}}. \tag{1.5}$$

Покажем теперь, что для некоторого $\varepsilon_1 > 0$ отображение (1.1) является неособым d-эндоморфизмом окружности при $\mu \in [-\varepsilon_1 + \mu_{crit}; 0]$. Действительно, для доказательства неравенства $g'_\mu(x) > 0$ представим производную (1.2) в виде

$$g'_\mu(x) = (3x^2 + \alpha)U(x) + [1 - U(x)]\, d + (x^2 + \alpha - d)xU'(x) + \mu U'(x) \ \ mod\ 1. \tag{1.6}$$

Поскольку вне отрезка $[-\frac{1}{8}; +\frac{1}{8}]$ производная $g'_\mu = d \geq 2$, то достаточно рассмотреть производную на $[-\frac{1}{8}; +\frac{1}{8}]$. На отрезке $\left[-\frac{1}{16}; \frac{1}{16}\right]$ имеем $g'_\mu(x) = 3x^2 + \alpha \geq \alpha > 0$. Осталось рассмотреть $g'_\mu(x)$ при $\frac{1}{16} \leq |x| \leq \frac{1}{8}$. Далее будем учитывать неравенство $xU'(x) \leq 0$, которое следует из свойств бамп-функции. Так как $d \geq 2$ и $0 < \alpha < 1$, то $x^2 + \alpha - d \leq 1 + \alpha - d \leq 0$. Поэтому $(x^2 + \alpha - d)xU'(x) \geq 0$. Отсюда и (1.6) при $\frac{5}{48} \leq |x| \leq \frac{1}{8}$ получаем

$$g'_\mu(x) \geq (3x^2 + \alpha)U(x) - |\mu U'(x)| \geq \frac{25}{12} \cdot \frac{1}{64} + \alpha - |\mu U'(x)|.$$

Правая часть при $\mu = \mu_{crit}$ равна

$$\frac{25}{12} \cdot \frac{1}{64} + \alpha - 2\left(\frac{1 - \alpha}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Отсюда вытекает, что при малом $\nu_1 > 0$ и близком к единице α выполняется неравенство $g'_\mu(x) > 0$, если $\mu \in [-\nu_1 + \mu_{crit}; 0]$. Аналогичный вывод получаем при $\frac{3}{48} \leq |x| \leq \frac{4}{48}$. Для $\frac{4}{48} \leq |x| \leq \frac{5}{48}$ имеем

$$(3x^2 + \alpha)U(x) \geq (3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{64} + \alpha)\frac{1}{3} = \frac{1}{144} + \frac{\alpha}{3},$$

$$(x^2 + \alpha - d)xU'(x) \geq |x^2 + \alpha - d| \cdot |xU'(x)| \geq \left(d - \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{64} + \alpha\right)\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \geq \frac{d}{12}.$$

Учитывая, что $|U'(x)| \leq 48$, получаем

$$g'_\mu(x) \geq \frac{1}{144} + \frac{\alpha}{3} + \frac{d}{12} - 48|\mu|.$$

Правая часть при $\mu = \mu_{crit}$ равна

$$\frac{1}{144} + \frac{\alpha}{3} + \frac{d}{12} - 96\left(\frac{1 - \alpha}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Отсюда вытекает, что при малом $\nu_2 > 0$ и близком к единице α также выполняется неравенство $g'_\mu(x) > 0$, если $\mu \in [-\nu_2 + \mu_{crit}; 0]$. Осталось взять $\varepsilon_1 = \min\{\nu_1; \nu_2\}$.

Из неравенства $g'_\mu(x) > 0$ вытекает, что на промежутке $[-\frac{1}{8}; +\frac{1}{8}]$ преобразование g_μ является диффеоморфизмом $[-\frac{1}{8}; +\frac{1}{8}] \to [-\frac{d}{8}; +\frac{d}{8}]$. Так как вне этого отрезка $g_\mu = dx\ mod\ 1$, то преобразование g_μ является неособым d-эндоморфизмом окружности.

Покажем, что при любом $\mu_{crit} < \mu \leq 0$ неблуждающее множество $NW(g_\mu)$ состоит из притягивающей изолированной точки $x^{attr}_\mu \in [-\frac{1}{8}; +\frac{1}{8}]$ и канторова транзитивного множества K_μ, которое является дополнением к притягивающему множеству (бассейну) точки x^{attr}_μ, $K_\mu = S^1 \setminus W^s(x^{attr}_\mu)$ (отсюда и [9] будет следовать, что g_μ является структурно устойчивым эндоморфизмом). Действительно, согласно (1.4), g_0 на промежутке $\left[-\frac{1}{16}; \frac{1}{16}\right]$ имеет три неподвижные точки, причем точка $x_0 = 0$ притягивающая, а точки $x_\pm$ отталкивающие. Вне промежутка $[-x_{crit}; x_{crit}]$ производная $g'_0(x) > 1$. Отсюда вытекает, что g_0 удовлетворяет требуемому утверждению.

Из вида (1.1) следует, что на промежутке $\left[-\frac{1}{16}; \frac{1}{16}\right]$ график функции g_μ получается жестким сдвигом графика g_0. Отсюда можно заключить, что при $\mu_{crit} < \mu < 0$ эндоморфизм g_μ имеет также при неподвижные точки x_μ^-, x_μ^{attr}, x_μ^+. Учитывая (1.4) и (1.5), непосредственно проверяется, что точки x_μ^-, x_μ^+ являются гиперболическими неподвижными и отталкивающими точками, а x_μ^{attr} является гиперболической неподвижной притягивающей точкой. Поэтому дополнение K_μ к притягивающему множеству (бассейну) точки x_μ^{attr} является канторовым множеством, на котором g_μ действует транзитивно.

При $\mu = \mu_{crit}$ неблуждающее множество $NW(g_\mu)$ по прежнему является канторовым транзитивным множеством K_μ, в котором лежит негиперболическая неподвижная точка x_{crit}, причем производная $g_{crit}(x_{crit})' = 1$. Из (1.2) следует, что x_{crit} является негиперболической точкой общего положения, поскольку $g_{crit}(x_{crit})'' \neq 0$. Это означает, что x_{crit} является частично гиперболической точкой отображения g_μ.

Аналогично показывается, что для некоторого $\varepsilon_2 > 0$ такое, что при $-\varepsilon_2 + \mu_{crit} \leq \mu < \mu_{crit}$ отображение g_μ является структурно устойчивым транзитивным эндоморфизмом (неблуждающее множество совпадает со всей окружностью). Это завершает доказательство теоремы 1.2..

Авторы благодарят РФФИ, грант 12-01-00672-а, за финансовую поддержку.

Список литературы

1. Борисов А.В., Мамаев И.С., "Странные аттракторы в динамике кельтских камней", *Успехи физ. наук*, **174 4** (2003), 407–418.

2. Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., "О нульмерных соленоидальных базисных множествах", *Матем. сб.*, **202 3** (2011), 47–68.

3. Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е., "О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации", *Успехи физ. наук*, **179 12** (2009), 1281–1310.

4. Кузнецов С.П., "Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике", *Успехи физ. наук*, **181 2** (2011), 121–149.

5. Кузнецов С.П., Пономаренко В.И., "О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла-Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием", *Письма в ЖТФ*, **34 18** (2008), 1–8.

6. Belykh I., Belykh V., Mosekilde V., "Hyperbolic Plykin attarctor can exist in neuron models", *Int. Journ. Bifurc. Chaos*, **15** (2005), 3567–3578.

7. Bothe H., "The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds", *Math. Nachr.*, **112** (1083), 69–102.

8. Jiang B., Ni Y., Wang S., "3-manifolds that admit knotted solenoids", *ArXiv: math. GT/0403427*.

9. Nitecki Z., "Nonsingular endomorphisms of the circle", *Proc. Symp. Pure Math.*, **14** (1970), 203–220.

10. Shub M., "Endomorphisms of compact differentiable manifolds", *Amer. Journ. Math.*, **91** (1969), 175–199.

11. Smale S., “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747-817 (имеется перевод: Успехи мат. наук, 251970, 113-185)..

12. Strogatz S.H., *Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, Perseus Books, Massachusetts..

13. Williams R., “Expanding attractors”, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **43** (1974), 169–203.

The destruction of the Smale-Williams solenoids

© **S. V. Gonchenko**[4], **E.V. Zhuzhoma**[5], **N.V. Isaenkova**[6]

Abstract. In the paper, one represents the family of diffeomorphisms $f_\nu : S^3 \to S^3$, $-1 \le \nu \le 1$, depending smoothly on the parameter ν such that 1) given any $-1 \le \nu < 0$, the non-wandering set of f_ν consists of one-dimensional expanding attractor and one-dimensional contracting repeller that are Smale-Williams solenoid; 2) the diffeomorphism f_0 has a non-wandering set consisting of the two zero-dimensional transitive invariant sets Λ_1 and Λ_2 such that each is homeomorphic to the product of Cantor sets, and the restriction $f_0|_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}$ is a partially hyperbolic diffeomorphism; 3) given any $0 < \nu \le 1$, the non-wandering set of f_ν consists of two hyperbolic zero-dimensional transitive invariant sets each is homeomorphic to the product of Cantor sets.

Key Words: Attractor, repeller, solenoid Smale-Williams

[4] Head of Department of Differential Equations, Institute of Applied Mathematics and Cybernetics, Nizhny Novgorod

[5] Professor of mathematical analysis, theory and methodology of training, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

[6] Senior Lecturer, Department of Mathematical Analysis, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.