УДК 517.95

Об устойчивости по малым параметрам решения смешанной задачи для нелинейного псевдогиперболического уравнения

© Т. К. Юлдашев[1]

Аннотация. В данной работе доказываются теоремы об устойчивости по малым параметрам обобщенного решения смешанной задачи для нелинейного псевдогиперболического уравнения пятого порядка.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, устойчивость решения, малые параметры, счетная система нелинейных интегральных уравнений.

1. Введение

Смешанные задачи в теории упругости возникают при расчете различных деталей машин и элементов конструкций, находящихся во взаимодействии, при расчете фундаментов и оснований сооружений. Смешанными задачами также являются многие задачи концентрации напряжений в окрестности всевозможных трещин, инородных включений, подкрепляющих стрингеров и накладок. Много смешанных задач и в гидродинамике. Это и нелинейные задачи теории крыла и глиссирования, теория струйных течений, теории качки корабля и удара тел о поверхность жидкости, фильтрации, теории взрыва, ряд задач гидроупругости [1].

Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных более высоких порядков. Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных более высоких порядков [2]. Дифференциальных уравнений в частных производных более высоких порядков необходимо решать и при построении инвариантных решений дифференциальных уравнений с использованием высшей симметрии и законов сохранения.

В области D рассматривается нелинейное псевдогиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u(t,x)-\nu\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right)+\mu\frac{\partial^5 u(t,x)}{\partial t\,\partial x^4}+\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^4}=f\left(t,x,u(t,x)\right) \tag{1.1}$$

с начальными

$$u(t,x)_{|t=0}=\varphi_1(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u(t,x)_{|t=0}=\varphi_2(x) \tag{1.2}$$

и граничными условиями

$$u(t,x)_{|x=0}=u_{xx}(t,x)_{|x=0}=u(t,x)_{|x=l}=u_{xx}(t,x)_{|x=l}=0, \tag{1.3}$$

где $f\left(t,x,u\right)\in C\left(D\times\mathbb{R}\right)$, $\varphi_j(x)\in C^4(D_l)$, $\varphi_j(x)_{|x=0}=\varphi_j''(x)_{|x=0}=\varphi_j(x)_{|x=l}=\varphi_j''(x)_{|x=l}=0$, $j=1,2$, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[0,T]$, $D_l\equiv[0,l]$, $0<T<\infty$, $0<l<\infty$, $0<\nu,\mu$ – малые параметры.

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск; tursunbay@rambler.ru.

Следует отметить, что изучению разного типа линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и их систем посвящены много работ и при этом применены разные методы (см., напр. [3] - [8]).

В данной работе изучаются вопросы устойчивости по малым параметрам решения смешанной задачи (9)-(11). При этом применяется метод разделения переменных, основанный на поиске решения смешанной задачи (9)-(11) в виде ряда Фурье [9]

$$u(t,x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i(t)\,b_i(x), \tag{1.4}$$

где $b_i(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\lambda_i x,\ \lambda_i=\dfrac{i\pi}{l}$.

Общие вопросы обобщенной разрешимости смешанной задачи (9)-(11) рассматривались ранее в [10], [11].

Множество $\Big\{a(t)=(a_i(t))\,|a_i(t)\in C\,[0,T]\,,\ i=1,2,3,\dots\Big\}$ введением нормы

$$\|a(t)\|_{B_2(T)}=\left[\sum_{i=1}^{\infty}\max_{t\in D_T}|a_i(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

становится банаховым пространством и его обозначают так $B_2(T)$.

Для каждого $a(t)\in B_2(T)$ определяется оператор

$$Qa(t)=u(t,x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i(t)b_i(x).$$

Через $E_2(D)$ обозначается множество значений этого оператора. Очевидно, что $Q\colon B_2(T)\to E_2(D)$ и $E_2(D)\subset L_2(D)$.

Определение 1.1. *Если функция* $u(t,x)\in E_2(D)$ *для любого* $F(t,x)\in W_2^{(2)}(D)$ *удовлетворяет следующему интегральному тождеству*

$$\int_0^T\int_0^l\Big\{u(t,y)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}F(t,y)-\nu\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial y^2}F(t,y)-\mu\frac{\partial^5}{\partial t\partial y^4}F(t,y)+\frac{\partial^4}{\partial y^4}F(t,y)\right]-$$

$$-f\left(t,y,u(t,y)\right)F(t,y)\Big\}\,dydt=$$

$$=\int_0^l\varphi_1(y)\left[\frac{\partial}{\partial t}F(t,y)-\nu\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial y^2}F(t,y)+\mu\frac{\partial^4}{\partial y^4}F(t,y)\right]_{t=0}dy-$$

$$-\int_0^l\varphi_2(y)\left[F(t,y)-\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}F(t,y)\right]_{t=0}dy,$$

то она называется обобщенным решением смешанной задачи (9)-(11).

Т е о р е м а 1.1. *Пусть выполняются следующие условия:*
1. $\lambda_i^4\mu^2 - 4\lambda_i^2\nu - 4 < 0$;
2. $\int\limits_0^T \| f(t,x,u) \|_{L_2(D_l)} dt \le \Delta < \infty$,
3. $f(t,x,u) \in Lip\Big\{ L(t,x)_{|u} \Big\}, \ 0 < \int\limits_0^l \| L(t,y) \|_{L_2(D_l)} dy < \infty$;
4. $\| W(t,\nu,\mu) \|_{B_2(T)} < \infty$.

Тогда смешанная задача (9)-(11) *имеет единственное обобщенное решение в области* D *и это решение можно представить в следующем виде:*

$$u(t,x,\nu,\mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \Big[W_i(t,\nu,\mu) + \int\limits_0^t \int\limits_0^l f(s,y,Qa(s,\nu,\mu))\, b_i(y) G_i(t,s,\nu,\mu) dy ds \Big] b_i(x), \tag{1.5}$$

$a_i(t,\nu,\mu)$ *определяется как решение следующей счетной системы нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ):*

$$a_i(t,\nu,\mu) = W_i(t,\nu,\mu) + \int\limits_0^t \int\limits_0^l f(s,y,Qa(s,\nu,\mu))\, G_i(t,s,\nu,\mu) b_i(y) dy ds, \tag{1.6}$$

где

$$W_i(t,\nu,\mu) = \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\omega_{1i}(\nu,\mu) t \Big\} \times$$
$$\times \Big[\varphi_{1i} \cos\omega_{2i}(\nu,\mu)\frac{t}{2} + \frac{2}{\omega_{2i}(\nu,\mu)} \Big(\varphi_{2i} + \frac{\varphi_{1i}}{2}\omega_{1i}(\nu,\mu) \Big) \sin\omega_{2i}(\nu,\mu)\frac{t}{2} \Big],$$

$$G_i(t,s,\nu,\mu) = \frac{2\exp\Big\{ -\omega_{1i}(\nu,\mu)\dfrac{t-s}{2} \Big\} \sin\omega_{2i}(\nu,\mu)\dfrac{t-s}{2}}{\omega_{0i}(\nu)\Big[\omega_{2i}(\nu,\mu) + \omega_{1i}(\nu,\mu)\sin\omega_{2i}(\nu,\mu)s \Big]}, \ \omega_{0i}(\nu) = 1 + \lambda_i^2\nu,$$

$$\omega_{1i}(\nu,\mu) = \frac{\lambda_i^4\mu}{\omega_{0i}(\nu)}, \ \omega_{2i}(\nu,\mu) = \frac{\lambda_i^2\sqrt{4\omega_{0i}(\nu) - \lambda_i^4\mu^2}}{\omega_{0i}(\nu)}, \ \varphi_{ji} = \int\limits_0^l \varphi_j(y) b_i(y) dy, \ j = 1,2.$$

Доказательство этой теоремы приведено в [10]. Поэтому его здесь приводить не будем.

2. Основные результаты

Сначала изучаем устойчивость решения смешанной задачи (9)-(11) по первому малому параметру ν.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть выполняются условия теоремы 1.1. и*
1) $\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_{1i}| \Big[\frac{\omega_{1i}(\nu_1,\,\mu)}{\omega_{2i}(\nu_1,\,\mu)} + \frac{\lambda_i^4\mu^2}{\sqrt{4-\lambda_i^4\mu^2}} + \frac{\omega_{1i}(\nu_1,\,\mu)}{\sqrt{4-\lambda_i^4\mu^2}} + \frac{\lambda_i^6\mu}{\omega_{2i}(\nu_2,\,\mu)} + \frac{\omega_{1i}(\nu_2,\,\mu)}{\omega_{2i}(\nu_2,\,\mu)} \cdot \frac{\lambda_i^4\mu^2}{\sqrt{4-\lambda_i^4\mu^2}} \Big] < \infty$;
2) $\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_{2i}| \Big[\frac{1}{\omega_{2i}(\nu_1,\,\mu)} + \frac{1}{\sqrt{4-\lambda_i^4\mu^2}} + \frac{1}{\omega_{2i}(\nu_2,\,\mu)} \cdot \frac{\lambda_i^4\mu^2}{\sqrt{4-\lambda_i^4\mu^2}} \Big] < \infty$;
3) $\sum_{i=1}^{\infty} \Big(\frac{\lambda_i^6\mu}{\omega_{0i}(\nu_2)\tau_0^2} + \frac{\lambda_i^2}{\tau_0} \Big) \int\limits_0^T |f_i(u,\nu_1)|\, dt < \infty$, *где* $f_i(u,\nu_1) =$

$$= \int\limits_0^l f\left(s, y, Qa(s, \nu_1, \mu)\right) b_i(y) dy\,, \quad \tau_0 = \inf_{[0;\,\nu]} \left|\omega_{2i}(\nu,\,\mu) + \omega_{1i}(\nu,\,\mu) \sin \omega_{2i}(\nu,\,\mu) t\right|\ .$$

Тогда для произвольных $\nu_1, \nu_2 \in [0;\, \nu]$ *справедлива оценка:*

$$|u(t, x, \nu_1, \mu) - u(t, x, \nu_2, \mu)| \leq A|\nu_1 - \nu_2|,\ 0 < A = const. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для разности $a(t, \nu_1, \mu) - a(t, \nu_2, \mu)$ из ССНИУ (1.6) имеем оценку

$$\|a(t, \nu_1, \mu) - a(t, \nu_2, \mu)\|_{B_2(T)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \max_{t \in D_T} \left| \exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu_1, \mu)\frac{t}{2}\Big\} - \exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu_2, \mu)\frac{t}{2}\Big\} \right| \times$$

$$\times \left| \varphi_{1i} \cos \omega_{2i}(\nu_1, \mu)\frac{t}{2} + \frac{2}{\omega_{2i}(\nu_1, \mu)} \left(\varphi_{2i} + \frac{\varphi_{1i}}{2}\, \omega_{1i}(\nu_1, \mu)\right) \sin \omega_{2i}(\nu_1, \mu)\frac{t}{2} \right| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \max_{t \in D_T} \left| \exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu_2, \mu)\frac{t}{2}\Big\} \right| \Big\{ |\varphi_{1i}| \cdot \left| \cos \omega_{2i}(\nu_1, \mu)\frac{t}{2} - \cos \omega_{2i}(\nu_2, \mu)\frac{t}{2} \right| +$$

$$+ \left| \frac{2}{\omega_{2i}(\nu_1, \mu)} - \frac{2}{\omega_{2i}(\nu_2, \mu)} \right| \cdot \left| \varphi_{2i} + \frac{\varphi_{1i}}{2}\, \omega_{1i}(\nu_1, \mu) \right| \cdot \left| \sin \omega_{2i}(\nu_1, \mu)\frac{t}{2} \right| +$$

$$+ \frac{2}{|\omega_{2i}(\nu_2, \mu)|} \Big[\frac{|\varphi_{1i}|}{2}\ |\omega_{1i}(\nu_1, \mu) - \omega_{1i}(\nu_2, \mu)| \cdot \left| \sin \omega_{2i}(\nu_1, \mu)\frac{t}{2} \right| +$$

$$+ \left| \sin \omega_{2i}(\nu_1, \mu)\frac{t}{2} - \sin \omega_{2i}(\nu_2, \mu)\frac{t}{2} \right| \cdot \left| \varphi_{2i} + \frac{\varphi_{1i}}{2}\, \omega_{1i}(\nu_2, \mu) \right| \Big] \Big\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \max_{t \in D_T} \int\limits_0^t \int\limits_0^l \left| G_i\Big(t, s, \nu_1, \mu\Big) - G_i\Big(t, s, \nu_2, \mu\Big) \right| \left| f\left(s, y, Qa(s, \nu_1, \mu)\right) \right| |b_i(y)| dy ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \max_{t \in D_T} \int\limits_0^t \int\limits_0^l \left| G_i\Big(t, s, \nu_2, \mu\Big) \right| \cdot \Big| f\Big(s, y, Qa(s, \nu_1, \mu)\Big) -$$

$$- f\Big(s, y, Qa(s, \nu_2, \mu)\Big) \Big| \cdot \Big| b_i(y) \Big| dy ds, \tag{2.2}$$

где

$$G_i(t, s, \nu_1, \mu) - G_i(t, s, \nu_2, \mu) = 2\left(\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu_1, \mu)\frac{t-s}{2}\Big\} - \exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu_2, \mu)\frac{t-s}{2}\Big\} \right) \times$$

$$\times \frac{\sin \omega_{2i}(\nu_1, \mu)\dfrac{t-s}{2}}{\omega_{0i}(\nu_1)\Big[\omega_{2i}(\nu_1, \mu) + \omega_{1i}(\nu_1, \mu) \sin \omega_{2i}(\nu_1, \mu) s\Big]} + 2\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu_2, \mu)\frac{t-s}{2}\Big\} \times$$

$$\times \Big\{ \left(\sin \omega_{2i}(\nu_1, \mu)\frac{t-s}{2} - \sin \omega_{2i}(\nu_2, \mu)\frac{t-s}{2} \right) \frac{1}{\omega_{0i}(\nu_1)\Big[\omega_{2i}(\nu_1, \mu) + \omega_{1i}(\nu_1, \mu) \sin \omega_{2i}(\nu_1, \mu) s\Big]} +$$

$$+ \sin \omega_{2i}(\nu_2, \mu)\frac{t-s}{2} \Big[\left(\frac{1}{\omega_{0i}(\nu_1)} - \frac{1}{\omega_{0i}(\nu_2)} \right) \frac{1}{\omega_{2i}(\nu_1, \mu) + \omega_{1i}(\nu_1, \mu) \sin \omega_{2i}(\nu_1, \mu) s} + \frac{1}{\omega_{0i}(\nu_2)} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\omega_{2i}(\nu_1, \mu) + \omega_{1i}(\nu_1, \mu) \sin \omega_{2i}(\nu_1, \mu) s} - \frac{1}{\omega_{2i}(\nu_2, \mu) + \omega_{1i}(\nu_2, \mu) \sin \omega_{2i}(\nu_2, \mu) s} \right) \Big] \Big\}.$$

Здесь мы воспользуемся следующими оценками:

$$\left|\frac{1}{\omega_{0i}(\nu_1)}-\frac{1}{\omega_{0i}(\nu_2)}\right|\leq \alpha_{1i}\,|\nu_1-\nu_2|,\ \alpha_{1i}=\lambda_i^2; \tag{2.3}$$

$$|\omega_{1i}(\nu_1,\mu)-\omega_{1i}(\nu_2,\mu)|\leq \alpha_{2i}\,|\nu_1-\nu_2|,\ \alpha_{2i}=\lambda_i^6\mu; \tag{2.4}$$

$$\left|\frac{2}{\omega_{2i}(\nu_1,\mu)}-\frac{2}{\omega_{2i}(\nu_2,\mu)}\right|\leq\left|\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2}\Big[\frac{2}{\omega_{2i}(\nu,\mu)}\Big]_\nu' d\nu\right|\leq\ \alpha_{3i}\,|\nu_1-\nu_2|,\ \alpha_{3i}=\frac{1}{\sqrt{4-\lambda_i^4\mu^2}}; \tag{2.5}$$

$$\Big|\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu_1,\mu)t\Big\}-\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu_2,\mu)t\Big\}\Big|\leq\left|\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2}\Big[\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)t\Big\}\Big]_\nu' d\nu\right|\leq|\nu_1-\nu_2|; \tag{2.6}$$

$$\left|\cos\omega_{2i}(\nu_1,\mu)\frac{t}{2}-\cos\omega_{2i}(\nu_2,\mu)\frac{t}{2}\right|\leq\left|\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2}\Big[\cos\omega_{2i}(\nu,\mu)\frac{t}{2}\Big]_\nu' d\nu\right|\leq\ \alpha_{4i}\,|\nu_1-\nu_2|, \tag{2.7}$$

где $\alpha_{4i}=\dfrac{\lambda_i^4\mu^2 T}{2\sqrt{4-\lambda_i^4\mu^2}}$;

$$\left|\sin\omega_{2i}(\nu_1,\mu)\frac{t}{2}-\sin\omega_{2i}(\nu_2,\mu)\frac{t}{2}\right|\leq\left|\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2}\Big[\sin\omega_{2i}(\nu,\mu)\frac{t}{2}\Big]_\nu' d\nu\right|\leq\ \alpha_{4i}\,|\nu_1-\nu_2|; \tag{2.8}$$

$$|\omega_{2i}(\nu_1,\mu)-\omega_{2i}(\nu_2,\mu)|\leq\left|\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2}\Big[\omega_{2i}(\nu,\mu)\Big]_\nu' d\nu\right|\leq\frac{2}{T}\,\alpha_{4i}\,|\nu_1-\nu_2|; \tag{2.9}$$

$$\Big|\frac{1}{\omega_{2i}(\nu_1,\mu)+\omega_{1i}(\nu_1,\mu)\sin\omega_{2i}(\nu_1,\mu)s}-$$
$$-\frac{1}{\omega_{2i}(\nu_2,\mu)+\omega_{1i}(\nu_2,\mu)\sin\omega_{2i}(\nu_2,\mu)s}\Big|\leq\alpha_{5i}\,|\nu_1-\nu_2|, \tag{2.10}$$

где $\alpha_{5i}=\dfrac{T\alpha_{2i}+2\alpha_{4i}}{T\tau_0^2}$.

Тогда, в силу условий теоремы, с учетом оценок (2.3)-(2.10) из (2.2) имеем

$$\|a(t,\nu_1,\mu)-a(t,\nu_2,\mu)\|_{B_2(T)}\leq A_0(\nu_1,\nu_2,\,\mu)\,|\nu_1-\nu_2|+$$

$$+M_1\sum_{i=1}^\infty\max_{t\in D_T}\int\limits_0^t\int\limits_0^l L(s,y)\Big(\sum_{j=1}^\infty\Big|a_j(s,\nu_1,\mu)-a_j(s,\nu_2,\mu)\Big|\cdot|b_j(y)|\Big)\cdot|b_i(y)|dyds\leq$$

$$\leq A_0(\nu_1,\nu_2,\,\mu)\,|\nu_1-\nu_2|+M_1M_2^2 l^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^t\|L(s,x)\|_{L_2(D_l)}\,\|a(s,\nu_1,\mu)-a(s,\nu_2,\mu)\|_{B_2(T)}\,ds, \tag{2.11}$$

где

$$A_0(\nu_1,\nu_2,\,\mu)=\sum_{i=1}^\infty\Big\{|\varphi_{1i}|\Big[1+\frac{\omega_{1i}(\nu_1,\mu)}{\omega_{2i}(\nu_1,\mu)}+\alpha_{4i}+\alpha_{3i}\,\frac{\omega_{1i}(\nu_1,\mu)}{2}+\frac{\alpha_{2i}}{\omega_{2i}(\nu_2,\mu)}+$$

$$+\alpha_{4i}\frac{\omega_{1i}(\nu_2,\mu)}{\omega_{2i}(\nu_2,\mu)}\Big]+|\varphi_{2i}|\Big[\frac{2}{\omega_{2i}(\nu_1,\mu)}+\alpha_{3i}+\frac{2\alpha_{4i}}{\omega_{2i}(\nu_2,\mu)}\Big]\Big\}+$$

$$+\overline{M}_1\sum_{i=1}^{\infty}\max_{t\in D_T}\int_0^t\int_0^l\Big|f\Big(s,y,\sum_{j=1}^{\infty}a_j(s,\nu_1,\,\mu)b_j(y)\Big)\Big|\cdot\Big|b_i(y)\Big|dyds,$$

$$\overline{M}_1=\left\|\frac{2+2\alpha_{4i}}{\omega_0(\nu_1)\tau_0}\right\|_{l_2}+\left\|\frac{2\alpha_1}{\tau_0}\right\|_{l_2}+\left\|\frac{2\alpha_{5i}}{\omega_0(\nu_2)}\right\|_{l_2}.$$

Применяя к (2.11) неравенства Гронуолла-Беллмана, получаем

$$\|a(t,\nu_1,\mu)-a(t,\nu_2,\mu)\|_{B_2(T)}\le A_1(\nu_1,\nu_2,\,\mu)\,|\nu_1-\nu_2|, \tag{2.12}$$

где

$$A_1=A_0(\nu_1,\nu_2,\,\mu)\exp\left\{M_1M_2^2l^{\frac{1}{2}}\int_0^T\|L(t,x)\|_{L_2(D_l)}\,dt\right\}.$$

Учтем, что

$$|u(t,x,\nu_1,\mu)-u(t,x,\nu_2,\mu)|\le\sum_{i=1}^{\infty}|a_i(t,\nu_1,\mu)-a_i(t,\nu_2,\mu)|\cdot|b_i(x)|\le$$

$$\le\|a(t,\nu_1,\mu)-a(t,\nu_2,\mu)\|_{B_2(T)}\cdot\|b(x)\|_{B_2(l)}.$$

Тогда из (1.5) согласно (2.12) следует (2.1), если положим $A=A_1M_2$. Доказательство закончено.

Теперь будем изучать непрерывную зависимость решения смешанной задачи (9)-(11) по второму малому параметру μ .

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия теоремы 1.1. и*

1) $\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_{1i}|\Big[\frac{\omega_{1i}(\nu,\,\mu_1)}{\omega_{2i}(\nu,\,\mu_1)}+\frac{\lambda_i^6(\mu_1+\mu_2)}{\omega_{0i}(\nu)(\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2})}+\frac{\lambda_i^2\omega_{0i}(\nu)(\mu_1+\mu_2)\omega_{1i}(\nu,\,\mu_1)}{\rho_1\sqrt{\rho_2}+\rho_2\sqrt{\rho_1}}+$
$+\frac{\lambda_i^4}{\omega_{0i}(\nu)\omega_{2i}(\nu,\mu_2)}+\frac{\lambda_i^6T(\mu_1+\mu_2)}{\omega_{0i}(\nu)(\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2})}\cdot\frac{\omega_{1i}(\nu,\mu_2)}{\omega_{2i}(\nu,\mu_2)}\Big]<\infty$ *, где* $\rho_j=4-\lambda_i^4\mu_j^2, j=1,2$ *;*

2) $\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_{2i}|\Big[\frac{1}{\omega_{2i}(\nu,\,\mu_1)}+\frac{\lambda_i^6\omega_{0i}(\nu)(\mu_1+\mu_2)}{\rho_1\sqrt{\rho_2}+\rho_2\sqrt{\rho_1}}+\frac{\lambda_i^6T(\mu_1+\mu_2)}{\omega_{0i}(\nu)(\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2})}\cdot\frac{\omega_{1i}(\nu,\mu_2)}{\omega_{2i}(\nu,\mu_2)}\Big]<\infty$ *;*

3) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^4}{\omega_{0i}(\nu)\overline{\tau}_0^2}\int_0^T\Big|f_i\Big(u,\mu_1\Big)\Big|\,dt<\infty$ *, где* $f_i(u,\mu_1)=$
$=\int_0^l f\left(s,y,Qa(s,\nu,\mu_1)\right)b_i(y)dy\,,\quad \overline{\tau}_0=\inf_{[0;\,\mu]}|\omega_{2i}(\nu,\,\mu)+\omega_{1i}(\nu,\,\mu)\sin\omega_{2i}(\nu,\,\mu)t|$.

Тогда для $\mu_1,\mu_2\in[0;\,\mu]$ *справедлива оценка:*

$$|u(t,x,\nu,\mu_1)-u(t,x,\nu,\mu_2)|\le B|\mu_1-\mu_2|,\ 0<B=const. \tag{2.13}$$

Доказательство. Используем следующие оценки:

$$|\omega_{1i}(\nu,\mu_1)-\omega_{1i}(\nu,\mu_2)|\le\beta_{1i}\,|\mu_1-\mu_2|,\ \beta_{1i}=\frac{\lambda_i^4}{\omega_{0i}(\nu)}; \tag{2.14}$$

$$\left|\frac{2}{\omega_{2i}(\nu,\,\mu_1)}-\frac{2}{\omega_{2i}(\nu,\,\mu_2)}\right|\le\beta_{2i}\,|\mu_1-\mu_2|,\ \beta_{2i}=\frac{\lambda_i^6\omega_{0i}(\nu)(\mu_1+\mu_2)}{\rho_1\sqrt{\rho_2}+\rho_2\sqrt{\rho_1}}; \tag{2.15}$$

$$\Big|\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu,\,\mu_1)t\Big\}-\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu,\,\mu_2)t\Big\}\Big|\le\left|\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}\Big[\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)t\Big\}\Big]'_{\mu}d\mu\right|\le|\mu_1-\mu_2|; \quad (2.16)$$

$$\left|\cos\omega_{2i}(\nu,\mu_1)\frac{t}{2}-\cos\omega_{2i}(\nu,\mu_2)\frac{t}{2}\right|\le\frac{\lambda_i^2T}{2\omega_{0i}(\nu)}\left|\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{d\rho}{2\sqrt{\rho}}\right|\le\beta_{3i}\,|\mu_1-\mu_2|, \quad (2.17)$$

где $\beta_{3i}=\dfrac{\lambda_i^6T(\mu_1+\mu_2)}{2\omega_{0i}(\nu)(\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2})}$, $\rho=4-\lambda_i^4\mu^2$;

$$\left|\sin\omega_{2i}(\nu,\mu_1)\frac{t}{2}-\sin\omega_{2i}(\nu,\mu_2)\frac{t}{2}\right|\le\beta_{3i}\,|\mu_1-\mu_2|; \quad (2.18)$$

$$\Big|\frac{1}{\omega_{2i}(\nu,\mu_1)+\omega_{1i}(\nu,\mu_1)\sin\omega_{2i}(\nu,\mu_1)s}-$$
$$-\frac{1}{\omega_{2i}(\nu,\mu_2)+\omega_{1i}(\nu,\mu_2)\sin\omega_{2i}(\nu,\mu_2)s}\Big|\le\beta_{4i}\,|\mu_1-\mu_2|, \quad (2.19)$$

где $\beta_{4i}=\dfrac{T\beta_{1i}+2\beta_{3i}}{T\overline{\tau}_0^2}$.

В силу оценок (2.14)-(2.19), аналогично доказательства предыдущей теоремы имеем

$$\|a(t,\nu,\mu_1)-a(t,\nu,\mu_2)\|_{B_2(T)}\le B_0(\nu,\mu_1,\,\mu_2)\,|\mu_1-\mu_2|+$$
$$+M_1M_2^2l^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^t\|L(s,x)\|_{L_2(D_l)}\,\|a(s,\nu,\mu_1)-a(s,\nu,\mu_2)\|_{B_2(T)}\,ds, \quad (2.20)$$

где

$$B_0(\nu,\mu_1,\mu_2)=\sum_{i=1}^{\infty}\Big\{|\varphi_{1i}|\Big[1+\frac{\omega_{1i}(\nu,\mu_1)}{\omega_{2i}(\nu,\mu_1)}+\beta_{3i}+\beta_{2i}\,\frac{\omega_{1i}(\nu,\mu_1)}{2}+\frac{\beta_{1i}}{\omega_{2i}(\nu,\mu_2)}+$$
$$+\beta_{3i}\,\frac{\omega_{1i}(\nu,\mu_2)}{\omega_{2i}(\nu,\mu_2)}\Big]+|\varphi_{2i}|\Big[\frac{2}{\omega_{2i}(\nu,\mu_1)}+\beta_{2i}+\frac{2\beta_{3i}}{\omega_{2i}(\nu,\mu_2)}\Big]\Big\}+$$
$$+M_0\sum_{i=1}^{\infty}\max_{t\in D_T}\int\limits_0^t\int\limits_0^l\Big|f\Big(s,y,\sum_{j=1}^{\infty}a_j(s,\nu,\,\mu_1)b_j(y)\Big)\Big|\cdot\Big|b_i(y)\Big|dyds,$$
$$M_0=\left\|\frac{2+2\beta_3}{\omega_0(\nu)\overline{\tau}_0}\right\|_{l_2}+\left\|\frac{\beta_4}{\omega_0(\nu)}\right\|_{l_2}.$$

Применяя к (2.20) неравенства Гронуолла-Беллмана, получаем

$$\|a(t,\nu,\mu_1)-a(t,\nu,\mu_2)\|_{B_2(T)}\le B_1(\nu,\mu_1,\mu_2)\,|\mu_1-\mu_2|, \quad (2.21)$$

где

$$B_1=B_0(\nu,\mu_1,\,\mu_2)\exp\left\{M_1M_2^2l^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^T\|L(t,x)\|_{L_2(D_l)}\,dt\right\}.$$

С учетом

$$|u(t,x,\nu,\mu_1)-u(t,x,\nu,\mu_2)|\le\sum_{i=1}^{\infty}|a_i(t,\nu,\mu_1)-a_i(t,\nu,\mu_2)|\cdot|b_i(x)|\le$$

$$\leq \|a(t,\nu,\mu_1) - a(t,\nu,\mu_2)\|_{B_2(T)} \|b(x)\|_{B_2(l)}$$

из (2.21) получаем (2.13), если положим $B = B_1 M_2$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

3. Следствие

С л е д с т в и е 3.1. *Пусть выполняются условия теорем 2.1. и 2.2. Тогда для* $\nu_1, \nu_2 \in [0;\nu]$, $\mu_1, \mu_2 \in [0;\mu]$ *справедлива оценка:*

$$|u(t,x,\nu_1,\mu_1) - u(t,x,\nu_2,\mu_2)| \leq C\Big(|\nu_1 - \nu_2| + |\mu_1 - \mu_2|\Big),$$

где $C = max\{A; B\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, из (2.1) и (2.13) имеем

$$|u(t,x,\nu_1,\mu_1) - u(t,x,\nu_2,\mu_2)| \leq |u(t,x,\nu_1,\mu_1) - u(t,x,\nu_2,\mu_1)| +$$

$$+ |u(t,x,\nu_2,\mu_1) - u(t,x,\nu_2,\mu_2)| \leq A\,|\nu_1 - \nu_2| + B\,|\mu_1 - \mu_2| \leq C\Big(|\nu_1 - \nu_2| + |\mu_1 - \mu_2|\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

С л е д с т в и е 3.2. *Пусть выполняются условия теоремы 2.1. Тогда для* $\nu \in [0;\nu_0]$, $\nu + h \in (0;\nu_0)$, $h, \nu_0 = const$ *справедлива оценка:*

$$\left|\frac{u(t,x,\nu+h,\mu) - u(t,x,\nu,\mu)}{h}\right| \leq A.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в силу теоремы 2.1. имеем

$$\left|\frac{u(t,x,\nu+h,\mu) - u(t,x,\nu,\mu)}{h}\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left|\frac{a_i(t,\nu+h,\mu) - a_i(t,\nu,\mu)}{h}\right| \cdot |b_i(x)| \leq$$

$$\leq M_2 \left\|\frac{a_i(t,\nu+h,\mu) - a_i(t,\nu,\mu)}{h}\right\|_{B_2(T)} \leq A_1 M_2 \,\frac{|\nu + h - \nu|}{h} = A.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Аналогично можно доказать, что имеет место

С л е д с т в и е 3.3. *Пусть выполняются условия теоремы 2.2. Тогда для* $\mu \in [0;\mu_0]$, $\mu + h \in (0;\mu_0)$, $h, \mu_0 = const$ *справедлива оценка:*

$$\left|\frac{u(t,x,\nu,\mu+h) - u(t,x,\nu,\mu)}{h}\right| \leq B.$$

Список литературы

1. Александров В. М., Коваленко Е. В., *Задачи механики смлошных сред со смешанными граничными условиями*, Наука, М., 1986, 336 с.

2. Алгазин С. Д., Кийко И. А., *Флаттер пластин и оболочек*, Наука, М., 2006, 248 с.

3. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967, 736 с.

4. Нахушев А. М., "Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод", *Дифференц. уравнения*, **18**:1 (1982), 72–81.

5. Похожаев С. И., "Об априорных оценках и градиентных катастрофах гладких решений гиперболических систем законов сохранения", *Труды МИ РАН*, **243** (2003), 257–288.

6. Гордезиани Д. Г., Авалашвили Г. А., "Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды", *Матем. моделир.*, **12**:1 (2000), 94–103.

7. Дмитриев В. Б., "Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения", *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*, **42**:2 (2006), 15–27.

8. Пулькина Л. С., "Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения", *Мат. заметки*, **74**:3 (2003), 435–445.

9. Юлдашев Т. К., "О смешанной задаче для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка", *Журнал средневолжского мат. общества*, **14**:2 (2012), 137–142.

10. Юлдашев Т. К., "О разрешимости смешанной задачи для нелинейного псевдогиперболического уравнения пятого порядка", *Тезисы докл. 4-й Российско-Армянского совещания по математической физике,комплексному анализу и смежным вопросам*, 2012, 88–91 с.

11. Юлдашев Т. К., "О слабой разрешимости смешанной задачи для нелинейного псевдогиперболического уравнения", *Журнал средневолжского мат. общества*, **14**:4 (2012), 91–94.

On stability the solution by small parameters for nonlinear pseudohyperbolic equation of the fifth order

© **T. K. Yuldashev**[2]

Abstract. In this article it is proved the theorems about the stability the solutions by small parameters for nonlinear partial pseudohyperbolic differential equations of the fifth order.
Key Words: nonlinear equation, stability the solution, small parameters, countable system of nonlinear equations.

[2] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk; tursunbay@rambler.ru.