УДК 519.6

О построение WENO схем для гиперболических систем уравнений на треугольной сетке

© **Е. Е. Пескова[1], П. А. Шаманаев[2]**

Аннотация. В статье описывается алгоритм построения WENO схемы на неструктурированной сетке. Представлена схема третьего порядка точности, основанная на комбинации линейных полиномов.

Ключевые слова: WENO схема, неструктурированная сетка, высокий порядок точности.

1. Конечно-объемная схема на треугольной сетке

Рассмотрим систему уравнений газовой динамики в переменных Эйлера:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F^1(U)}{\partial x} + \frac{\partial F^2(U)}{\partial y} = 0, \tag{1.1}$$

где $U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}$; $F^1(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e+p) \end{pmatrix}$; $F^2(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{pmatrix}$ Здесь $\rho = \rho(t,x,y)$ – плотность среды, $v = v(t,x,y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ – скорость движения газа, $e = \rho\varepsilon + \frac{1}{2}(u^2+v^2)$ – полная энергия единицы объема, удельная внутренняя энергия, $p = p(\rho,\varepsilon)$ – давление.

Для построения численного решения произведем триангуляцию Делоне расчетной области. Построим разностную схему, аппроксимирующую систему уравнений газовой динамики, пользуясь интегро-интерполяционным методом:

$$\frac{d}{dt}U_i(t) + \frac{1}{|\Delta_i|}\int_{\partial\Delta_i} F\cdot n ds = 0 \tag{1.2}$$

Интеграл в (1.2) рассчитывается с помощью квадратурной формулы Гаусса:

$$\int_{\partial\Delta_i} F\cdot n ds \approx |\partial\Delta_i| \sum_{j=1}^{q} \omega_j F(u(G_j,t))\cdot n, \tag{1.3}$$

Используем двухточечную квадратуру Гаусса $q = 2$. Для ребра треугольника с координатами P_1 и P_2, точки Гаусса определяем следующим образом: $G_1 = cP_1 + (1-c)P_2$, $G_2 = cP_2 + (1-c)P_1$, где $c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$, $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$.

[1] Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; Lizanika@mail.ru.

[2] Заведующий кафедрой прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; korspa@yandex.ru.

2. WENO реконструкция

Пусть дана триангуляция области $\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N\}$ и заданы средние значения некоторой функции $u(x, y)$ для Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$:

$$\bar{u}_i = \frac{1}{|\Delta_i|} \int_{\Delta_i} u(x, y) dxdy. \tag{2.1}$$

Алгоритм WENO построения интерполяционного полинома заключается в использовании комбинации всех возможных полиномов для данной ячейки [2].

Пусть выбран большой шаблон S, разбиваем его на малые шаблоны $\{S_m : m = 1, 2, \ldots, N\}$. Используя значения u на S, строим искомый полином $p(x, y)$ для данной ячейки Δ_0. Значения полинома в каждой точке Гаусса удовлетворяют:

$$p(x^G, y^G) = \sum_{m=1}^{N} \gamma_m p_m(x^G, y^G), \tag{2.2}$$

где (x^G, y^G) – точка Гаусса, p_m – полином, построенный на малом шаблоне S_m, γ_m – линейные весовые коэффициенты. Нелинейная WENO реконструкция в точке Гаусса строится следующим образом:

$$p_{weno}(x^G, y^G) = \sum_{m=1}^{N} w_m p_m(x^G, y^G), \tag{2.3}$$

где w_m – нелинейные весовые коэффициенты определяются из выражений:

$$w_m = \frac{\tilde{w}_m}{\sum_{m=1}^{N} \tilde{w}_m}, \;\; \tilde{w}_m = \frac{\gamma_m}{(\varepsilon + IS_m)^2}. \tag{2.4}$$

Здесь ε – малая положительная величина, введенная, чтобы избежать деления на ноль. В расчетах принимаем $\varepsilon = 10^{-3}$. IS_m – индикатор гладкости для полинома $p_m(x, y)$:

$$IS_m = \sum_{1 \le |\alpha| \le k} \int_{\Delta_0} |\Delta_0|^{|\alpha|-1} (D^\alpha p_m(x, y))^2 dxdy. \tag{2.5}$$

Здесь k – степень полинома p_m.

3. Линейная реконструкция

Для построения линейной схемы третьего порядка точности для нахождения газодинамических параметров для ячейки Δ_0 берем шаблон, включающий в себя два ряда соседних ячеек $S = \{\Delta_0, \Delta_i, \Delta_{ia}, \Delta_{ib}, \Delta_j, \Delta_{ja}, \Delta_{jb}, \Delta_k, \Delta_{ka}, \Delta_{kb}\}$ (рис. 1).

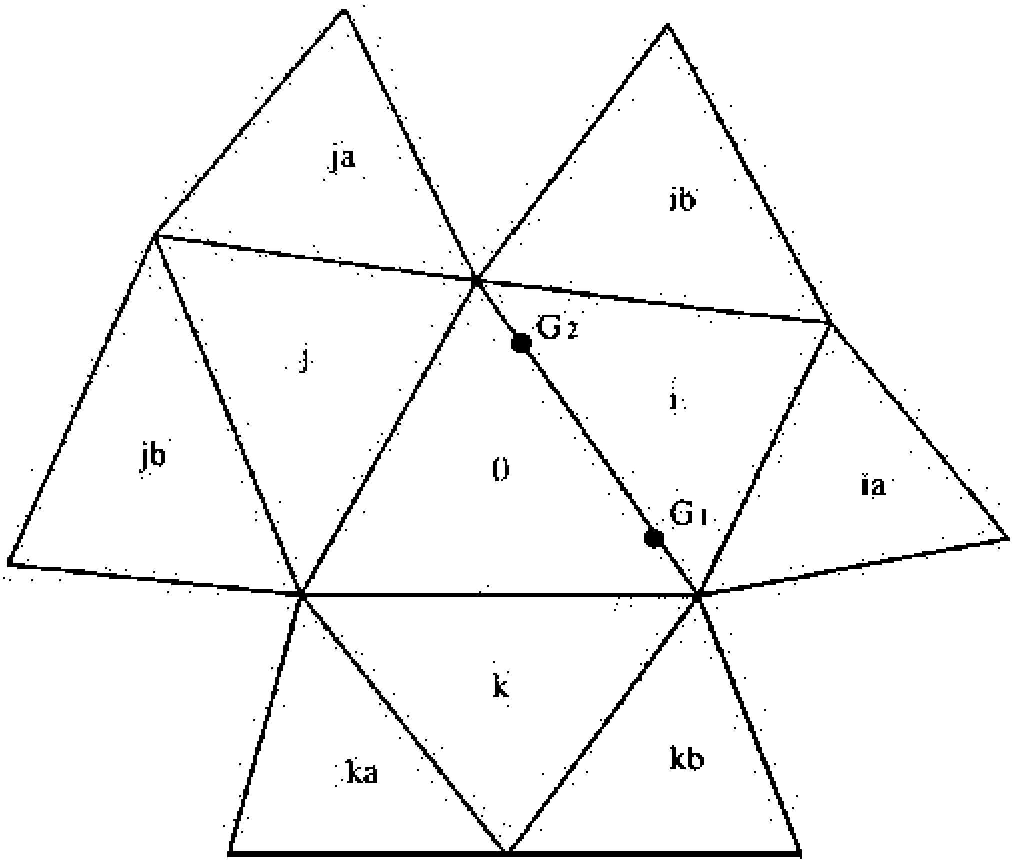

Рис. 1

Используя данный шаблон, строим квадратичный полином $p^2(x,y)$ методом наименьших квадратов. Заметим, что некоторые из ячеек $\{\Delta_{ia},\Delta_{ib},\Delta_{ja},\Delta_{jb},\Delta_{ka},\Delta_{kb}\}$ могут совпадать, но этот факт не влияет на определение полинома $p^2(x,y)$. Для каждой точки Гаусса (x^G,y^G) находим набор коэффициентов $\{c_l\}_{l=1}^N$, которые зависят только от геометрии ячеек:

$$p^2(x^G,y^G)=\sum_{l=1}^{N}c_l\bar{u}_l \tag{3.1}$$

Здесь N – число треугольников в шаблоне, $\bar{u}_l$ – среднее значение u в ячейке.

Идея WENO схемы заключается в следующем [2]. Строим линейные полиномы $p_i(x,y)$, взвешенная сумма которых дает тот же результат, что и квадратичный полином $p^2(x,y)$.

Используя S, строим линейные полиномы $p_i(x,y)$, $i=1,\ldots,9$ на следующих шаблонах: $S_1=\{\Delta_0,\Delta_j,\Delta_k\}$, $S_2=\{\Delta_0,\Delta_i,\Delta_k\}$, $S_3=\{\Delta_0,\Delta_i,\Delta_j\}$, $S_4=\{\Delta_0,\Delta_i,\Delta_{ia}\}$, $S_5=\{\Delta_0,\Delta_i,\Delta_{ib}\}$, $S_6=\{\Delta_0,\Delta_j,\Delta_{ja}\}$, $S_7=\{\Delta_0,\Delta_j,\Delta_{jb}\}$, $S_8=\{\Delta_0,\Delta_k,\Delta_{ka}\}$, $S_9=\{\Delta_0,\Delta_k,\Delta_{kb}\}$.

Используя выражение (2.1) для каждого треугольника из шаблона и решив линейную систему 3×3 найдем искомый полином $p_i(x,y)$.

Для каждой точки Гаусса (x^G,y^G) находим набор коэффициентов $\{c_l^{(i)}\}_{l=1}^3$, которые зависят только от геометрии ячеек:

$$p_i(x^G,y^G)=\sum_{l=1}^{3}c_l^{(i)}\bar{u}_l^{(i)}. \tag{3.2}$$

Здесь $\bar{u}_i$ – среднее значение u в ячейке.

Для каждой точки Гаусса необходимо найти линейные весовые коэффициенты γ_i, которые зависят от параметров сетки. Строим полином с помощью комбинации линейных полиномов

$$R(x,y) = \sum_{i=1}^{9} \gamma_i p_i(x,y), \tag{3.3}$$

который удовлетворяет

$$R(x^G, y^G) = p^2(x^G, y^G). \tag{3.4}$$

Из равенства (3.4) получаем линейную систему уравнений вида:

$$M\gamma = c, \tag{3.5}$$

где вектор $c = (c_1, c_2, \ldots, c_N)^T$ – коэффициенты в (3.1) для большого шаблона. Каждый столбец матрицы M состоит из коэффициентов в (3.2) для малых шаблонов.

Список литературы

1. Годунов С. К., Забродин М. Я., Иванов М. Я., Крайко А. Н, Прокопов Г. П., *Численное решение многомерных задач газовой динамики*, Наука, М., 1976.

2. Changqing Hu, Chi-Wang Shu., “Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes on Triangular Meshes”, *Journal of Computational Physics*, 1999, № 150, 97–127.

3. Y.-T. Zhang and C.-W. Shu., “Third order WENO schemes on three dimensional tetrahedral meshes”, *Communications in Computational Physics*, 2009, № 5, 836–848.

4. Sod A. G., “A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws”, *J. Comput. Phys.*, **27**:1 (1978), 1–31.

On the construction WENO schemes for hyperbolic systems on triangular meshes

© E. E. Peskova[3], P. A. Shamanaev[4]

Abstract. This paper describes an algorithm for constructing WENO schemes on unstructured meshes. We present third-order scheme using a combination of linear polynomials.

Key Words: WENO scheme, unstructured mesh, high-order accuracy.

[3] Graduate student of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; Lizanika@mail.ru.

[4] Head of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; korspa@yandex.ru.