УДК 519.6..517.977.58

Численный метод решения одной задачи оптимального управления для полулинейного уравнения эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решением

© Ф. В. Лубышев[1], А. Р. Манапова[2], М. Э. Файрузов[3]

Аннотация. В работе рассматривается и исследуется нелинейная задача оптимального управления для полулинейного уравнения эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решением, с управлениями в коэффициентах. Излагается метод разностной аппроксимации экстремальной задачи, получены оценки точности аппроксимаций по состоянию и функционалу, доказана слабая сходимость аппроксимаций по управлению. Проведена регуляризация аппроксиммаций по Тихонову.

Ключевые слова: задача оптимального управления, полулинейное эллиптическое уравнение, метод разностной аппроксимации, метод регуляризации.

1. Введение

С теоретической и практической точек зрения важными для исследования представляются физико-математические постановки задач оптимального управления, в которых, в силу характера исследуемого физического процесса, состояния описываются нелинейными уравнениями математической физики (УМФ) с разрывными коэффициентами и, кроме того, изначально по своей физико-математической постановке, сами решения УМФ допускают разрывы. Такие задачи оптимизации мало изучены, хотя развитие теории и методов их решения вызвано потребностями математического моделирования подобных оптимальных процессов, большой прикладной важностью таких задач.

В настоящей работе рассмотрена и исследована нелинейная задача оптимального управления для полулинейного уравнения эллиптического типа с переменными коэффициентами в неоднородных анизотропных средах с разрывными коэффициентами и решением (с условиями сопряжения типа неидеального контакта [1]-[3]). Построены и исследованы разностные аппроксимации экстремальных задач, установлены оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию и функционалу, слабая сходимость по управлению. Проведена регуляризация аппроксимаций. При этом исследования аппроксимаций проводятся для дифференциальных уравнений, описывающих разрывные состояния процессов управления с обобщенными решениями из классов Соболева, при естественных незавышенных априорных требованиях к гладкости входных данных и управлений.

В теплофизических терминах поставленную задачу можно трактовать как задачу оптимального управления коэффициентами теплоотдачи $d_1(x)$ и $d_2(x)$, входящими в нелинейные слагаемые $d_1(x)q_1(u)$ и $d_2(x)q_2(u)$, характеризующие мощность нелинейных стоков тепла, зависящих от температуры и распределенных в областях Ω_1 и Ω_2.

[1] Профессор кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа.

[2] Доцент кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; aygulrm@mail.ru.

[3] Доцент кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; fairuzovme@mail.ru.

2. Постановка задач оптимизации для полулинейного эллиптического уравнения с разрывными коэффициентами и решением и их корректность

Пусть $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ – прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega = \Gamma$. И пусть область Ω разделена прямой $x_1 = \xi$, где $0 < \xi < l_1$ («внутренней границей» $\overline{S} = \{x_1 = \xi,\ 0 \le x_2 \le l_2\}$, где $0 < \xi < l_1$) на подобласти $\Omega_1 \equiv \Omega^- = \{0 < x_1 < \xi,\quad 0 < x_2 < l_2\}$ и $\Omega_2 \equiv \Omega^+ = \{\xi < x_1 < l_1,\quad 0 < x_2 < l_2\}$ (на левую и правую подобласти Ω^- и Ω^+) с границами $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$ и $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$. Так что область Ω есть объединение областей Ω_1 и Ω_2 и внутренних точек «контактной границы $\overline{S}$» подобластей Ω_1 и Ω_2, а $\partial\Omega$ – внешняя граница области Ω (в отличие от S - внутренней границы области Ω). Далее, будем обозначать через $\overline{\Gamma}_k$ – границы областей Ω_k без S, $k = 1, 2$, так что $\partial\Omega_1 = \overline{\Gamma}_1 \cup S$, $\partial\Omega_2 = \overline{\Gamma}_2 \cup S$, где части Γ_k, $k = 1, 2$ – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ ($\overline{\Gamma}_k$ – оставшаяся часть $\partial\Omega_k$ после вычета S), $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$. Через n_α, $\alpha = 1, 2$ будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$ области Ω_α, $\alpha = 1, 2$. Пусть, далее, $n = n(x)$ – единичная нормаль к S в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль n является внешней нормалью к S по отношению к области Ω_1, то есть нормаль n направлена внутрь области Ω_2. Ниже при постановке краевых задач, S – это прямая, вдоль которой разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях Ω_1 и Ω_2 обладают некоторой гладкостью. В дальнейшем на кусках $\mathring{\Gamma}_k$, $k = 1, 2$ границ $\partial\Omega_k$ положительной меры будут задаваться граничные условия определенного типа.

Пусть условия управляемого физического процесса позволяют моделировать его в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух подобластей Ω_1 и Ω_2, разбитой на части внутренней границей S, следующей задачей, а именно:

требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$ вида $u(x) = u_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1 = \Omega^-$, $u(x) = u_2(x)$, $x \in \overline{\Omega}_2 = \Omega^-$, где компоненты $u_1(x)$ и $u_2(x)$ удовлетворяют условиям:
1) функции $u_k(x)$, $k = 1, 2$, определенные на $\overline{\Omega}_k = \Omega_k \cup \partial\Omega_k$, удовлетворяют в Ω_k уравнениям

$$L_k\, u_k = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha^{(k)}(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right) + d_k(x) q_k(u_k) = f_k(x), \quad \text{в } \Omega_k,\ k = 1, 2, \tag{2.1}$$

а на границах $\partial\Omega_k \setminus S = \overline{\Gamma}_k$ условиям

$$u_k(x) = 0, \quad x \in \overline{\Gamma}_k,\ k = 1, 2; \tag{2.2}$$

2) искомые функции $u_k(x)$, $k = 1, 2$, удовлетворяют еще дополнительным условиям на S – границе разрыва коэффициентов и решения, позволяющим «сшить» решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ вдоль контактной границы S областей Ω_1 и Ω_2:

$$G(x) = k_1^{(1)}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = k_1^{(2)}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \theta(x_2)\left(u_2(x) - u_1(x)\right), \quad x \in S. \tag{2.3}$$

Если ввести функции вида

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1; \\ u_2(x), & x \in \Omega_2, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$k_\alpha(x), d(x), f(x), q(\xi) = \begin{cases} k_\alpha^{(1)}(x), d_1(x), f_1(x), q_1(\xi), & x \in \Omega_1; \\ k_\alpha^{(2)}(x), d_2(x), f_2(x), q_2(\xi), & x \in \Omega_2, \quad \alpha = 1, 2, \end{cases} \tag{2.5}$$

то задачу (2.1) – (2.3) можно переписать в более компактном виде:

Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 полулинейному уравнению

$$Lu(x) = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + d(x)q(u) = f(x), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \tag{2.6}$$

граничным условиям на внешней границе $\partial\Omega$ и условиям сопряжения на внутренней границе S (на границе раздела областей Ω_1 и Ω_2)

$$\begin{gathered} u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = (\partial\Omega_1 \setminus S) \cup (\partial\Omega_2 \setminus S)\,, \\ \big[k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\big] = 0, \quad G(x) = \big(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\big) = \theta(x_2)[u], \quad x \in S, \end{gathered} \tag{2.7}$$

где $[u] = u_2(x) - u_1(x) = u^+ - u^-$ – скачок функции $u(x)$ на S, а $k_\alpha(x), f(x)$ и $q(\xi)$, $\alpha = 1,2$ – известные функции, определяемые по-разному в Ω_1 и Ω_2, обладающие некоторыми условиями гладкости в соответствующих областях Ω_k, $k = 1,2$, претерпевающими разрыв на S первого рода; $\theta(x_2)$ – заданная функция; $g(x) = \big(d_1(x), d_2(x)\big)$ – управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $k_\alpha(x) \in W^1_\infty(\Omega_1) \times W^1_\infty(\Omega_2)$, $0 < \nu \le k_\alpha(x) \le \overline{\nu}$, $\alpha = 1,2$, $x \in \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\theta(x_2) \in L_\infty(S)$, $0 < \theta_0 \le \theta(x_2) \le \overline{\theta}_0$, $x \in S$, $f(x) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_1)$, $\nu, \overline{\nu}, \theta_0, \overline{\theta}_0$ – заданные константы; функции $q_\alpha(\xi)$ определены на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$ и удовлетворяют условиям: $q_\alpha(0) = 0, \qquad 0 < q^0 \le \dfrac{q_\alpha(\xi_1) - q_\alpha(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} \le L_q < \infty, \quad$ для всех $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R},\ \xi_1 \ne \xi_2$.

Введем множество допустимых управлений

$$U_k = \big\{g_k(x) = d_k(x) \in H^{(k)} :\ 0 < d_0 \le d_k(x) \le \overline{d}_0 \text{ п.в. на } \Omega_k\big\}, \quad k = 1,2, \tag{2.8}$$

где $H^{(k)} = L_2(\Omega_k)$ – пространство управлений, $U_k \subset H^{(k)}$, $U = \prod\limits_{k=1}^{2} U_k$, $H = H^{(1)} \times H^{(2)}$, d_0, $\overline{d}_0$ – заданные числа, а п.в. – почти всюду. Зададим функционал цели $J: U \to \mathbb{R}$ в виде

$$g \to J(g) = \int\limits_{\Omega_1} \left|u(x_1, x_2; g) - u_0^{(1)}(x)\right|^2 d\Omega_1 = I(u(x,g)), \tag{2.9}$$

где $u_0^{(1)} \in W^1_2(\Omega_1)$ – заданная функция. Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $g_* \in U$, которое минимизирует на множестве $U \subset H$ функционал цели $g \to J(g)$, точнее, на решениях $u(x) = u(x;g)$ задачи (2.6) – (2.7), отвечающих всем допустимым управлениям $g = \big(d_1, d_2\big) \in U$, требуется минимизировать функционал цели (2.9).

Введем в рассмотрение пространство $V(\Omega^{(1,2)})$, $\Omega^{(1,2)} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ пар функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$:

$$V(\Omega^{(1,2)}) = \big\{u(x) = (u_1(x), u_2(x)) \in W^1_2(\Omega_1) \times W^1_2(\Omega_2)\big\}\,. \tag{2.10}$$

Здесь $W^1_2(\Omega_k)$, $k = 1,2$ – Соболевские пространства функций, заданных в подобластях Ω_k, $k = 1,2$, с границами $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$ и нормой [4]

$$\|u_k\|_{W^1_2(\Omega_k)} = \int\limits_{\Omega_k} \left[\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 + u_k^2\right] d\Omega_k, \quad k = 1,2. \tag{2.11}$$

Снабженное скалярным произведением и нормой

$$(u,\vartheta)_V = (u_1,\vartheta_1)_{W_2^1(\Omega_1)} + (u_2,\vartheta_2)_{W_2^1(\Omega_2)}, \quad \|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^{2} \|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)}, \tag{2.12}$$

$V = V(\Omega^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

Можно показать, что в гильбертовом пространстве $V(\Omega^{(1,2)})$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Gamma_k} u_k^2\, d\Gamma_k + \int\limits_S [u]^2\, dS. \tag{2.13}$$

Пусть $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ – часть $\partial\Omega_k$. Через $W_2^1\left(\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ обозначим замкнутое подпространство пространства $W_2^1(\Omega_k)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega}_k)$, равных нулю вблизи $\overset{\circ}{\Gamma}_k\subset \partial\Omega_k$, $k=1,2$ – какого-либо участка $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$.

Введем в рассмотрение пространство $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ пар функций $u(x)=(u_1(x),u_2(x))$:

$$\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \left\{u(x)=(u_1(x),u_2(x))\in W_2^1(\Omega_1;\Gamma_1)\times W_2^1(\Omega_2;\Gamma_2)\right\} \tag{2.14}$$

с нормой:

$$\|u\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = \|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \int\limits_S [u]^2\, dS. \tag{2.15}$$

Под решением прямой задачи (2.6) – (2.6) при фиксированном управлении $g(x) = \big(d_1(x), d_2(x)\big)$ понимается функция $u(x)\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} Q(u,\vartheta) = \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2}\left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha} + d(x)\,q(u)\,\vartheta\right] d\Omega^{(1,2)} + \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2}\theta(x)[u][\vartheta]dS = \\ = \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} f(x)\,\vartheta d\Omega^{(1,2)} = l(\vartheta), \qquad \forall\vartheta\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Теорема 2.1. *При любом $g\in U$ существует единственное обобщенное решение $u(x)\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0)$ задачи (2.6) – (2.6) в смысле определения (2.16). Задача о нахождении обобщенного решения из (2.16) эквивалентна решению операторного уравнения $Au=F$, где нелинейный оператор $A:\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}\to\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ определяется равенством $(Au,\vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = Q(u,\vartheta)$, $\forall u,\vartheta\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, а правая часть $F\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ определяется соотношением $(F,\vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = l(\vartheta)$, $\forall\vartheta\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, причем справедлива априорная оценка $\|u(x,g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} \le C\sum\limits_{k=1}^{2}\|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)}$.*

В дальнейшем, при исследовании разностных аппроксимаций задач оптимального управления по состоянию и функционалу сделаем относительно гладкости решения прямой задачи следующее предположение (аналогичное предположению, сделанному в работе

[14], с.16 при исследовании там разностных схем для задачи с такими же условиями сопряжения), а именно: решение краевой задачи $(2.6)-(2.6)$ принадлежит $W_2^2(\Omega_1)\times W_2^2(\Omega_2)$, точнее, принадлежит пространству

$$\overset{\circ}{\hat{V}}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) \cap \{u=(u_1,u_2)\in W_2^2(\Omega_1)\times W_2^2(\Omega_2)\}, \tag{2.17}$$

и при каждом фиксированном управлении $g\in U$ справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{2}\|u_k(x,g)\|_{W_2^2(\Omega_k)} \le M\sum_{k=1}^{2}\|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)}, \qquad \forall g\in U, \tag{2.18}$$

где $M=Const>0$, не зависящая от управления $g(x)=\big(d_1(x),d_2(x)\big)\in U$.

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления (2.6)-(2.9). Справедлива следующая теорема о разрешимости экстремальной задачи (2.6)-(2.9).

Теорема 2.2. *Существует, по крайней мере, одно оптимальное управление $g_*\in U$ задачи (2.6)-(2.9), т.е. $J_*=\inf\big\{J(g):g\in U\big\}>-\infty$, $U_*=\big\{g_*\in U: J(g_*)=J_*\big\}\neq\emptyset$. Множество точек минимума U_* функционала цели $J(g)$ в экстремальной задаче (2.6)-(2.9) слабо бикомпактно в $H=L_2(\Omega_1)\times L_2(\Omega_2)$. Любая минимизирующая последовательность $\big\{g^{(n)}\big\}_{n=1}^{\infty}\subset U$ функционала $J(g)$ слабо в H сходится к множеству U_*.*

3. Разностная аппроксимация задач оптимального управления. Корректность аппроксимаций

В связи с численным решением задач оптимального управления существенный интерес представляет вопрос об аппроксимации бесконечномерных задач оптимизации (2.6)-(2.9) последовательностью конечномерных задач оптимального управления. Для аппроксимации задачи (2.6)-(2.9) и исследования сходимости разностных аппроксимаций нам понадобятся некоторые сетки на $[0,l_\alpha]$, $\alpha=1,2$, и в $\overline{\Omega}$, скалярные произведения и нормы в $\overline{\Omega}$ (по поводу определения сеток, норм и скалярных произведений см. [11]).

Определим сеточные аналоги скалярных произведений следов сеточных функций $y_k(x)$ и $\nu_k(x)$, $x\in\overline{\omega}^{(k)}$ на границах $\partial\omega^{(k)}$ сеток $\omega^{(k)}$, $k=1,2$:

$$(y_k,\nu_k)_{L_2(\partial\omega^{(k)})}=\sum_{x\in\partial\omega^{(k)})} y_k(x)\,\nu_k(x)\,\tau_k(x), \quad k=1,2,$$

и сеточные аналоги норм $L_2(\partial\omega^{(k)})$, порождаемые этими скалярными произведениями

$$\|y_k\|^2_{L_2(\partial\omega^{(k)})}=(y_k,y_k)_{L_2(\partial\omega^{(k)})}=\sum_{\partial\omega^{(k)}} y_k^2(x)\tau_k(x), \quad k=1,2,$$

$$\tau_1(x)=\begin{cases} h_1(x_1), & x_1\in\omega_1^{(1)},\ x_2=0,l_2;\\ h_2(x_2), & x_2\in\omega_2,\ x_1=0,\xi;\\ \dfrac{h_1(x_1)+h_2(x_2)}{2}, & x\in\widetilde{\gamma}^{(1)}, \end{cases}$$

$$\tau_2(x)=\begin{cases} h_1(x_1), & x_1\in\omega_1^{(1)},\ x_2=0,l_2;\\ h_2(x_2), & x_2\in\omega_2,\ x_1=\xi,l_1;\\ \dfrac{h_1(x_1)+h_2(x_2)}{2}, & x\in\widetilde{\gamma}^{(2)}, \end{cases}$$

$\widetilde{\gamma}^{(k)}$ – множество угловых точек прямоугольника Ω_k, $k=1,2$. В подробной записи, например, сеточный аналог нормы будет $L_2(\partial\omega^{(1)})$ определяться с помощью выражения

$$\|y_1\|^2_{L_2(\partial\omega^{(1)})}=\sum_{x_2\in\overline{\omega}_2}\left[y_1^2(0,x_2)+y_1^2(\xi,x_2)\right]\hbar_2(x_2)+\sum_{x_1\in\overline{\omega}_1}\left[y_1^2(x_1,0)+y_1^2(x_1,l_2)\right]\hbar_1(x_1).$$

Пусть теперь $\overset{0}{\gamma}{}^{(k)}=\partial\omega^{(k)}\cap\overset{0}{\Gamma}_k\equiv\partial\omega^{(k)}\setminus S_\xi$ – подмножество граничных узлов $\partial\omega^{(k)}$ сетки $\overline{\omega}^{(k)}\subset\overline{\Omega}_k$, $k=1,2$. Через $L_2\left(\overline{\omega}^{k)},\gamma^{(k)}\right)$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $L_2\left(\overline{\omega}^{(k)}\right)$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$ с нормами

$$\|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})}=\sum_{x\in\omega^{(k)}}y_k^2(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{x\in S_\xi}y_k^2(x)h_1h_2=\sum_{x\in\omega^{(k)}}y_k^2(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{x_2\in\omega_2}y_k^2(\xi,x_2)h_1h_2,$$

$k=1,2$, индуцированными скалярными произведениями

$$(y_k,\nu_k)_{L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})}=\sum_{x\in\omega^{(k)}}y_k(x)\nu_k(x)\,h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{x\in S_\xi}y_k(x)\nu_k(x)\,h_1h_2,\qquad k=1,2.$$

В дальнейшем $\|y_k\|^2_{L_2(S_\xi)}=\sum\limits_{x\in S_\xi}y^2(x)h_2=\sum\limits_{x_2\in\omega_2}y^2(\xi,x_2)h_2$. Нетрудно видеть, что

$$(y_1,\nu_1)_{L_2(\overline{\omega}^{(1)};\gamma^{(1)})}=(y_1,\nu_1)_{L_2(\omega^{(1)+}\times\omega_2)},\qquad(y_2,\nu_2)_{L_2(\overline{\omega}^{(2)};\gamma^{(2)})}=(y_2,\nu_2)_{L_2(\omega^{(2)-}\times\omega_2)}.$$

Через $W_2^1\left(\overline{\omega}^{(k)},\gamma^{(k)}\right)$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $W_2^1\left(\overline{\omega}^{(k)}\right)$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k=1,2$. Справедливы неравенства

$$\|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})}\le C\,\|\nabla y_k\|^2,\qquad C=Const>0,\quad k=1,2.$$

Введем в рассмотрение пространство $\overset{0}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}\ (\overline{\omega}^{(1,2)})$ и $\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}\ (\overline{\omega}^{(1,2)})$ пар сеточных функций $y=(y_1,y_2)$: $\overset{0}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}\ (\overline{\omega}^{(1,2)})=\big\{y(x)=(y_1(x),y_2(x))\in L_2(\overline{\omega}^{(1)},\gamma^{(1)})$ $\times L_2(\overline{\omega}^{(2)},\gamma^{(2)})\big\}$, $\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}\ (\overline{\omega}^{(1,2)})=\big\{y(x)=(y_1(x),y_2(x))\in W_2^1(\overline{\omega}^{(1)},\gamma^{(1)})\times W_2^1(\overline{\omega}^{(2)},\gamma^{(2)})\big\}$, с нормами

$$\|y\|^2_{\overset{0}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}}=\sum_{k=1}^{2}\|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)}},\quad\|y\|^2_{\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}}=\sum_{k=1}^{2}\|\nabla y_k\|^2+\|[y]\|^2_{L_2(S_\xi)}.\tag{3.1}$$

Через $e_1^{(1)}(x_1)$ будем обозначать элементарные ячейки отрезка $[0,\xi]$: $e_1^{(1)}(x_1)=\{r_1:x_1-0.5h_1\le r_1\le x_1+0.5h_1\}$, $x_1\in\omega_1^{(1)}\subset[0,\xi]$, $e_1^{(1)}(0)=\{r_1:0\le r_1\le 0.5h_1\}$, $e_1^{(1)}(\xi)=\{r_1:\xi-0.5h_1\le r_1\le\xi\}$, а через $e_1^{(2)}(x_1)$ – элементарные ячейки отрезка $[\xi,l_1]$: $e_1^{(2)}(x_1)=\{r_1:x_1-0.5h_1\le r_1\le x_1+0.5h_1\}$, $x_1\in\omega_1^{(2)}\subset[\xi,l_1]$, $e_1^{(2)}(\xi)=\{r_1:\xi\le r_1\le\xi+0.5h_1\}$, $e_1^{(1)}(l_1)=\{r_1:l_1-0.5h_1\le r_1\le l_1\}$. Введем также элементарные ячейки отрезка $[0,l_2]$: $e_2(x_2)=\{r_2:x_2-0.5h_2\le r_2\le x_2+0.5h_2\}$, $x_2\in\omega_2\subset[0,l_2]$, $e_2(0)=\{r_2:0\le r_2\le 0.5h_2\}$, $e_2(l_2)=\{r_2:l_2-0.5h_2\le r_2\le l_2\}$. Далее, через $e^{(1)}(x)\equiv e^{(1)}(x_1,x_2)=e^{(1)}(x_1)\times e_2(x_2)$, $x\in\overline{\omega}^{(1)}=\overline{\omega}_1^{(1)}\times\overline{\omega}_2\subset\overline{\Omega}_1$ будем обозначать элементарные ячейки области $\overline{\Omega}_1$, а через $e^{(2)}(x)\equiv e^{(2)}(x_1,x_2)=e^{(2)}(x_1)\times e_2(x_2)$, $x\in\overline{\omega}^{(2)}=\overline{\omega}_1^{(2)}\times\overline{\omega}_2\subset\overline{\Omega}_2$ – элементарные ячейки области $\overline{\Omega}_2$. Пусть $\nu(x)=\nu_1(x)$, $x\in\overline{\Omega}_1$. Определим для функций $\nu_1(x)$, $x\in\overline{\Omega}_1$ усредняющие операторы по Стеклову S^{x_α} по переменным x_α:

$$S^{x_1}\nu_1(x)=\frac{1}{\hbar_1}\int\limits_{e_1^{(1)}(x_1)}\nu_1(r_1,x_2)dr_1,\quad x_1\in\overline{\omega}_1^{(1)},\quad \hbar_1=\hbar_1(x_1)=\begin{cases} h_1, & x_1\in\omega_1^{(1)},\\ 0.5h_1, & x_1=0,\xi,\end{cases}$$

$$S^{x_2}\nu_1(x)=\frac{1}{\hbar_2}\int\limits_{e_2(x_2)}\nu_1(x_1,r_2)dr_2,\quad x_2\in\overline{\omega}_2,\quad \hbar_2=\hbar_2(x_2)=\begin{cases} h_2, & x_2\in\omega_2,\\ 0.5h_2, & x_2=0,l_2,\end{cases}$$

С помощью одномерных операторов S^{x_α}, действующих по направлению x_α, $\alpha=1,2$, определим усредняющий оператор $S^x=S^{x_1}S^{x_2}$ как произведение одномерных усредняющих операторов. Аналогично определяются усредняющие операторы по Стеклову для функций $\nu_2(x)$, $x\in\overline{\Omega}_2$. В дальнейшем через $H_h^{(k)}(\omega^{(k)}\cup S_\xi)\equiv L_2(\omega^{(k)}\cup S_\xi)$ будем обозначать пространство сеточных управлений $\Phi_{kh}(x)$, $x\in\omega^{(k)}\cup S_\xi$, заданных на сетке $\omega^{(k)}\cup S_\xi$ со скалярным произведением и нормой:

$$\big(\Phi_{kh},\widetilde{\Phi}_{kh}\big)_{H_h^{(1)}}=\big(\Phi_{kh},\widetilde{\Phi}_{kh}\big)_{H_h^{(k)}(\omega^{(k)}\cup S_\xi)}=\sum_{x\in\omega^{(k)}}\Phi_{kh}(x)\widetilde{\Phi}_{kh}(x)h_1h_2+\tfrac{1}{2}\sum_{x\in S_\xi}\Phi_{kh}(x)\widetilde{\Phi}_{kh}(x)h_1h_2,$$
$$\big\|\Phi_{kh}\big\|^2_{H_h^{(k)}(\omega^{(k)}\cup S_\xi)}=\big(\Phi_{kh},\Phi_{kh}\big)_{H_h^{(k)}}.$$

Задачам оптимального управления $(2.6)-(2.9)$ поставим в соответствие следующие разностные аппроксимации: минимизировать сеточный функционал

$$J_h(\Phi_h)=\sum_{x\in\overline{\omega}^{(1)}}\big|y(x;\Phi_h)-u_{0h}^{(1)}(x)\big|^2\hbar_1\hbar_2=\big\|y(x;\Phi_h)-u_{0h}^{(1)}(x)\big\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(1)})},\tag{3.2}$$

при условиях, что сеточная функция $y(x)\equiv y(x;\Phi_h)=\big(y_1(x;\Phi_h),y_2(x;\Phi_h)\big)\in\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}$, называемая решением разностной краевой задачи для задачи $(2.6)-(2.7)$, удовлетворяет для любой сеточной функции $\nu(x)=\big(\nu_1(x),\nu_2(x)\big)\in\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}$ сумматорному тождеству

$$\begin{aligned}
Q_h(\Phi_h,y,v)=&\Bigg\{\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2}a_{1h}^{(1)}(x)\,y_{1\overline{x}_1}\,v_{1\overline{x}_1}h_1h_2+\Bigg(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+}a_{2h}^{(1)}(x)\,y_{1\overline{x}_2}\,v_{1\overline{x}_2}h_1h_2+\\
&+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+}a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)\,y_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)\,v_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\}+\Bigg\{\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2}a_{1h}^{(2)}(x)\,y_{2\overline{x}_1}\,v_{2\overline{x}_1}h_1h_2+\\
&+\Bigg(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+}a_{2h}^{(2)}(x)\,y_{2\overline{x}_2}\,v_{2\overline{x}_2}h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+}a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)\,y_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)\,v_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\}+\\
&+\Bigg\{\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}}\Phi_{1h}(x)\,q_1(y_1(x))\,\nu_1(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\Phi_{1h}(\xi,x_2)\,q_1(y_1(\xi,x_2))\,\nu_1(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)+\\
&+\Bigg\{\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}}\Phi_{2h}(x)\,q_2(y_2(x))\,\nu_2(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\Phi_{2h}(\xi,x_2)\,q_2(y_2(\xi,x_2))\,\nu_2(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\}+\\
&+\sum_{\omega_2}\theta_h(x_2)\,\big[y(\xi,x_2)\big]\,\big[\nu(\xi,x_2)\big]\,h_2=\Bigg\{\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}}f_{1h}(x)\,\nu_1(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}f_{2h}(\xi,x_2)\,\nu_1(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)+\\
&+\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}}f_{2h}(x)\,\nu_2(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}f_{2h}(\xi,x_2)\,\nu_2(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\}=l_h(v),
\end{aligned}\tag{3.3}$$

а сеточные управления $\Phi_h=\big(\Phi_{1h},\Phi_{2h}\big)$ таковы, что

$$\begin{gathered}\Phi_{kh}(x)\in U_{kh}=\big\{\Phi_{kh}(x)\in H_h^{(k)}=L_2(\omega^{(k)}\cup S_\xi):0<d_0\le\Phi_{kh}(x)\le\overline{d}_0,\\ x\in\omega^{(k)}\cup S_\xi\big\},\quad k=1,2.\end{gathered}\tag{3.4}$$

Здесь $a_{\alpha h}^{(1)}(x)$, $a_{\alpha h}^{(2)}(x)$, $f_{\alpha h}(x)$, $\alpha = 1, 2$, $\theta_h(x_2)$, $u_{0h}^{(1)}(x)$ – сеточные аппроксимации функций $k_\alpha^{(1)}(x)$, $k_\alpha^{(2)}(x)$, $f_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$, $\theta(x_2)$, $u_0^{(1)}(x)$, определяемые через усреднения по Стеклову:

$$
\begin{aligned}
&a_{1h}^{(\alpha)}(x_1, x_2) = \frac{1}{h_2} \int\limits_{e_2(x_2)} k_1^{(\alpha)}(x_1 - 0.5h_1, r_2)\, dr_2, \qquad x \in \omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2, \quad \alpha = 1, 2;\\
&a_{2h}^{(\alpha)}(x_1, x_2) = \frac{1}{h_1} \int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_2^{(\alpha)}(r_1, x_2 - 0.5h_2)\, dr_1, \qquad x \in \omega_1^{(\alpha)} \times \omega_2^{+}, \quad \alpha = 1, 2;\\
&a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) = \frac{2}{h_1} \int\limits_{\xi - 0.5h_1}^{\xi} k_2^{(1)}(r_1, x_2 - 0.5h_2)\, dr_1, \qquad x_2 \in \omega_2^{+};\\
&a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) = \frac{2}{h_1} \int\limits_{\xi}^{\xi + 0.5h_1} k_2^{(2)}(r_1, x_2 - 0.5h_2)\, dr_1, \qquad x_2 \in \omega_2^{+};\\
&f_{\alpha h}(x) = \frac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_{e^{(\alpha)}(x)} d_\alpha(r_1, r_2)\, dr_1 dr_2, \qquad x \in \omega^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2;\\
&f_{1h}(\xi, x_2) = \frac{2}{h_1 h_2} \int\limits_{\xi - 0.5h_1}^{\xi} \int\limits_{e_2(x_2)} d_1(r_1, r_2)\, dr_1 dr_2, \quad x_2 \in \omega_2;\\
&f_{2h}(\xi, x_2) = \frac{2}{h_1 h_2} \int\limits_{\xi}^{\xi + 0.5h_1} \int\limits_{e_2(x_2)} d_2(r_1, r_2)\, dr_1 dr_2, \qquad x_2 \in \omega_2;\\
&\theta_h(x_2) = \frac{1}{h_2} \int\limits_{e_2(x_2)} \theta(r_2)\, dr_2, \quad x_2 \in \omega_2;\\
&u_{0h}^{(1)}(x) = \frac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_{e^{(1)}(x)} u_0^{(1)}(r_1, r_2)\, dr_1 dr_2, \qquad x \in \overline{\omega}^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \times \overline{\omega}_2.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Т е о р е м а 3.1. *Задача о нахождения решения разностной схемы* (3.3) *при любом фиксированном управлении* $\Phi_h \in U_h$ *эквивалентна решению операторного уравнения* $A_h y = F_h$, *где* A_h – *разностный оператор, действующий из* $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ *в* $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ *и сеточная функция* $F_h \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ *определяются равенствами* $(A_h y, \vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}} = Q_h(y, \vartheta)$, $(F_h, \vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}} = l_h(\vartheta)$, $\forall y, \vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$; *задача (разностная схема)* (3.3) *однозначно разрешима для любого сеточного управления* $\Phi_h \in U_h$, *причем справедлива априорная оценка*

$$
\big\| y(x, \Phi_h) \big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \le M\big(\|f_{2h}\|_{L_2(\omega^{(2)} \cup S_\xi)} + \|f_{1h}\|_{L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)} \big). \tag{3.6}
$$

Т е о р е м а 3.2. *Для каждого* $h > 0$ *существует, по крайней мере, одно оптимальное управление* $\Phi_{h*} \in U_h$ *в последовательности сеточных экстремальных задач* (3.2) – (3.5), *т.е.* $J_{h*} = \inf\{J_h(\Phi_h) : \Phi_h \in U_h\} > -\infty$, $U_{h*} = \{\Phi_{h*} \in U_h : J_h(\Phi_{h*}) = J_{h*}\} \neq \emptyset$.

4. Априорные оценки погрешности и скорости сходимости сеточных экстремальных задач по состоянию

Установим связь между $u(r;g)$ – решением прямой задачи (2.6) с разрывными коэффициентами и решением и $y(x,\Phi_h) = \big(y_1(x,\Phi_h), y_2(x,\Phi_h)\big)$ – решением аппроксимирующей ее разностной задачи состояния (3.3) при $h \to 0$, для любых фиксированных управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$, где U и U_h – множества допустимых управлений в задачах оптимального управления (2.6)-(2.9) и $(3.2)-(3.5)$ соответственно. Пусть $u(r;g) = \big(u_1(r;g), u_2(r;g)\big) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0)$ – решение прямой задачи (2.6), отвечающее допустимому управлению $g \in U$, а $y(x,\Phi_h) = \big(y_1(x,\Phi_h), y_2(x,\Phi_h)\big) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ – решение задачи (3.3), отвечающее сеточному управлению $\Phi_h \in U_h$. Обозначим через $z(x) \equiv z(x;g,\Phi_h) = \big(z_1(x;g,\Phi_h), z_2(x;g,\Phi_h)\big) = \big(y_1(x;\Phi_h) - u_1(x;g), y_2(x;\Phi_h) - u_2(x;g)\big)$ – погрешность метода по состоянию.

Априорную оценку погрешности метода по состоянию устанавливает

Теорема 4.1. *Пусть $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ – произвольные управления, а $u(r;g)$ и $y(x,\Phi_h)$ – соответствующие им решения задач состояния в экстремальных задачах (2.6)-(2.9) и $(3.2)-(3.5)$. Тогда для любых $h>0$ справедлива следующая оценка скорости сходимости метода сеток по состоянию для экстремальной задачи (2.6)-(2.9):*

$$\|z(x;g,\Phi_h)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} = \|y(x;\Phi_h) - u(x;g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \le C\Big\{|h|\Big[\sum_{\alpha=1}^{2}\big(\|k_1^{(\alpha)}\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + \\ + \sum_{\alpha=1}^{2}\|k_2^{(\alpha)}\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + L\,q_\alpha\|d_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)}\big)\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} + \|\theta\|_{L_\infty(0,l_2)}\sum_{\alpha=1}^{2}\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)}\Big] + \\ + \|S^x d_1(x) - \Phi_{1h}(x)\|_{L_2(\omega^{(1)}\cup S_\xi)} + \|S^x d_2(x) - \Phi_{2h}(x)\|_{L_2(\omega^{(2)}\cup S_\xi)}\Big\}. \tag{4.1}$$

5. Оценки погрешности сеточного функционала и скорости сходимости сеточных аппроксимаций по функционалу, сходимость по управлению. Регуляризация аппроксимаций

Для ответа на вопрос о сходимости сеточных задач оптимального управления $(3.2)-(3.5)$ по функционалу и управлению необходимо, прежде всего, установить связь между функционалами $J_h(\Phi_h)$ и $J(g)$ экстремальных задач (2.6)-(2.9) и $(3.2)-(3.5)$, для любых фиксированных управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$, и любых $h>0$.

Оценку погрешности сеточного функционала $J_h(\Phi_h)$ экстремальной задачи $(3.2)-(3.5)$ устанавливает следующая

Теорема 5.1. *Для любых управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ экстремальных задач (2.6)-(2.9) и $(3.2)-(3.5)$ соответственно и любых $h>0$ для погрешности сеточного функционала $J_h(\Phi_h)$ экстремальной задачи $(3.2)-(3.5)$ справедлива оценка:*

$$\big|J(g) - J_h(\Phi_h)\big| = \big|I(u(r;g)) - I_h(y(x;\Phi_h))\big| \le M\big[|h| + \\ + \|S^x d_1(x) - \Phi_{1h}(x)\|_{L_2(\omega^{(1)}\cup S_\xi)} + \|S^x d_2(x) - \Phi_{2h}(x)\|_{L_2(\omega^{(2)}\cup S_\xi)}\big], \tag{5.1}$$

где $M = Const > 0$, не зависящая от h, y, u, Φ_h, g.

Рассмотрим сеточные управления $\Phi_{kh}(x)$, $x=(x_1,x_2)\in\omega^{(k)}\cup S_\xi$ и определим кусочно-постоянные восполнения на Ω_k сеточных управлений $\Phi_{kh}(x)$, $x\in\omega^{(k)}\cup S_\xi$, $k=1,2$ по формулам

$$\hat{g}_h^{(k)}(r)=\widehat{P}_{kh}\Phi_{kh}(r)=\Phi_{kh}(x),\quad r\in\hat{e}^{(k)}(x),\quad x\in\omega^{(k)}\cup S_\xi, \tag{5.2}$$

где $\hat{e}^{(k)}(x)\subset\overline{\Omega}_k$ – элементарные ячейки области $\overline{\Omega}_k$, $k=1,2$ (см. [11]):

Для исследования сходимости разностных аппроксимаций задач оптимального управления (2.6)-(2.9) по функционалу и управлению рассмотрим последовательность разностных задач минимизации $(3.2)-(3.5)$, зависящих от шага $h=(h_1,h_2)$ сетки $\overline{\omega}=\overline{\omega}^{(1)}\cup\overline{\omega}^{(2)}=\overline{\omega}^{(1,2)}\subset\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2$ при $|h|\to 0$. Для исследования связи между экстремальными задачами (2.6)-(2.9) и $(3.2)-(3.5)$ введем отображения:

$$R_h:\ H\to H_h,\quad \widehat{P}_h:\ H_h\to H, \tag{5.3}$$

которые определим следующим образом: $R_hg=\Phi_h$, где $g=(d_1,d_2)$, $\Phi_h=\big(R_{1h}g_1,R_{2h}g_2\big)=\big(S^xd_1(x),S^xd_2(x)\big)$, $R_{kh}d_k=S^xd_k(x)$, $x\in\omega^{(k)}\cup S_\xi$ – дискретизации на сетках $x\in\omega^{(k)}\cup S_\xi$ управлений $g_k(r)\equiv d_k(r)=d_k(r_1,r_2)$, $r\in\Omega_k$, $k=1,2$, где $S^x=S^{x_1}S^{x_2}$ – оператор усреднения по Стеклову; а $\widehat{P}_h\Phi_h=g$, где $\Phi_h=\big(\Phi_{1h},\Phi_{2h}\big)$, $g=\big(\widehat{P}_{1h}\Phi_{1h}(r),\widehat{P}_{2h}\Phi_{2h}(r)\big)$, $\widehat{P}_{kh}\Phi_{kh}(r)$ – кусочно-постоянные восполнения на Ω_k сеточных управлений $\Phi_{kh}(x)$, $x\in\omega^{(k)}\cup S_\xi$, $k=1,2$, определяемые формулой (5.2).

Теорема 5.2. *Пусть J_* и J_{h*} – нижние грани функционалов $J(g)$ и $J_h(\Phi_h)$ в экстремальных задач (2.6)-(2.9) и $(3.2)-(3.5)$ соответственно. Семейство сеточных задач $(3.2)-(3.5)$, зависящих от шага $h=(h_1,h_2)$ сетки $\overline{\omega}=\overline{\omega}^{(1)}\cup\overline{\omega}^{(2)}=\overline{\omega}^{(1,2)}\subset\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2$ при $|h|\to 0$ аппроксимирует исходную экстремальную задачу (2.6)-(2.9) по функционалу, т.е. $\lim J_{h*}=J_*$ при $|h|\to 0$, и справедлива оценка скорости сходимости*

$$\big|J_{h*}-J_*\big|\le M\,|h|. \tag{5.4}$$

Предположим теперь, что при каждом $h=(h_1,h_2)$ и соответствующей сетки $\overline{\omega}=\overline{\omega}_h=\overline{\omega}^{(1)}\cup\overline{\omega}^{(2)}$ с помощью какого-либо метода минимизации получено приближенное значение $J_{h*}+\varepsilon_h$ нижней грани J_{h*} функционала $J_h(\Phi_h)$ на U_h в задаче $(3.2)-(3.5)$ и найдено сеточное управление $\Phi_{h\varepsilon_h}(x)\in U_h$, дающее приближенное решение задачи $(3.2)-(3.5)$ в следующем смысле:

$$J_{h*}\le J_h(\Phi_{h\varepsilon_h})\le J_{h*}+\varepsilon_h,\quad \Phi_{h\varepsilon_h}\in U_h, \tag{5.5}$$

где последовательность ε_h такова, что $\varepsilon_h\ge 0$ и $\varepsilon_h\to 0$ при $|h|\to 0$. Здесь последовательность ε_h характеризует точность решения задачи минимизации функционала $J_h(\Phi_h)$ на U_h.

Возникает вопрос, можно ли принять сеточное управление $\Phi_{h\varepsilon_h}(x)\in U_h$ из (5.5) в качестве некоторого приближения оптимального управления задачи (2.6)-(2.9).

Теорема 5.3. *Пусть последовательность сеточных управлений $\big\{\Phi_{h\varepsilon_h}\big\}\subset U_h$ определена из условий (5.5). Тогда последовательность управлений $\big\{\widehat{P}_h\Phi_{h\varepsilon_h}(r)\big\}$, где $\widehat{P}_h:\ H_h\to H$ – отображение, определяемое из (5.3), является минимизирующей для функционала $J(g)$ исходной задачи (2.6)-(2.9), то есть $\lim J(\widehat{P}_h\Phi_{h\varepsilon_h})=J_*$ при $|h|\to 0$ и справедлива оценка скорости сходимости*

$$0\le J(\widehat{P}_h\Phi_{h\varepsilon_h})-J_*\le C\,|h|+\varepsilon_h.$$

Последовательность $\big\{\widehat{P}_h\Phi_{h\varepsilon_h}(r)\big\}$ слабо в $H=L_2(\Omega_1)\times L_2(\Omega_2)$ сходится к множеству $U_*\neq\emptyset$ оптимальных управлений исходной экстремальной задачи (2.6)-(2.9).

З а м е ч а н и е 5.1. *Из оценки* (5.4) *и неравенства* (5.5) *нетрудно получить, что* $\lim J_h(\Phi_{h\varepsilon_h}) = J_*$ *при* $|h| \to 0$, *причем справедлива оценка скорости сходимости*

$$\left|J_h(\Phi_{h\varepsilon_h}) - J_*\right| \le M\,|h| + \varepsilon_h.$$

Рассмотрим теперь вопрос о сильной сходимости в H по аргументу (управлению) разностных аппроксимаций (3.2) – (3.5). В силу теоремы 2.2. задача (3.2) – (3.5) корректно поставлена в слабой топологии пространства H. Однако, вообще говоря, она является некорректно поставленной задачей минимизации по А.Н. Тихонову в сильной топологии пространства H, то есть нет основания ожидать, что любая минимизирующая последовательность (в том числе и последовательность из теоремы 5.3.) будет сходящейся в норме H ко множеству U_*. Для разработки устойчивых алгоритмов построения сильно сходящихся минимизирующих последовательностей успешно применяется известный метод регуляризации А.Н. Тихонова [15], [16]. Рассмотрим один вариант метода регуляризации А.Н. Тихонова, позволяющий построить для исходной экстремальной задачи минимизирующую последовательность получаемую на основе разностной аппроксимации, сильно сходящуюся к множеству «Ω -нормальных решений» задачи оптимального управления (2.6)-(2.9). Будем допускать, что вычисления сеточных функционалов $J_h(\Phi_h)$ ведутся приближенно, как в силу приближенной исходной информации, так и в силу того, что счет ведется с округлениями, так что вместо функционала $J_h(\Phi_h)$, фактически используется приближенный функционал $J_{h\delta_h}(\Phi_h)$, который связан с $J_h(\Phi_h)$ соотношениями

$$J_{h\delta_h}(\Phi_h) = J_h(\Phi_h) + \theta_{\delta_h}(\Phi_h), \qquad \left|\theta_{\delta_h}(\Phi_h)\right| \le \delta_h, \quad \forall \Phi_h \in U_h, \quad \delta_h \to +0 \text{ при } |h| \to 0.$$

Для регуляризации семейства сеточных экстремальных задач (3.2) – (3.5) введем на U функционал-стабилизатор $\Omega(g) = \|g\|_H^2$, $g \in U$ и его сеточный аналог $\Omega_h(\Phi_h) = \|\Phi_h\|_{H_h}^2$, $\Phi_h \in U_h$. При каждом $h = (h_1, h_2)$ рассмотрим на U_h сеточный функционал Тихонова задачи (3.2) – (3.5): $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) = J_{h\delta_h}(\Phi_h) + \alpha_h\Omega(\Phi_h), \qquad \Phi_h \in U_h$, где $\{\alpha_h\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при $|h| \to 0$. Рассмотрим теперь задачу минимизации функционала $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h)$ на U_h: при каждом $h = (h_1, h_2)$ определим сеточное управление $\widehat{\Phi}_h = \Phi_{h\delta_h\alpha_h\nu_h} \in U_h$, удовлетворяющее условиям

$$T_{h\delta_h\alpha_h *} = \inf\left\{T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) :\ \Phi_h \in U_h\right\} \le T_{h\delta_h\alpha_h}(\widehat{\Phi}_h) \le T_{h\delta_h\alpha_h *} + \nu_h, \tag{5.6}$$

где $\nu_h \ge 0$ и $\nu_h \to +0$ при $|h| \to 0$. Введем множество Ω-нормальных решений задачи оптимального управления (2.6)-(2.9): $U_{**} = \{g_{**} \in U_* :\ \Omega(g_{**}) = \inf \Omega(g_*) :\ g_* \in U_*\}$.

Т е о р е м а 5.4. *Пусть последовательность сеточных управлений* $\{\widehat{\Phi}_h\}$ *определена из условий* (5.6). *Тогда последовательность* $\{\widehat{P}_h\widehat{\Phi}_h(r)\}$, *где отображение* $\widehat{P}_h : H_h \to H$ *определено в* (5.3), *является минимизирующей для функционала* $J(g)$ *исходной экстремальной задачи* (2.6)-(2.9), *то есть* $\lim J(\widehat{P}_h\widehat{\Phi}_h) = J_*$ *при* $|h| \to 0$ *и справедлива оценка скорости сходимости:*

$$0 \le J(\widehat{P}_h\widehat{\Phi}_h) - J_* \le M\big(|h| + \delta_h + \nu_h + \alpha_h\big).$$

Если, кроме того, последовательности $\{\alpha_h\}$, $\{\delta_h\}$, $\{\nu_h\}$ *удовлетворяют условиям* α_h, $\delta_h, \nu_h > 0$, $\alpha_h, \delta_h, \nu_h \to 0$ *при* $|h| \to 0$, *причем* $\{\alpha_h\}$ *стремится к нулю согласовано с величинами* $|h|$, δ_h, ν_h *так, что* $\big(|h| + \nu_h + \delta_h\big)/\alpha_h \to 0$ *при* $|h| \to 0$, *то последовательность* $\{\widehat{P}_h\widehat{\Phi}_h\}$ *сильно в* H *сходится к множеству* Ω *-нормальных (в смысле минимальной нормы) оптимальных управлений* U_{**} *задачи* (2.6)-(2.9), *то есть*

$$\lim \rho\big(\widehat{P}_h\widehat{\Phi}_h; U_{**}\big) = \lim\inf\big\{\|\widehat{P}_h\widehat{\Phi}_h - g_{**}\|_H :\ g_{**} \in U_{**}\big\} = 0, \quad \text{при} |h| \to 0,$$
$$\lim \Omega\big(\widehat{P}_h\widehat{\Phi}_h\big) = \lim\big\|\widehat{P}_h\widehat{\Phi}_h\big\|_H^2 = \Omega_* = \inf \Omega(g_*), \quad g_* \in U_*, \quad \text{при } |h| \to 0.$$

Замечание 5.2. *Можно показать, что* $\lim T_{h\delta_h\alpha_h*} = J_*$, $\lim T_{h\delta_h\alpha_h}(\widehat{\Phi}_h) = J_*$ *при* $|h| \to 0$, *причем справедливы оценки скорости сходимости:*

$$\left|T_{h\delta_h\alpha_h*} - J_*\right| \le M\left[\,|h| + \delta_h + \alpha_h\right], \qquad \left|T_{h\delta_h\alpha_h}(\widehat{\Phi}_h) - J_*\right| \le M\left[\,|h| + \nu_h + \delta_h + \alpha_h\right].$$

Замечание 5.3. *Полученные результаты не зависят от способа решения разностных задач минимизации* (3.2) – (3.5).

Список литературы

1. Самарский А. А., Андреев В. Б., *Разностные методы для эллиптических уравнений*, Наука, М., 1976.
2. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., *Вычислительная теплопередача*, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», М., 2009.
3. Карташов Э. М., *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*, Высшая школа, М., 1985.
4. Ладыженская О. А., *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.
5. Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, Высшая школа, М., 1987.
6. Лубышев Ф. В., "Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для несамосопряженного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами", *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **31**:1 (1991), 17–30.
7. Лубышев Ф. В., *Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных*, БГУ, Уфа, 1999.
8. Лубышев Ф. В., Файрузов М. Э., "Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений", *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **41**:8 (2001), 1148–1164.
9. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., "О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах", *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **47**:3 (2007), 376–396.
10. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., "О разностной аппроксимации задачи оптимального управления для эллиптического уравнения в произвольной области", *Труды Средневолжского математического общества*, **11**:1 (2009), 133–144.
11. Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова, М. Э. Файрузов, "Разностные аппроксимации задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями", *Труды Средневолжского математического общества*, **13**:1 (2011), 32–44.
12. Лубышев Ф. В., "О разностных аппроксимациях задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями", *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **52**:8 (2012), 1378–1399.

13. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., “Разностные аппроксимации задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений в выпуклой области с управлениями в коэффициентах при старших производных”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **53**:1 (2013), 20–46.

14. Дренска Н. Т., “Точность численных алгоритмов для одномерной задачи об остывании металла в формах”, *Вестник Московск. университета*, **15**:4, Вычислит. матем. и кибернетика (1981), 15–21.

15. Васильев Ф. П., *Методы оптимизации*, Факториал Пресс, М., 2002.

16. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1986.

Numerical method of one optimal control problem solution for semilinear elliptic equation with discontinuous coefficients and solution

© F. V. Lubyshev[4], A. R. Manapova[5], M. E. Fairuzov[6]

Abstract. Non-linear optimal control problem for semilinear elliptic equation with discontinuous coefficients and solution, with controls involved in the coefficients is considered and investigated in the work. Method of difference approximation of extremum problem is stated. The convergence rate of the approximations with respect to the state and the functional is estimated, weak convergence with respect to the control is established. The approximations are regularized by Tikhonov.

Key Words: optimal control problem, semilinear elliptic equation, method of difference approximation, regularization method.

[4] Full professor of Applied Informatics and Numerical Methods Chair, Bashkir State University, Ufa.

[5] Associate professor of Applied Informatics and Numerical Methods Chair, Bashkir State University, Ufa; aygulrm@mail.ru.

[6] Associate professor of Applied Informatics and Numerical Methods Chair, Bashkir State University, Ufa; fairuzovme@mail.ru.