УДК 519.853:517.988

О скорости сходимости регуляризованного НПММ второго порядка

© В. Г. Малинов [1]

Аннотация. В работе исследуется регуляризованный непрерывный проекционный метод (НПММ) для решения неустойчивых задач минимизации с неточными исходными данными в гильбертовом пространстве, основанный на непрерывном проекционном методе второго порядка. Доказывается скорость сходимости метода.

Ключевые слова: регуляризованный непрерывный метод минимизации, оценки скорости сходимости.

1. Постановка задачи

Решается задача минимизации на выпуклом замкнутом множестве $Q \subset H$

$$f(\mathbf{x}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{x} \in Q \subset H, \tag{1.1}$$

где Q – простое множество, например, образованное координатными ограничениями, из гильбертова пространства , нормированного скалярным произведением, $\forall\, \mathbf{x} \in H \quad \|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x},\mathbf{x})^{1/2}$. Функция $f(\mathbf{x})$ с "овражными"гиперповерхностями уровней определена, выпукла и непрерывно дифференцируема по Фреше на H, её градиенты Липшицевы, $\exists L = const > 0$:

$$\|\nabla f(\mathbf{u}) - \nabla f(\mathbf{x})\| \leq \; L\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\| \; \mathbf{u}, \mathbf{x} \in H. \tag{1.2}$$

Предполагаем: градиенты $\nabla f(\mathbf{x})$ имеют возмущения;

$$\inf f(\mathbf{x}) = f_* > -\infty, \; \mathbf{x} \in Q; \quad Q_* = \{\mathbf{x} \in Q : \; f(\mathbf{x}) = f_*\} \neq \emptyset. \tag{1.3}$$

Рассмотрим непрерывные проекционные методы минимизации (НПММ) для решения поставленной задачи, ввиду их известных достоинств [1]–[4]. НПММ записываются в форме задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Поскольку задача (1.1) в общем случае неустойчива [5] к возмущениям исходных данных (здесь в задании градиентов функции $f(\mathbf{x})$), то решается с помощью регуляризованных методов (см. [6]–[13]). Регуляризованные НПММ (в частности, проекции градиента (НМПГ)) для этой и других задач минимизации при функциональных ограничениях, предложены и исследованы во многих работах (см., например, работы [10]–[15]). Здесь для решения некорректной задачи (1.1)–(1.3) исследуется регуляризованный НПММ на простом множестве.

2. Метод решения задачи

Пусть функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in C^2[0, +\infty)$ является решением задачи Коши

$$\sigma(t)\mathbf{x}^{''}(t) + \mathbf{x}^{'}(t) + \mathbf{x}(t) = P_Q\left[\mathbf{y}(t) + \beta(t)(\gamma_1(t)\mathbf{x}^{'}(t) - \gamma_2(t)\mathbf{T}^{'}{}_{\delta}(\mathbf{y}(t), t)\right], t \geq 0, \tag{2.1}$$

[1] Доцент кафедры ЭММиИТ, Ульяновский госуниверситет, г. Ульяновск; vgmalinov@mail.ru.

при начальных условиях $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}^1$, где $P_Q[\mathbf{v}]$ – проекция точки $\mathbf{v}$ на множество Q; $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1 \in H$ – начальные точки; производные $\mathbf{x}'(t) = d\mathbf{x}(t)/dt$, $\mathbf{x}''(t) = d^2\mathbf{x}(t)/dt^2$ функции $\mathbf{x}(t)$, $t \geq 0$, со значениями в гильбертовом пространстве H, понимаются (как и в [10]–[13]) в смысле главы 4 книги [16]; $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t)) + \alpha(t)\mathbf{x}'(t)$;

$$\nabla T_\delta(\mathbf{y}(t), t) = \nabla f(\mathbf{y}(t), t) + \tau(t)\mathbf{y}(t),\ \mathbf{y}(t) \in H,\ t \geq 0 - -- \tag{2.2}$$

приближение в точке $\mathbf{y}(t)$ точного градиента $\nabla T(\mathbf{x}(t), t) = \nabla f(\mathbf{x}(t)) + \tau(t)\mathbf{x}(t)$, $\forall\, \mathbf{x}(t) \in H$, $t \geq 0$ функции Тихонова $T(\mathbf{x}(t), t) = f(\mathbf{x}(t)) + \tau(t)\|\mathbf{x}\|^2/2$; $\sigma(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\tau(t)$, $\delta(t)$ — параметры метода (2.1), (2.2); приближенные градиенты функции $f(\mathbf{x}(t))$, следуя работам [8]–[15] и другим, обозначаем $\nabla f(\mathbf{x}(t), t)$ $\forall \mathbf{x} \in Q \subset H$, отмечая их зависимость от параметра $t \geq 0$. Предполагаем, что решение $\mathbf{x}(t)$ задачи (2.1), (2.2) существует на полуоси $[0; +\infty)$ при любых начальных точках $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1 \in H$. В силу условий для функции $f(\mathbf{x}(t))$, функция $T(\mathbf{x}(t), t)$ дифференцируема по Фреше на Q; полагаем, что выполнено свойство её непрерывной дифференцируемости на Q.

Отметим, что: одним из итеративных аналогов метода (2.1), (2.2) служит регуляризованный двухшаговый четырехпараметрический метод, предложенный и исследованный в работе [17]; метод (2.1) построен на основе НПММ второго порядка, исследованного в работе [14]; при $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = 1$, $\gamma_1(t) = 0$, $\sigma(t) = 0$ из (2.1), (2.2) получаем регуляризованный НМПГ [10]; при $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = 1$, $\gamma_1(t) = 0$ из (2.1), (2.2) получим регуляризованный НМПГ второго порядка [11]; сходимость метода (2.1), (2.2) доказана в работе [15], построены правило останова и регуляризующий оператор. Оценки скорости сходимости метода не получены, поэтому их изучение является целью настоящей работы.

3. О сходимости метода

Для возможности ссылок при обосновании оценок скорости сходимости здесь сначала приведём формулировку теоремы сходимости и схему её доказательства. (Аргумент t у функции $\mathbf{x}(t)$, её производных, а также у вводимых коэффициентов, параметров метода и их производных, для краткости часто опускаем; градиенты часто обозначаем штрихом.)

Теорема 1. *Пусть выполнены такие условия: множество $Q \subset H$ выпукло и замкнуто; выпуклая функция $f(\mathbf{x}(t))$ непрерывно дифференцируема по Фреше на H, её градиенты удовлетворяют условию Липшица (1.2); приближения $\nabla f(\mathbf{x}(t), t)$ точных градиентов $\nabla f(\mathbf{x})$ непрерывны по $\mathbf{x}$ при всех $t \geq 0$, измеримы по t при всех $\mathbf{x} \in H$, и*

$$\max \|\nabla f(\mathbf{x}(t), t) - \nabla f(\mathbf{x})\| \leq \delta(t)(1 + \|\mathbf{x}\|)\ \forall\, \mathbf{x} \in H,\ t \geq 0; \tag{3.1}$$

$\sigma(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\tau(t)$, $\delta(t)$ — параметры метода (2.1), (2.2), таковы, что: $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma_2(t)$, $\tau(t) \in C^2[0, \infty)$; $\delta(t) \in C[0, \infty)$; $\gamma_1(t)$, $\sigma(t) \in C^1[0, \infty)$; функция $\tau(t)$ выпуклая; $\sigma(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ ограничены;

$$\begin{gathered}
\sigma(t) > 0,\ \alpha(t) > 0,\ \beta(t) > 0,\ \gamma_1(t) > 0,\\
\gamma_2(t) > 0,\ \tau(t) > 0,\ \delta(t) \geq 0,\ t \geq 0;\\
\tau'(t) \leq 0,\ \alpha'(t) \leq 0,\ \beta'(t) \leq 0,\ \gamma_1'(t) \leq 0,\ \gamma_2'(t) < 0, \sigma'(t) \leq 0,\ t \geq 0;\\
\alpha''(t) \geq 0,\ \beta''(t) \geq 0;\ \gamma_2''(t) \geq 0;\ \tau''(t) \geq 0,\ t \geq 0;\\
\tau + \gamma_2 + \delta \to 0,\ \tau^{-1}(\delta + \delta\gamma_2^{-1} + |\tau'|\gamma_2^{-1}) \to 0;\ t \to \infty;\\
\tau^{-2}(\delta\gamma_2^{-2} + \delta\gamma_2^{-1} + |\tau'|\gamma_2^{-2}) \to 0, \quad t \to \infty;\\
\sigma(t) \to \sigma^0 > 0,\ \beta(t) \to \beta^0 > 0,\ \alpha(t) \to \alpha^0 > 0, \gamma_1(t) \to \gamma_1^0 > 0,\ t \to \infty;\\
\tau'(t) \to 0,\ \alpha'(t) \to 0,\ \beta'(t) \to 0, \gamma_2'(t) \to 0,\ t \to \infty.
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Тогда для метода (2.1), (2.2), (3.2)

$$\Big(\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*\|+\|\mathbf{x}^{'}(t)\|+\|\mathbf{x}^{''}(t)\|\Big)\longrightarrow 0,\quad t\to\infty, \tag{3.3}$$

где $\mathbf{x}^*\in Q_*,\ \|\mathbf{x}^*\|=\inf\|\mathbf{x}\|,\ \mathbf{x}\in Q_*$ *— нормальное решение задачи (1.1). Сходимость в (3.3) равномерная относительно выбора приближенных градиентов* $\nabla f(\mathbf{x}(t),t)$ *из условия (3.1).*

Схема доказательства, данного в работе [15]. Сначала заметим, что в силу предположений теоремы 1 условия (1.3) выполнены, множество минимумов Q_* выпукло и замкнуто, нормальное решение задачи (2.1), (2.2) и минимум функции $f(\mathbf{x}(t))$ существуют. $\exists\ \mathbf{v}^r=\mathbf{v}(r)=argminT(\mathbf{x},r)\ \ \mathbf{x}\in Q,\ r\geq 0$, ввиду сильной выпуклости функции Тихонова на H единственная и

$$\sup_{r\geq 0}\|\mathbf{v}^r\|\leq\|\mathbf{x}^*\|,\ \lim_{r\to\infty}\|\mathbf{v}^r-\mathbf{x}^*\|=0,\ (\mathbf{T}^{'}(\mathbf{v}^r,r),\mathbf{u}-\mathbf{v}^r)\geq 0,\ \mathbf{u}\in Q,\ r\geq 0. \tag{3.4}$$

Из характеристического свойства оператора проектирования ([8], с. 72) и из (2.1), пользуясь идеей из работы [2], получаем вариационное неравенство

$$\Big(\sigma\mathbf{x}^{''}+(1-\alpha-\beta\gamma_1)\mathbf{x}^{'}+\beta\gamma_2\mathbf{T}^{'}{}_{\delta}(\mathbf{y},t),\mathbf{u}-\mathbf{w}\Big)\geq 0\quad\forall\,\mathbf{u}\in Q,\ t\geq 0, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{w}=\mathbf{w}(t)=\sigma\mathbf{x}^{''}+\mathbf{x}^{'}+\mathbf{x}\in Q$.

Положим в (3.5) $\mathbf{u}=\mathbf{v}(r)$ и сложим его с третьим соотношением из (3.4), приняв в нём $\mathbf{u}=\mathbf{w}\in Q$ и умножив на $\beta\gamma_2>0$ (далее полагаем $\mathbf{v}(r)=\mathbf{v}$):

$$\Big(\sigma\mathbf{x}^{''}+(1-\alpha-\beta\gamma_1)\mathbf{x}^{'}+\beta\gamma_2[\mathbf{T}^{'}{}_{\delta}(\mathbf{y},t)-\mathbf{T}^{'}(\mathbf{v},r)],\mathbf{v}-\mathbf{w}\Big)\geq 0\quad t,r\geq 0.$$

Преобразуем это неравенство, пользуясь (2.1), (2.2) и формулой для точного градиента функции Тихонова, к виду

$$\begin{gathered}\big(\sigma\mathbf{x}^{''}+(1-\alpha-\beta\gamma_1)\mathbf{x}^{'}+\beta\gamma_2(\mathbf{f}^{'}(\mathbf{y},t)-\mathbf{f}^{'}(\mathbf{y},\mathbf{v}-\mathbf{w}\big)+\\ +\beta\gamma_2\left(\mathbf{f}^{'}(\mathbf{y})-\mathbf{f}^{'}(\mathbf{v})+\alpha\tau\mathbf{x}^{'}+\mathbf{v}[\tau(t)-\tau(r)],\mathbf{v}-\mathbf{w}\right)+\\ +\beta\gamma_2\tau(t)(\mathbf{x}(t)-\mathbf{v}(r),\mathbf{v}-\mathbf{w})\geq 0,\quad t,r\geq 0.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, неравенством (см. [1], с. 175), $(\nabla f(\mathbf{v})-\nabla f(\mathbf{u}),\mathbf{u}-\mathbf{z})\leq L\|\mathbf{v}-\mathbf{z}\|^2/4,\quad \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{z}\in Q,$ справедливым для выпуклой функции $f(\mathbf{x})\in C^{1,1}(Q)$, из (3.6) получим (часто до (3.12) полагаем $\mathbf{v}(r)=\mathbf{v}$),

$$\begin{gathered}\big(\sigma\mathbf{x}^{''}+a(t)\mathbf{x}^{'},\mathbf{w}-\mathbf{v}\big)+\beta\gamma_2\tau\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2+\\ +\beta\gamma_2\tau(\mathbf{x}(t)-\mathbf{v},\sigma\mathbf{x}^{''}+\mathbf{x}^{'})\leq\\ \leq\beta\gamma_2\|\mathbf{f}^{'}(\mathbf{y},t)-\mathbf{f}^{'}(\mathbf{y})\|\|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|+L\|\mathbf{w}-\mathbf{y}\|^2/4+\\ +\beta\gamma_2|\tau(t)-\tau(r)|\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|,\quad t,r\geq 0,\end{gathered} \tag{3.7}$$

где $a(t)=1-\alpha-\beta\gamma_1+\alpha\beta\gamma_2\tau$. Преобразуем (3.7), пользуясь оценкой

$$\max\left\{\sup_{r\geq 0}\|\mathbf{v}(r)\|;\ \sup_{r\geq 0}\|\nabla f(\mathbf{v}(r))\|\right\}\leq C_0=const. \tag{3.8}$$

следующей из первого соотношения (3.4), неравенствами (3.1),

$$2|ab|\leq\varepsilon a^2+\varepsilon^{-1}b^2,\quad (a+b)^2\leq(1+\varepsilon)a^2+(1+\varepsilon^{-1})b^2,\ \forall\ a,b,\varepsilon>0, \tag{3.9}$$

выбирая подходящие ε, оценками из [15]

$$\|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|^2 \leq (1+\gamma_2)\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + (1+\gamma_2^{-1})\|\sigma\mathbf{x}'' + \mathbf{x}'\|^2,$$
$$\beta\gamma_2\delta(C_0+1+\|\mathbf{y}-\mathbf{v}\|)\|\mathbf{w}-\mathbf{v}\| \leq a_1\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + a_2\|\mathbf{x}''\|^2 + a_3\|\mathbf{x}'\|^2 + a_{14},$$

где $a_1 = \beta\gamma_2\delta(2+3\gamma_2)/2$; $a_2 = \sigma^2\beta\delta(\gamma_2^2+\gamma_2+1)$; $a_3 = 0.5\beta\delta[2\gamma_2^2 + (\alpha^2+2)(\gamma_2+1)]$; $a_{14} = (C_0+1)^2\beta\delta$.

Полученное неравенство с помощью равенств ([2], [4])

$$2(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') = \tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}'\|^2, \quad 2(\mathbf{x}-\mathbf{v}, \mathbf{x}') = \tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2,$$
$$2(\mathbf{x}-\mathbf{v}(r)), \mathbf{x}'') = \tfrac{d^2}{dt^2}\|\mathbf{x}-\mathbf{v}(r)\|^2 - 2\|\mathbf{x}'\|^2, \tag{3.10}$$

преобразуем к виду

$$b_{11}(t)\tfrac{d^2}{dt^2}\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + b_{12}(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + b_{13}(t)\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 +$$
$$+ b_{14}(t)\|\mathbf{x}''\|^2 + b_{15}(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}'\|^2 + b_{16}(t)\|\mathbf{x}'\|^2 \leq Cg(t,r),\ t,r \geq 0, \tag{3.11}$$

где $b_{11}(t) = 0.5\sigma(1+\beta\gamma_2\tau)$; $b_{12}(t) = 0.5(\alpha+\beta\gamma_2\tau)$; $b_{13}(t) = \beta\gamma_2\tau - a_1 - 0.5\beta\gamma_2^2(\gamma_2+1)$; $b_{14}(t) = \sigma^2[1-\beta\delta(\gamma_2^2+\gamma_2+1) - 0.5\beta\gamma_2(1+\gamma_2+2L)]$; $C = \max[(C_0+1)^2; 0.5C_0^2]$; $b_{15}(t) = 0.5\sigma[1+a(t)-\beta\gamma_2(0.5L(1-\alpha)+\gamma_2+1)]$; $g(t,r) = \beta(\delta+|\tau(t)-\tau(r)|^2)$; $b_{16}(t) = a+\sigma-a_3-\beta\gamma_2[(L(1-\alpha)^2-2\gamma_2-2)/4-\sigma\tau]$.

Покажем, что каждое слагаемое в левой части (3.3) стремится к нулю. Умножив (3.11) на функцию $e(t) = \exp\left(\int_0^t \tau(s)\gamma_2(s)\,ds\right)$, проинтегрируем полученное неравенство по $t \in [q,t]$, $t > q \geq t_0$, а затем преобразуем его к виду

$$b_1(t)e\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + [b_2e - (b_1e)']\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + b_4e\|\mathbf{x}'\|^2 \leq$$
$$\leq C\int_q^t g(s,r)e(s)\,ds + C_2(q),\ t > q \geq t_1,\ r \geq 0. \tag{3.12}$$

Проинтегрируем (3.12) на отрезке $[q,t]$ и заменим положительный интеграл нулем; при $r = t$ и всех $t > q \geq t_2$ придём к неравенству:

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{v}(t)\|^2 \leq \frac{2}{\sigma_0 e(t)}\left\{C\int_q^t\int_q^z g(s,t)e(s)\,ds\,dz + C_2(q)(t-q) + C_3(q)\right\}.$$

Здесь под интегралом, поскольку функция $\tau(t)$ выпуклая, монотонная, гладкая, имеет место оценка $0 \leq \tau(s) - \tau(t) \leq -\tau'(s)(t-s)$ при $t \geq s$, то

$$g(s,t) \leq \beta[\delta + |\tau'(s)|^2(t-s)^2],\ t \geq s \geq 0, \tag{3.13}$$

то придём к неравенству

$$\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{v}(t)\|^2 \leq \tfrac{2}{\sigma_0 e(t)}\left(C\int_q^t\int_q^z \beta[\delta+|\tau'(s)|^2(t-s)^2]e(s)\,ds\,dz\right)$$
$$+ \tfrac{2}{\sigma_0 e(t)}(C_2(q)(t-q)+C_3(q)),\ t > q \geq t_2. \tag{3.14}$$

Учитывая (3.2) и соотношения

$$\beta\delta e(t) \to \infty,\ b_1e \to \infty,\ e(t) \to \infty,\ [\tau\gamma_2]^n e(t) \to \infty,\ t \to \infty, \tag{3.15}$$

применяя к правой части (3.14) правило Лопиталя несколько раз, получим:

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\| \to 0,\ t \to \infty, \tag{3.16}$$

и, с учетом неравенства $\|\mathbf{v}-\mathbf{x}^*\| \geq \|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\| - \|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|$, а также второго соотношения из (3.4) при $r=t$, имеем:

$$\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*\| \to 0,\ t \to \infty. \tag{3.17}$$

Докажем, что $\|\mathbf{x}'(t)\| \to 0,\ \|\mathbf{x}''\| \to 0,\ t \to \infty$. Первое соотношение получим, исходя из (3.12) при $t=r$, с учетом (3.9) и оценки при преобразовании (3.12), с учетом (3.13) и (3.16),

$$\|\mathbf{x}'\|^2 \leq \frac{8C}{3\sigma_0 e(t)} \left(\int_q^t \beta[\delta + |\tau'(s)|^2 (t-s)^2] e(s)\, ds + C_2(q) \right),\ t > q \geq t_2. \tag{3.18}$$

Учитывая (3.15), (3.2), применяя к правой части (3.18) правило Лопиталя, получим:

$$\|\mathbf{x}'(t)\| \to 0, t \to \infty. \tag{3.19}$$

Используя (2.1), (3.1), (1.2), (3.2), (3.8), равенство $P_Q(\mathbf{v}(t)) = \mathbf{v}(t)$, $\mathbf{v} \in Q$, $t \geq 0$, нерастягивающее свойство оператора проектирования, вычисляем:

$$\begin{gathered}\sigma\|\mathbf{x}''\| \leq P_Q[\mathbf{y} + \beta(\gamma_1\mathbf{x}' - \gamma_2(\mathbf{f}'(\mathbf{y}(t),t) + \tau\mathbf{y}))] - P_Q[\mathbf{v}(t)]\|+ \\ +\|\mathbf{x}'\| + \|\mathbf{x}-\mathbf{v}\| \leq a_4\|\mathbf{x}'\| + (2+\beta\gamma_2\tau)\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\| + \beta\gamma_2\delta(1+\|\mathbf{y}(t)\|)+ \\ +L\beta\gamma_2\|\mathbf{y}-\mathbf{v}\| + C_0\beta\gamma_2(1+\tau) \leq a_5\|\mathbf{x}'\| + a_6\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\| + a_7,\end{gathered}$$

где $a_4 = 1+\alpha+\beta(\gamma_1 - \alpha\gamma_2\tau)$; $a_5 = a_4 + \alpha\beta\gamma_2(\delta + \mathrm{L})$; $a_6 = 2+\beta\gamma_2(\delta+L+\tau)$; $a_7 = \beta\gamma_2[C_0(\delta+\tau+1)+\delta]$. И, с учетом оценки для $\sigma(t)$ при преобразовании (3.12):

$$\|\mathbf{x}''\| \leq (\sigma_0)^{-1}[a_5(t)\|\mathbf{x}'\| + a_6(t)\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\| + a_7(t)],\ t > q \geq t_2. \tag{3.20}$$

Отсюда, учитывая (3.2), (3.15), (3.16) и (3.19), получаем:

$$\|\mathbf{x}''\| \to 0,\ t \to \infty. \tag{3.21}$$

Из (3.17), (3.19) и (3.21) следует (3.3). Правые части оценок в (3.14), (3.18) и (3.20) не зависят от выбора приближений $\nabla f(\mathbf{x},t)$ градиента функции $f(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию (3.1), предельное соотношение (3.3) выполняется равномерно относительно выбора приближений $\nabla f(\mathbf{x},t)$, удовлетворяющих условию (3.1).

Теорема 1 доказана.

Примечание 1. В качестве параметров метода (2.1), (2.2), удовлетворяющих условиям теоремы 1, могут быть выбраны, например, следующие:

$$\begin{gathered}\alpha(t) = c_1(1+t)^{-1},\ \beta = c_2(1+t)^{-1},\ \gamma_1 = c_3(1+t)^{-1},\ \gamma_2 = c_4(2+t)^{-1}, \\ \sigma(t) = c_5(1+t)^{-\sigma},\ \tau(t) = c_6(1+t)^{-\tau},\ \delta(t) = c_7(1+t)^{-\delta},\end{gathered} \tag{3.22}$$

где числа $c_i > 0$, $i \in [1:7]$; $c_5 < 1$; σ, τ, $\delta > 0$; $2\tau + 2\sigma < \delta$; параметры метода $1-\sigma(t) > \alpha(t)$; $\sigma(t) < 1$; $\delta(t) < \tau(t) < L/4$.

4. Оценка скорости сходимости метода

Оценку скорости сходимости метода получим при более строгом условии сильной выпуклости функции $f(\mathbf{x})$.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того: функция* $f(\mathbf{x})$ *сильно выпуклая с константой сильной выпуклости* $\kappa > 0$; *функции* $\sigma(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\tau(t)$, $\delta(t)$ *удовлетворяют условиям (3.2) и*

$$\begin{gathered}\max[\sup_{t\geq 0}(\beta(t)\delta(t)\tau(t)),\ \sup_{t\geq 0}\beta(\tau')^2,\ \sup_{t\geq 0}\tau(t)\gamma_2^{-1},\\ \sup_{t\geq 0}[(b_1(t)h(t))' - b_2(t)h(t)]] \leq C_{24} < 1/2;\\ \exists t_0,\ \forall t > t_0 : 0 < \alpha(t) \leq (4b - \tau(t))/(4b + 2\tau(t)) < 1,\\ 0 < \beta(t) < (1-\alpha)/(\gamma_1 + (1-\alpha)\gamma_2\tau), 0 < \gamma_2 < \gamma_1/[2(1-\alpha)\delta(t) + \alpha\tau],\\ 0 < \tau(t) < 2\delta(t),\ 0 < \gamma_1(t) < \gamma_1^0.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Тогда при любых начальных приближениях $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1 \in H$ *траектория метода (2.1), (2.2) сходится к точке* $\mathbf{x}^* \in Q_*$ *с оценками:*

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| \leq\\ \leq ([C_{21}(C_{24}^3 + 2C_{24}^5)h(t) + C_{22}(0)t + C_{23}(0)][b_1(t)h(t)]^{-1})^{1/2} = b_7(t),\end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\|\mathbf{x}'(t)\| \leq \left\{[(C_{24} - b_1(t)h)b_7 + b_{71}][(b_5 - b_1)h(t)]^{-1}\right\}^{1/2} = b_8(t), \tag{4.3}$$

$$\|\mathbf{x}''(t)\| \leq \sigma_0^{-1}[a_5(t)b_8(t) + a_6(t)b_7(t) + a_7(t)],\ t \geq 0, \tag{4.4}$$

где $a_i(t)$, $i = 5,6,7$, *из теоремы 1;* $b = L\mu/(L+\mu)$; $h(t) = \exp\int_{s=0}^{s=t}[\gamma_2(s)/\tau(s)]\,ds$, $b_{71}(t) = C_{21}(C_{24} + 2C_{23}^3)h(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что при условиях теоремы 3: 1) множество минимумов $Q_* = \{\mathbf{x}^*\}$ ввиду сильной выпуклости функций $f(\mathbf{x})$, $T(\mathbf{x}(t),t)$; 2) результаты теоремы 1 о сходимости метода (2.1), (2.2), (3.2) справедливы. В (3.6) воспользуемся неравенством для сильно выпуклой функции $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$ ([18], гл. 1) $(\nabla f(\mathbf{v}) - \nabla f(\mathbf{u}), \mathbf{u} - \mathbf{z}) \leq (L+\mu)\|\mathbf{v} - \mathbf{z}\|^2/4 - L\mu\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2/(L+\mu)$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z} \in Q$, $\mu = 2\kappa$, условием (3.1), неравенством Коши-Буняковского. Тогда получим

$$\begin{gathered}\big(\sigma\mathbf{x}'' + a(t)\mathbf{x}', \mathbf{v} - \mathbf{w}\big) + b\beta\gamma_2\|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|^2 + \beta\gamma_2\tau(\mathbf{x} - \mathbf{v}, \mathbf{w} - \mathbf{v}) \leq\\ \leq \beta\gamma_2[\delta(1 + \|\mathbf{y}\|)\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| + \|\mathbf{v}\||\tau(t) - \tau(r)|\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|],\ t, r \geq 0,\end{gathered} \tag{4.5}$$

где $a(t) = 1 - \alpha - \beta\gamma_1 + \alpha\beta\gamma_2\tau$, $b = L\mu/(L+\mu)$, $d = (L+\mu)/4$. Далее, ввиду (2.1), (2.2), оценки (3.8), неравенств (3.9) при подходящих ε, для слагаемых в (4.5) имеем:

$$\begin{gathered}\big(\sigma\mathbf{x}'' + a(t)\mathbf{x}', \mathbf{v} - \mathbf{w}\big) = \sigma^2\|\mathbf{x}''\|^2 + (1+a)\sigma(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + \sigma(\mathbf{x}'', \mathbf{x} - \mathbf{v}) +\\ +a(\mathbf{x}', \mathbf{x} - \mathbf{v}) + a\|\mathbf{x}'\|^2; \quad \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = \|(\mathbf{v} - \mathbf{x}) - (\sigma\mathbf{x}'' + \mathbf{x}')\|^2 =\\ = \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|^2 - 2(\mathbf{v} - \mathbf{x}, \sigma\mathbf{x}'') - 2(\mathbf{v} - \mathbf{x}, \mathbf{x}') + \sigma^2\|\mathbf{x}''\|^2 + 2(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + \|\mathbf{x}'\|^2;\\ \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{x}' - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|^2 + 2(\mathbf{x} - \mathbf{v}, \alpha\mathbf{x}') + \alpha^2\|\mathbf{x}'\|^2;\\ \|\mathbf{y} - \mathbf{w}\|^2 = \|(1-\alpha)\mathbf{x}' + \sigma\mathbf{x}''\|^2 = (1-\alpha)^2\|\mathbf{x}'\|^2 + 2(1-\alpha)\sigma(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + \sigma^2\|\mathbf{x}''\|^2;\\ \|\mathbf{v}\||\tau(t) - \tau(r)|\,\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \leq C_0^2|\tau(t) - \tau(r)|^2/(2\tau) + (\tau/2)\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 =\\ = C_0^2|\tau(t) - \tau(r)|^2/(2\tau(t)) + (\tau/2)\left(\|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|^2 + \sigma^2\|\mathbf{x}''\|^2 + \|\mathbf{x}'\|^2\right) +\\ +\tau(t)[\sigma(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + \sigma(\mathbf{x}'', \mathbf{x} - \mathbf{v}) + (\mathbf{x}', \mathbf{x} - \mathbf{v})].\end{gathered}$$

Пользуясь этими выражениями и (3.8), (3.9) в (4.5), получим

$$\begin{gathered}b_{21}(t)\|\mathbf{x}''\|^2 + b_{22}(t)(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + b_{23}(t)(\mathbf{x}'', \mathbf{x} - \mathbf{v}) + b_{24}(t)(\mathbf{x}', \mathbf{x} - \mathbf{v}) +\\ +b_{25}(t)\|\mathbf{x}''\|^2 + b_{26}(t)\|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|^2 \leq Cg(t,r),\ t, r \geq 0,\end{gathered} \tag{4.6}$$

где $b_{21}(t) = \sigma^2(t)[1 - \beta(t)\gamma_2(t)(\delta(t) + \tau(t)/2)]$; $b_{22}(t) = \sigma(t)[1 + a(t) - \beta(t)\gamma_2(t)(2\delta(t) + \tau(t))]$; $b_{23}(t) = \sigma(t)[1 - 2\beta(t)\gamma_2(t)\delta(t)$; $b_{24}(t) = a(t) + \beta(t)\gamma_2(t)[2b\alpha(t) - (2+\alpha)\delta(t)]$; $b_{25}(t) = a(t) + \beta(t)\gamma_2(t)[2b\alpha(t) - (1 + \alpha^2/2)\delta(t) - \tau(t)/2]$; $b_{26}(t) = \beta(t)\gamma_2(t)(b + \tau(t) - 3\delta(t)/2 - \tau(t)/2)$;

$C=\max[(C_0+1)^2; C_0^2/2]$; $g(t,r)=C\beta\gamma_2(\delta+\tau^{-1}|\tau(t)-\tau(r)|^2)$; $b_{2i}(t)>0$ при условиях (4.1). Пользуясь равенствами (3.10), преобразуем (4.6) к виду

$$\begin{gathered} b_1(t)\tfrac{d^2}{dt^2}\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2+b_2(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2+b_3(t)\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2+ \\ +b_4(t)\|\mathbf{x}''\|^2+b_5(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}'\|^2+b_6(t)\|\mathbf{x}'\|^2\le C_{21}g(t,r),\ t,r\ge 0, \end{gathered} \tag{4.7}$$

где $b_1(t)=0.5b_{23}(t)$; $b_2(t)=0.5b_{24}(t)$; $b_3(t)=b_{26}(t)$; $b_4(t)=b_{21}(t)$; $b_5(t)=0.5b_{22}(t)$; $b_6(t)=b_{25}(t)-b_{23}(t)$; $b_i(t)\ge 0$, $i\in[1:6]$ при условиях (4.1).

Умножив (4.7) на функцию $h(t)=\exp\left(\int_0^t[\gamma_2(s)/\tau(s)]\,ds\right)$, и, проинтегрировав полученное неравенство по $t\in[q,t]$, $t>q\ge t_1$, получим:

$$\begin{gathered} \int_q^t[(b_1(s)h(s))''-(b_2(s)h(s))'+b_3(s)h(s)]\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2\,ds+ \\ \int_q^t[b_4(s)h(s)\|\mathbf{x}''\|^2+(b_2(s)h(s)-(b_5(s)h(s))')\|\mathbf{x}'\|^2]\,ds+ \\ +b_1(t)h(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2+[b_2(t)h(t)-(b_1h)']\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2+b_5h\|\mathbf{x}'\|^2\le \\ \le C_{21}\int_q^t g(s,r)h(s)\,ds+C_{22}(q),\ t>q\ge t_1,\ r\ge 0. \end{gathered} \tag{4.8}$$

где $C_{22}(q)=[(b_1(q)h(q))'-b_2(q)h(q)](C_0+\|\mathbf{x}(q)\|)^2-b_5(q)h(q)\|\mathbf{x}'(q)\|^2$ от r не зависит. Существует t_2 такое, что коэффициенты под интегралами в (4.8) неотрицательны $\forall q\ge t_2\ge t_1\ge t_0$, поэтому таковы и интегралы; заменим их нулём:

$$\begin{gathered} b_1(t)h(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2+[b_2h-(b_1h)']\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2+b_5(t)h(t)\|\mathbf{x}'\|^2\le \\ \le C_{21}\int_q^t g(s,r)h(s)\,ds+C_{22}(q),\ t>q\ge t_1,\ r\ge 0. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Проинтегрируем (4.9) на отрезке $[q,t]$, тогда имеем:

$$\begin{gathered} \int_q^t[(b_2(s)h(s)-2(b_1(s)h(s))')\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2+b_5(s)h(s)\|\mathbf{x}'\|^2]\,ds+ \\ +b_1(t)h(t)\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2\le C_{21}\int_q^t\int_q^z g(s,r)h(s)\,ds\,dz+ \\ +C_{22}(q)(t-q)+C_{23}(q),\ t>q\ge t_2,\ r\ge 0, \end{gathered} \tag{4.10}$$

где с учётом (3.8) $C_{23}(q)=h(q)b_1(q)\left(C_0+\|\mathbf{x}(q)\|\right)^2$ не зависит от r. При условиях теоремы интеграл в левой части (4.10) неотрицателен, его заменим нулём, затем положим $r=t$.

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}(t)-\mathbf{v}(t)\|^2\le[C_{21}\int_q^t\int_q^z g(s,t)h(s)\,ds\,dz+ \\ +C_{22}(q)(t-q)+C_{23}(q)]/[b_1(t)h(t)]. \end{gathered}$$

Преобразуем подынтегральную функцию $g(s,t)$ по (3.13); ввиду сильной выпуклости функции $f(\mathbf{x})$, $Q_*=\{\mathbf{x}^*\}$, при $\mathbf{v}=\mathbf{x}^*$ имеем:

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2\le \\ \le[b_1(t)h(t)]^{-1}[C_{21}\int_q^t\int_q^z\beta(s)\gamma_2(s)h(s)(\delta(s)+(\tau')^2(t-s)^2)\,ds\,dz+ \\ +C_{22}(q)(t-q)+C_{23}(q)],\ t>q\ge t_2. \end{gathered} \tag{4.11}$$

Положим далее $q=0$ и что при $t_0=t_1=t_2=0$ выполнялись неравенства для параметров метода, использованные при доказательстве теоремы 1. Такие значения параметров содержатся и в (3.22). Вычислим коэффициенты при $q=0$ и преобразуем (4.11);

$$\begin{gathered} C_{22}(0)=[(b_1(0)h(0))'-b_2(0)h(0)]\left(C_0+\|\mathbf{x}^0\|\right)^2-b_5(0)h(0)\|\mathbf{x}^1\|^2, \\ C_{23}(0)=b_1(0)h(0)\left(C_0+\|\mathbf{x}^0\|\right)^2,\quad \|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2\le \\ \le[b_1(t)h(t)]^{-1}[C_{21}\int_0^t\int_0^z\beta(s)\gamma_2(s)h(s)(\delta(s)+(\tau')^2(t-s)^2)\,ds\,dz+ \\ +C_{22}(0)t+C_{23}(0)],\ t\ge t_2. \end{gathered} \tag{4.12}$$

Вычислим двойной интеграл в правой части неравенства (4.12). Обозначив $I_{21} = \int_0^z g(s,t)h(s)\,ds$, получим: $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2 \le [b_1(t)h(t)]^{-1}[C_{21}\int_0^t I_{21}\,dz + C_{22}(0)t + C_{23}(0)]$, $t \ge 0$. Интегрируя по частям, сначала оценим внутренний интеграл,

$$I_{21} = \int_0^z \beta(s)\delta(s)\tau(s)dh(s) + \int_0^z \frac{\tau(t)}{\gamma_2(t)}\beta(s)\gamma_2(s)\tau^{-1}(\tau')^2(t-s)^2\,dh(s) \le \\ \le C_{24}[h(z) + \int_0^z (t-s)^2 dh(s)].$$

Обозначив интеграл в правой части I_{22}, интегрируем по частям:

$$I_{21} = \int_0^z (t-s)^2\,dh(s) = (t-s)^2 h(s)|_{s=0}^{s=z} + 2\int_0^z (t-s)h(s)\,ds \le 2C_{24}^2 h(z); \\ I_{21} \le (C_{24} + 2C_{24}^3)h(z); \quad \int_0^t I_{21}\,dz = (C_{24}+2C_{24}^3)C_{24}^2 h(t);$$

и из (4.12) следует (4.2)

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2 \le \\ \le \{[b_1(t)h(t)]^{-1}[C_{21}(C_{24}^3 + 2C_{24}^5)h(t) + C_{22}(0)t + C_{23}(0)]\}^{1/2} = b_7(t).$$

Получим оценку (4.3). Из (4.9) при $\mathbf{v} = \mathbf{x}^*$, $q = 0$, $r = t$ следует:

$$b_5(t)h(t)\|\mathbf{x}'\|^2 \le [(b_1h)' - b_2h]\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2 - b_1(t)h(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2 + \\ + C_{21}\int_0^t g(s,t)h(s)\,ds + C_{22}(0),\ t \ge t_2. \tag{4.13}$$

В правой части (4.13) преобразуем: первое слагаемое — с помощью (4.1) и (4.2); второе слагаемое — с помощью (3.10) и (3.9) при $\varepsilon = 1$; интеграл вычислим так же, как I_{21}. Тогда из (4.13), пользуясь (4.2), получим

$$(b_5 - b_1)h(t)\|\mathbf{x}'(t)\|^2 \le (C_{24} - b_1(t)h(t))b_7(t) + b_{71}(t), \tag{4.14}$$

где $b_{71}(t) = C_{21}(C_{24}^3 + 2C_{24}^5)h(t)$, $b_5(t) - b_1(t) = \sigma(t)[1 - \alpha - \beta(\gamma_1 + (1-\alpha)\gamma_2\tau)] > 0$ при $0 < \beta < (1-\alpha)/(\gamma_1 + (1-\alpha)\gamma_2\tau)$, $h(t) < C_{24}/b_1(t)$. Разделив на коэффициент в левой части (4.14), получим оценку (4.3):

$$\|\mathbf{x}'(\mathbf{t})\| \le \left\{[(C_{24} - b_1h)b_7(t) + b_{71}(t)][(b_5 - b_1)h(t)]^{-1}\right\}^{1/2} = b_8(t).$$

Получим оценку (4.4). В условиях теоремы 2 результаты теоремы 1 верны. Положим в (3.20) $\mathbf{v} = \mathbf{x}^*$, $q = 0$, $r = t$ и подставим в преобразованное неравенство оценки (4.2) и (4.3). Придём к неравенству

$$\|\mathbf{x}''(\mathbf{t})\| \le \sigma_0^{-1}[a_5(t)b_8(t) + a_6(t)b_7(t) + a_7(t)],\ t \ge 0,$$

где $a_i(t) > 0$, $i \in [5:7]$ из (3.20), $b_7(t) > 0$, $b_8(t) > 0$.
Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Васильев Ф. П., *Численные методы решения экстремальных задач*, Наука, М., 1988, 552 с.

2. Антипин А. С., “Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования”, *Вопросы кибернетики. Вычислительные вопросы анализа больших систем*, 1989, 5–43.

3. Антипин А. С., “Минимизация выпуклых функций на выпуклых множествах с помощью дифференциальных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **30**:11 (1994), 1475–1486.

4. Недич А., “Непрерывный метод проекции градиента третьего порядка для задач минимизации”, *Дифференциальные уравнения*, **30**:11 (1994), 1914–1922.

5. Тихонов А. Н., “Об устойчивости задач оптимизации функционалов”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **6**:4 (1966), 631–634.

6. Тихонов А. Н., “О некорректно поставленных задачах”, *Вычислит. математ. и прогр.*, 1967, № Вып. 8, 3–33.

7. Антипин А. С., “Об едином подходе к методам решения некорректных экстремальных задач”, *Вестник МГУ. Сер. 1. Математика и механика*, 1973, № 2, 60–67.

8. Васильев Ф. П., *Методы решения экстремальных задач. Регуляризация, аппроксимация*, Наука, М., 1981, 400 с.

9. Недич А., “Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента для задач минимизации с неточными исходными данными”, *Вестник МГУ. Сер. 15, Вычисл. матем. и киберн.*, 1994, № 1, 3–10.

10. Васильев Ф. П., Недич А., “Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента второго порядка”, *Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, 1994, № 2, 3–11.

11. Васильев Ф. П., Амочкина Т. В., Недич А., “Об одном регуляризованном варианте непрерывного метода проекции градиента второго порядка”, *Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, 1995, № 3, 39–46.

12. Васильев Ф. П., Недич А., “Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента третьего порядка”, *Дифференциальные уравнения*, **30**:12 (1994), 2033–2042.

13. Vasiljev F. P., Nedic A., “A regularized continuous projection gradient method of the fourth order”, *Yugoslav J. of Operations research*, **5**:2 (1995), 195–209.

14. Малинов В. Г., “О непрерывном проекционном методе минимизации второго порядка”, *Методы оптимизации и их приложения. Труды 12 Байкальской международной конференции. Иркутск, Байкал, 24 июня - 1 июля 2001г.*, **1A** (2001), 21–26.

15. Малинов В. Г., “О регуляризованном проекционном непрерывном методе минимизации второго порядка”, *Ученые записки Ульяновского государст. университета. Серия "Фундаментальные проблемы математики и механики"*, 2002, № Вып. 2(12), 155–173.

16. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К., *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1978, 336 с.

17. Малинов В. Г., “Четырехпараметрический двухшаговый регуляризованный проекционный метод минимизации”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **39**:4 (1999), 567–572.

18. Антипин А. С., *Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа. Препринт.*, ВНИИ системных исследований, М., 1979, 73 с.

On the rate of convergence regularized CPMM of the second order

© **V. G. Malinov** [2]

Abstract. In the work a regularization method in Hilbert space is investigated for problems of minimization with inaccurate initial date, based on the continuous projection second order method in conjunction with the Tikhonov function method. Estimates rate of convergence are proved.
Key Words: regularized projection continuous minimization method, estimates rate of convergence.

[2] Assistant Professor of Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; vgmalinov@mail.ru.