

УДК 517.9

Аналитическое решение задачи о тепловом крипе

© В. В. Лукашев,¹ В. Н. Попов,²

Аннотация. В рамках кинетического подхода построено аналитическое (в виде ряда Неймана) решение задачи о тепловом крипе – вычислении потока массы газа, обусловленного перепадом температуры в канале. В качестве основного уравнения используется линеаризованная БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модель кинетического уравнения Больцмана, а в качестве граничного условия на стенках канала – модель зеркально-диффузного отражения. Для различных значений толщины канала и коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа стенками канала вычислены значения потоков массы газа, приходящихся на единицу ширины канала. Проведено сравнение с аналогичными результатами, опубликованными в открытой печати.

Ключевые слова: течение газа в канале, тепловой крип, кинетическое уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, точные аналитические решения

1. Введение

Одной из важнейших в прикладном отношении задач динамики разреженного газа является задача о течении газа в каналах [1], [2]. Не смотря на то, что первые исследования, посвященные данной проблеме, впервые были выполнены в начале-первой половине прошлого столетия в работах Кнудсена, Смолуховского, Клаузинга, она до сих пор привлекает к себе внимание разных авторов. Отличительной особенностью течения разреженных газов в каналах является наличие так называемых перекрестных эффектов: потоки массы газа могут быть обусловлены не только перепадом давления, то и перепадом температуры, и наоборот, потоки тепла могут быть обусловлены не только перепадами температуры, но и перепадами давления. Целью представленной работы является рассмотрение на основе точных аналитических методов, представленных в [3]-[9], одного из таких эффектов – теплового крипа, т.е. процесса переноса массы газа в канале, обусловленного перепадом температуры. С использованием методов прямого численного моделирования данная задача рассматривалась ранее в [10]-[12].

В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса в работе используется БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модель кинетического уравнения Больцмана [3], а в качестве модели взаимодействия молекул газа со стенками канала – зеркально-диффузное граничное условие Максвелла. При решении задачи полагается, что стенки канала образованы двумя бесконечными параллельными плоскостями.

2. Постановка задачи

Рассмотрим канал, толщиной D' , стенки которого расположены в плоскостях $x' = \pm d'$ прямоугольной декартовой системы координат ($d' = D'/2$). Предположим, что в

¹ Аспирант кафедры математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; v.lukashev@narfu.ru.

² Заведующий кафедрой математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; v.popov@agtu.ru.

канале поддерживается постоянный градиент температуры, параллельный его стенкам. Направим ось Oz декартовой системы координат вдоль градиента температуры. Будем считать, относительный перепад температуры на длине свободного пробега молекул газа малым. Тогда задача допускает линеаризацию и функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям можно представить в виде

$$f(r', v) = \beta^{3/2} \pi^{-3/2} \exp(-C^2) \left[1 + (C^2 - \frac{5}{2}) G_T z + G_T Z(x, C) \right]. \quad (2.1)$$

Здесь $C = \sqrt{\beta} v$ – безразмерная скорость молекул газа; $\beta = m/2k_B T$; m – масса молекулы газа; k_B – постоянная Больцмана; T – температура газа; $G_T = (1/T)(dT/dz)$ – безразмерный градиент температуры; $Z(x, C)$ – линейная поправка к локально-равновесной функции распределения; $x = x'/l_g$ и $z = z'/l_g$ – безразмерные координаты; $l_g = \eta_g \beta^{-1/2}/p$ – средняя длина свободного пробега молекул газа. Запишем в выбранной системе координат БГК модель кинетического уравнения Больцмана

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{p}{\eta_g} (f_{eq} - f). \quad (2.2)$$

Здесь $f_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – локально-равновесный максвеллиан. Подставляя (2.1) в (2.2) и линеаризуя $f_{eq}(r', v)$ относительно абсолютного максвеллиана, приходим к уравнению для нахождения $Z(x, C)$

$$C_x \frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x, C) + C_z (C^2 - \frac{5}{2}) = \pi^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-C'^2) K(C, C') Z(x, C') dC', \quad (2.3)$$

$$K(C, C') = 1 + 2CC' + \frac{2}{3} (C^2 - \frac{3}{2})(C'^2 - \frac{3}{2}).$$

Решение (2.3) ищем в виде

$$Z(x, C) = C_z Z_1(x, C_x) + C_z (C_y^2 + C_z^2 - 2) Z_2(x, C_x). \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.3), домножая полученное уравнение последовательно на C_z и $C_z(C_y^2 + C_z^2 - 2)$ и интегрируя по C_y и C_z от $-\infty$ до $+\infty$ приходим к системе уравнений ($\mu = C_x$)

$$\mu \frac{\partial Z_1}{\partial x} + Z_1(x, \mu) + \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2) Z_1(x, \tau) d\tau, \quad (2.5)$$

$$\mu \frac{\partial Z_2}{\partial x} + Z_2(x, \mu) + 1 = 0. \quad (2.6)$$

Учитывая зеркально-диффузное отражение молекул газа стенками канала, граничные условия для $Z_k(x, \mu)$ ($k = 1, 2$) записываются в виде

$$Z_k(d, \mu) = (1 - q) Z_k(d, -\mu), \quad \mu < 0, \quad (2.7)$$

$$Z_k(-d, \mu) = (1 - q) Z_k(-d, \mu), \quad \mu > 0. \quad (2.8)$$

Исходя из статистического смысла функции распределения молекул газа по координатам и скоростям, массовая скорость газа в направлении оси Oz' определяется выражением

$$U_z(x) = \pi^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-C^2) C_z Z(x, C) dC = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\mu^2) Z_1(x, \mu) d\mu. \quad (2.9)$$

Соответственно, поток массы газа, приходящийся на единицу ширины канала, равен

$$J_M = -\frac{1}{2d^2} \int_{-d}^d U_z(x) dx. \quad (2.10)$$

Отсюда, так как $Z_2(x, \mu)$ не входит в выражение (2.9), решение поставленной задачи сводится к нахождению $Z_1(x, \mu)$ из краевой задачи (2.5), (2.7), (2.8).

3. Построение функции распределения молекул газа

Общее решение (2.5) имеет вид [3]

$$Z_1(x, \mu) = A_0 + A_1(x - \mu) + \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) F(\eta, \mu) a(\eta) d\eta - \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right), \quad (3.1)$$

$$F(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \exp(\eta^2) \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu), \quad (3.2)$$

$$\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\mu^2)}{\mu - z} d\mu, \quad (3.3)$$

$P(1/z)$ - распределение в смысле главного значения при вычислении интеграла от $1/z$, $\delta(z)$ - дельта-функция Дирака, а A_0 , A_1 и $a(\eta)$ - неизвестные параметры и функция, подлежащие дальнейшему определению.

Подставляя (3.1) в (2.7) и (2.8), приходим к интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} & A_0 + A_1(d - \mu) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{d}{\eta}\right) F(\eta, \mu) a(\eta) d\eta - \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) = \\ & = (1 - q) \left[A_0 + A_1(d + \mu) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{d}{\eta}\right) F(\eta, -\mu) a(\eta) d\eta - \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) \right], \quad \mu < 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} & A_0 - A_1(d + \mu) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{d}{\eta}\right) F(\eta, \mu) a(\eta) d\eta - \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) = \\ & = (1 - q) \left[A_0 - A_1(d - \mu) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{d}{\eta}\right) F(\eta, -\mu) a(\eta) d\eta - \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) \right], \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Обозначим

$$b(\eta, x) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) a(\eta).$$

Тогда, с учетом (3.2) уравнения (3.4) и (3.5) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta B(-\eta, d)}{\eta + \mu} d\eta + \exp(\mu^2) B(\mu, d) \lambda(\mu) = \\ = q\mu^2 + A_1\mu(2 - q) - q(A_0 + A_1d + \frac{1}{2}), \quad \mu < 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta B(\eta, -d)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) B(\mu, -d) \lambda(\mu) = \\ = q\mu^2 + A_1\mu(2 - q) - q(A_0 - A_1d + \frac{1}{2}), \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь

$$B(\mu, d) = b(\mu, d) - (1 - q)b(-\mu, d). \quad (3.8)$$

Заменив в (3.6) μ на $-\mu$ и учитывая, что на действительной оси $\lambda(z)$ является четной функцией, перепишем его в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta B(-\eta, d)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) B(-\mu, d) \lambda(\mu) = \\ = q\mu^2 - A_1\mu(2 - q) - q(A_0 + A_1d + \frac{1}{2}), \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Представим интеграл, входящий в (3.9) в виде суммы двух интегралов: регулярного и сингулярного, после чего заменим в первом переменную интегрирования η на $-\eta$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta B(-\eta, d)}{\eta - \mu} d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{\eta B(-\eta, d)}{\eta - \mu} d\eta + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(-\eta, d)}{\eta - \mu} d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(\eta, d)}{\eta + \mu} d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(-\eta, d)}{\eta - \mu} d\eta. \end{aligned}$$

Аналогично преобразовав интеграл, входящий в (3.7), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(-\eta, d)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) B(-\mu, d) \lambda(\mu) = \\ = q\mu^2 - A_1\mu(2 - q) - q(A_0 + A_1d + \frac{1}{2}) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(\eta, d)}{\eta + \mu} d\eta, \quad \mu > 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(\eta, -d)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) B(\mu, -d) \lambda(\mu) = \\ = q\mu^2 + A_1\mu(2 - q) - q(A_0 - A_1d + \frac{1}{2}) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(-\eta, -d)}{\eta + \mu} d\eta, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Последовательно складывая и вычитая почленно (3.10) и (3.11), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta [B(-\eta, d) + B(\eta, -d)]}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) [B(-\mu, d) + B(\mu, -d)] \lambda(\mu) = \\ = 2q\mu^2 - 2qA_0 - q - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta [B(\eta, d) + B(-\eta, -d)]}{\eta + \mu} d\eta, \quad \mu > 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta [B(\eta, -d) - B(-\eta, d)]}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) [B(\mu, -d) - B(-\mu, d)] \lambda(\mu) = \\ = -2A_1(\mu(2 - q) + qd) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta [B(-\eta, -d) - B(\eta, d)]}{\eta + \mu} d\eta, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Нетрудно видеть, что (3.12) обращается в тождество при выполнении условий $B(-\eta, d) = B(\eta, -d)$, $A_1 = 0$. А с учетом определения функции $B(\eta, d)$ (3.8) получаем, что $a(-\eta) = a(\eta)$. Теперь (3.13) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(-\eta, d)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) B(-\mu, d) \lambda(\mu) = f(\mu), \quad (3.14)$$

$$f(\mu) = q\mu^2 - q \left(A_0 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(\eta, d)}{\eta + \mu} d\eta, \quad \mu > 0. \quad (3.15)$$

Решение (3.14) ищем с использованием методов краевых задач теории функций комплексного переменного. С этой целью введем вспомогательную функцию, заданную интегралом типа Коши

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(-\eta, d)}{\eta - z} d\eta, \quad (3.16)$$

для которой на верхнем и нижнем берегах разреза, совпадающего с действительной положительной полуосью, выполняются соотношения

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = 2\sqrt{\pi}i\mu B(-\mu, d), \quad 0 < \mu < +\infty. \quad (3.17)$$

$$N^+(\mu) + N^-(\mu) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(\eta, d)}{\eta - \mu} d\eta, \quad 0 < \mu < +\infty. \quad (3.18)$$

Аналогичные соотношения для $\lambda(\mu)$, определяемой равенством (3.3), имеют вид

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = 2\sqrt{\pi}i\mu \exp(-\mu^2), \quad -\infty < \mu < +\infty \quad (3.19)$$

$$\lambda^+(\mu) + \lambda^-(\mu) = 2\lambda(\mu), \quad -\infty < \mu < +\infty. \quad (3.20)$$

Здесь разрез совпадает со всей действительной числовой прямой. С учетом (3.17) - (3.20) сведем интегральное уравнение (3.14) к краевой задаче Римана на действительной положительной полуоси

$$N^+(\mu)\lambda^+(\mu) - N^-(\mu)\lambda^-(\mu) = 2\sqrt{\pi}\mu f(\mu) \exp(-\mu^2), \quad \mu > 0. \quad (3.21)$$

Особенность краевой задачи (3.21) состоит в том, что функции $N(z)$ и $\lambda(z)$ имеют различные разрезы. Чтобы устранить эту особенность необходимо решить задачу факторизации, то есть найти такую не обращающуюся в ноль ни в одной конечной точке функцию $X(z)$, для которой на действительной положительной полуоси выполняется условие (3.22) и которая аналитична во всех остальных точках комплексной плоскости

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}. \quad (3.22)$$

Решение этой задачи имеет вид [3]:

$$X(z) = \frac{1}{z} \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\theta(\tau) - \pi)}{\tau - z} dt \right], \quad \theta(\tau) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg} \left(\frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi}\tau \exp -\tau^2} \right).$$

С учетом решения однородной краевой задачи (3.22) перепишем (3.21)

$$N^+(\mu)X^+(\mu) - N^-(\mu)X^-(\mu) = \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} 2\sqrt{\pi}\mu f(\mu) \exp(-\mu^2), \quad \mu > 0. \quad (3.23)$$

Линии скачков функций $N(z)$ и $X(z)$ совпадают с контуром краевого условия. Следовательно, получили краевую задачу Римана - задачу определения аналитической функции по заданному скачку. Учитывая поведение входящих в (3.23) функций, по формулам Сохоцкого получаем ее общее решение

$$N(z) = \frac{1}{X(z)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) \frac{d\eta}{\eta - z}. \quad (3.24)$$

Рассмотрим поведение решения, задаваемого выражением (3.24) в окрестности бесконечно удаленной точки. Учитывая, что при $|z| \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) \frac{d\eta}{\eta - z} &= \\ &= -\frac{1}{z} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) d\eta + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad |z| \rightarrow +\infty, \\ \frac{1}{X(z)} &= z + Q_1 + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

находим

$$N(z) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) d\eta + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| \rightarrow +\infty. \quad (3.25)$$

Здесь

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta^{k+1} \exp(-\eta^2) d\eta \quad (3.26)$$

– интегралы Лоялки, в частности, $Q_1 = -1.01619$, $Q_2 = -1.26632$.

Так как функция $N(z)$ согласно (3.16) задана интегралом типа Коши, то в окрестности бесконечно удаленной точки должно выполняться соотношение $N(z) = O(1/z)$. Отсюда, с учетом (3.25) приходим к условию разрешимости краевой задачи (3.23)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) d\eta = 0. \quad (3.27)$$

Подставив в (3.27) $f(\eta)$, определяемое соотношением (3.15), с учетом (3.26) перепишем (3.27) в виде

$$q(A_0 + \frac{1}{2} + Q_2) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta \exp(-\eta^2) d\eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau B(\tau, d)}{\tau + \eta} d\eta = 0. \quad (3.28)$$

Изменяя в последнем интеграле порядок интегрирования и, учитывая интегральное представление функции $X(z)$

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \frac{\eta \exp(-\eta^2) d\eta}{\eta + z}, \quad (3.29)$$

из (3.28) находим

$$A_0 = -Q_2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{q\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \tau B(\tau, d) X(-\tau) d\tau. \quad (3.30)$$

Коэффициент $a(\eta)$ в разложении (3.1) решения рассматриваемой задачи по собственным векторам непрерывного спектра найдем из условия (3.17), предварительно преобразовав (3.24). Принимая во внимание вид интегралов Лоялки (3.26) и интегральное представление $X(z)$ (3.29), получаем

$$N(z) = -q(A_0 + \frac{1}{2} - z^2) + \frac{1}{X(z)} \left[q(Q_1 - z) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta \exp(-\eta^2) \frac{d\eta}{\eta - z} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau B(\tau, d)}{\tau + \eta} d\eta \right].$$

Заметим, что:

$$\frac{1}{\eta - z} \frac{1}{\tau + \eta} = \frac{1}{\tau + z} \left[\frac{1}{\eta - z} + \frac{1}{\eta + \tau} \right],$$

тогда, с учетом (3.29) и (3.26) получим:

$$N(z) = -q(A_0 + \frac{1}{2} - z^2) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau B(\tau, d) d\tau}{\tau + z} + \frac{1}{X(z)} \left[q(Q_1 - z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \tau B(\tau, d) X(-\tau) \frac{d\tau}{\tau + z} \right].$$

Для построенного решения $N(z)$, используя формулы Сохоцкого-Племеля и (3.17), можем записать

$$2\sqrt{\pi}i\mu B(-\mu, d) = -\frac{\sqrt{\pi}i\mu \exp(-\mu^2)}{|\lambda^+(\mu)|^2} X(-\mu) \times \\ \times \left[q(Q_1 - \mu) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \tau B(\tau, d) X(-\tau) \frac{d\tau}{\tau + \mu} \right], \quad \mu > 0. \quad (3.31)$$

Теперь, учитывая четность функции $a(\eta)$ и подставляя в (3.31) в явном виде выражения для $B(\eta, d)$ (3.8) и A_1 (3.30), для определения $a(\eta)$ приходим к интегральному уравнению уравнение Фредгольма второго рода

$$a(\mu) = h(\mu)[(Q_1 - \mu)q + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta[\exp(-d/\eta) - (1 - q)\exp(d/\eta)]a(\eta)X(-\eta)}{\eta + \mu} d\eta, \quad \mu > 0, \quad (3.32)$$

$$h(\mu) = -\frac{X(-\mu) \exp(-\mu^2)}{2|\lambda^+(\mu)|^2[\exp(d/\mu) - (1 - q)\exp(-d/\mu)]}.$$

Решение (3.32) ищем в виде ряда

$$a(\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k a_k(\mu), \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \quad (3.33)$$

Подставляя (3.33) в (3.32) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ , приходим к системе рекуррентных соотношений, из которых находим

$$a_0(\mu) = qh(\mu)(Q_1 - \mu), \quad a_i(\mu) = qh(\mu) \int_0^\infty \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \mu} \dots \int_0^\infty \frac{g(\eta_i) [Q_1 - \eta_i] d\eta_i}{\eta_i + \eta_{i-1}},$$

$$g(\tau) = -\frac{\tau X^2(-\tau) \exp(-\tau^2)(\exp(-2d/\tau) - 1 + q)}{2|\lambda^+(\tau)|^2(1 - (1 - q)\exp(-2d/\tau))}, \quad \tau > 0.$$

Теперь мы можем выразить A_1 в виде ряда, подставив (3.33) в (3.30):

$$A_0 = -Q_2 - \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k I_k, \quad (3.34)$$

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} g(\tau)[Q_1 - \tau] d\tau,$$

$$I_i = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} g(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \tau} \dots \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_i) [Q_1 - \eta_i] d\eta_i}{\eta_i + \eta_{i-1}}.$$

Таким образом, неизвестные параметры A_0 , A_1 и функция $a(\eta)$, входящие в (3.2) найдены и функция распределения молекул газа по координатам и скоростям построена.

4. Вычисление потока тепла в канале

С учетом полученных результатов и соотношений (2.9), (2.10) находим

$$U_z(x) = -\frac{1}{2} \left(Q_2 + \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left[I_k + J_k(x) \right] \right), \quad (4.1)$$

$$J_0(x) = \frac{q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \gamma(x, \tau) [Q_1 - \tau] d\tau,$$

$$J_i(x) = \frac{q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \gamma(x, \tau) d\tau \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \tau} \dots \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_i) [Q_1 - \eta_i] d\eta_i}{\eta_i + \eta_{i-1}}, \quad \gamma(x, \tau) = 2h(\tau) \operatorname{ch} \left(\frac{x}{\tau} \right).$$

Соответственно

$$J_M = -\frac{1}{4d^2} \left[-2 \left(Q_2 + \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k I_k \right) d + q \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K_k \right], \quad (4.2)$$

$$K_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \zeta(\tau) [Q_1 - \tau] d\tau,$$

$$K_i = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \zeta(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \tau} \dots \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_i) [Q_1 - \eta_i] d\eta_i}{\eta_i + \eta_{i-1}},$$

$$\zeta(\tau) = -\frac{\tau X(-\tau) \exp(-\tau^2) (1 - \exp(-2d/\tau))}{|\lambda^+(\tau)|^2 (1 - (1 - q) \exp(-2d/\tau))}.$$

Профили массовой скорости газа $U_z(x)$ для каналов разной толщины и для разных коэффициентов аккомодации, рассчитанные согласно (4.1) приведены на Рисунке 1. Значения J_M , вычисленные в пакете прикладных программ Wolfram Mathematica 8 согласно (4.2) при различных значениях толщины канала и коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа, а также аналогичные результаты, полученные в [10]-[12], приведены в Таблице 1. Как следует из Таблицы 1 отличие результатов, вычисленных на основе (4.2), от аналогичных, полученных численными методами в [10] рамках БГК модели кинетического уравнения Больцмана, не превышает 0.04% для всего диапазона значений D и q . Существенное отличие результатов, рассчитанных согласно (4.2) и полученных в [12] с использованием CES и LBE моделей кинетического уравнения Больцмана, объясняется тем, что БГК модель при переходе к гидродинамическому пределу дает значение числа Прандтля $\operatorname{Pr} = 1$, в то время как CES и LBE модели дают значение $\operatorname{Pr} = 2/3$. В силу этого, в случае, когда в задаче преобладающими являются процессы, обусловленные теплопроводностью газа уравнение (2.2) записывают в виде

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{p}{\eta_g} \operatorname{Pr} (f_{eq} - f). \quad (4.3)$$

В этом случае во всех полученных выше формулах необходимо положить $x = \operatorname{Pr} x'/l_g$, $d = \operatorname{Pr} d'/l_g$. Соответствующие значения J_M приведены во втором столбце Таблицы 1. Как видно из приведенных значений, полученные в этом случае результаты находятся в лучшем согласии с аналогичными результатами LBE модели

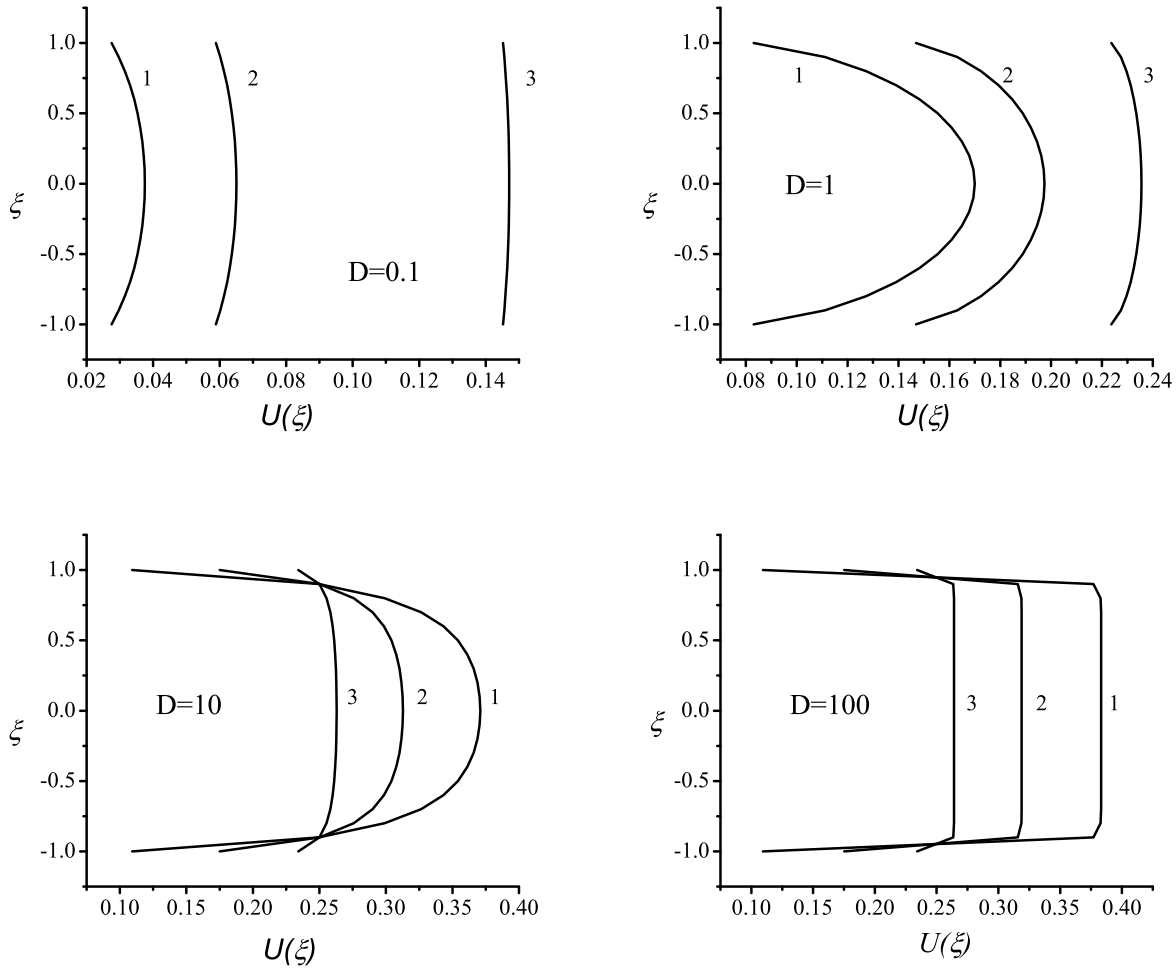


Рис. 1. Графики зависимости $U(\xi)$ ($\xi = 2x/D$) для различных значений D и q , рассчитанные по формуле (4.1): 1) $q = 0.1$, 2) $q = 0.5$, 3) $q = 1.0$.

k	$D = k$ (4.2)	$D = \text{Pr } k$ (4.2)	BGK [10]	S [11]	CES [12]	LBE [12]
$q = 0.1$						
0.1	-2.93128	-3.77468			-4.1416	-4.1701
1.0	-0.46498	-0.66942			-0.71489	-0.71258
10.0	-0.05173	-0.07685			-0.079621	-0.07914
$q = 0.5$						
0.1	-1.26627	-1.48686	-1.266442	-1.4012	-1.5426	-1.5680
1.0	-0.36854	-0.47939	-0.3685435	-0.49043	-0.5376	-0.52876
10.0	-0.05836	-0.08388		-0.087524	-0.086266	-0.084299
$q = 1.0$						
0.1	-0.69466	-0.78079	-0.6949272	-0.73268	-0.79087	-0.79928
1.0	-0.29489	-0.35372	-0.2948999	-0.36546	-0.40456	-0.38908
10.0	-0.06607	-0.09196		-0.098147	-0.093046	-0.089950

Таблица 6: Зависимость J_M от $k = D'/l_q$ при различных значениях q

5. Заключение

Итак, в работе с использованием аналитических методов построено решение задачи о тепловом крипе в канале, расстояние между стенками которого соизмеримо со средней длиной свободного пробега молекул газа. Получено аналитическое (в виде ряда Неймана) выражение для потока массы газа, приходящегося на единицу ширины канала. Проведен численный анализ полученного выражения. Показано, что полученные в работе результаты с высокой степенью точности совпадают с аналогичными результатами, полученными ранее использованием численных методов в рамках БГК модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шарипов Ф.М., Селезнев В.Д. Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург. УрО РАН. 2008. 230 с.
2. Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа М.: Машиностроение, 1977. 184 с.
3. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решения граничных задач для кинетических уравнений. М.: МГОУ. 2004. 286 с.
4. Попов В.Н., Тестова И.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение задачи о течении Пуазейля // Математический журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т. 12. № 3. С. 111-120.
5. Лукашев В.В., Попов В.Н., Юшканов А.А. Математическое моделирование процессов переноса в плоских каналах // Математический журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13. № 2. С. 81-90.
6. Попов В.Н., Тестова И.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение задачи о течении Куэтта в плоском канале с бесконечными параллельными стенками // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. Вып. 1. С. 53-58.
7. Попов В.Н., Тестова И.В., Юшканов А. А. Аналитическое решение задачи о течении Пуазейля с использованием эллипсоидально-статистической модели кинетического уравнения Больцмана // Прикладная механика и техническая физика. 2012. № 4. С. 48-56.
8. Лукашев В.В., Попов В.Н., Юшканов А.А. Аналитическое решение задачи о течении Куэтта // Журнал Средневолжского математического общества. 2012. Т. 14. № 1. С. 72-82.
9. Лукашев В.В., Попов В.Н., Юшканов А.А. Моделирование процессов переноса в задаче о течении Куэтта при неполной аккомодации тангенциального импульса молекул газа стенками канала // Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 2. С. 111-124.
10. Barhcello L.B., Camargo M., Podrigues P., Siewert C.E. Unified solutions to classical flow problems based on the BGK model // ZAMP. 2001. V. 52. P. 517-534.

11. C.E. Siewert. Poiseuille, Thermal Creep and Couette Flow: Results Based on the CES Model Linearized Boltzmann Equation // European Journal of Mechanics B. Fluids. 2002. V. 21. P. 579-597.
12. C.E. Siewert. The linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems // Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik. 2003. V. 54. P. 273-303.

Analytic solution of the problem of a thermal creep

© V. V. lukashev³, V. N. Popov⁴

Abstract. Within the kinetic approach limits the analytic solution of the thermal creep flow problem in the form of Neumann's series is contracted. As the basic equation it is used the linearize BGK (Bhatnagar, Gross, Krook) model of Boltzmann kinetic equation, and as a boundary condition on walls of the channel - the model of mirror-diffusion reflections. For various values of thickness of the channel and factor of accommodation of a tangential impulse of molecules of gas by the walls of the channel values of streams of weight of gas and heat falling unit of width of the channel are calculated. Comparison with the similar results published in an open press is lead.

Key Words: flow of gas in the channel, thermal creep, Boltzmann kinetic equation, model kinetic equations, exact analytical decisions, models of boundary conditions

³ Post graduate student, Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk; v.lukashev@narfu.ru.

⁴ Head of Mathematics Chair, Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk; v.popov@narfu.ru.