УДК 517.938

Энергетическая функция как полный топологический инвариант градиентно-подобных потоков с седлами одинакового индекса Морса на 3-многообразиях

© **В. З. Гринес**[1], **О. В. Починка**[2], **А. В. Рузаев**[3], **А. Н. Сахаров**[4]

Аннотация. Показывается, что для градиентно-подобных потоков с седловыми состояниями равновесия одинакового индекса Морса на замкнутых 3-многообразиях энергетическая функция является полным инвариантом.

Ключевые слова: потоки Морса-Смейла, энергетическая функция, топологическая эквивалентность

1. Введение

Пусть M^n – гладкое замкнутое ориентируемое n-мерное многообразие. Напомним, что гладкий поток f^t называется *потоком Морса-Смейла*, если он задается гладким векторным полем[5] $v : M^n \to TM^n$ и удовлетворяет следующим условиям:

1. неблуждающее множество потока $\Omega(f^t)$ состоит из конечного числа гиперболических особых точек $p_1, \dots, p_l$ (собственные числа линеаризации поля $v(x)$ в особых точках имееют ненулевые действительные части) и конечного числа гиперболических замкнутых траекторий $\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)$ (мультипликаторы[6] любой замкнутой траектории по модулю не равны 1);

2. устойчивые и неустойчивые многообразия особых точек и периодических решений имеют трансверсальное пересечения.

Поток Морса-Смейла называется *градиентно-подобным*, если его неблуждающее множество не содержит замкнутых траекторий.

А.М. Ляпунов разработал метод исследования устойчивости решений систем дифференциальных уравнений, основанный на использовании функции, получившей название функции Ляпунова. Эта функция убывает вдоль траекторий системы, что и легло в основу определения глобальной функции Ляпунова для потока.

Пусть f^t – поток Морса-Смейла, заданный на многообразии M^n и $\Omega(f^t)$ его неблуждающее множество.

Определение 1.1. *Непрерывная функция $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ называется функцией Ляпунова потока Морса-Смейла f^t на M^n, если она удовлетоворяет следующим условиям.*

---

[1] Профессор кафедры численного и функционального анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского; vgrines@yandex.ru

[2] Доцент кафедры теории функций ННГУ им. Н.И. Лобачевского; olga-pochinka@yandex.ru

[3] Студент 5-го курса, Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, г. Саранск;

[4] Доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; ansakharov2008@yandex.ru.

[5] Как всегда, символы TM^n и NM^n обозначают касательное и нормальное расслоения над гладким многообразием M^n.

[6] Мультипликаторы периодического решения – собственные значения оператора линейной части отображения за период, определенного в некоторой окрестности этого решения.

1. *$\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ для любой точки $x \notin \Omega(f^t)$ и любого $t > 0$;*

2. *φ является константой на каждой траектории из $\Omega(f^t)$*

Согласно Ч. Конли [2] функция Ляпунова существует для любого потока Морса-Смейла[7]. При этом, если для данного потока функция Ляпунова известна из каких-либо физических соображений (например, функция энергии для диссипативных систем в механике), то зная множество критических точек этой функции, можно (в определенном смысле) восстановить динамику самого потока. Более того, при некоторых ограничениях на классы потоков и функций Ляпунова можно извлечь и более детальную информацию о взаимоотношениях между функцией Ляпунова и динамикой потока. В частности, функция Ляпунова может оказаться полным топологическим инвариантом систем из некоторого класса.

Напомним, что гладкая функция $\varphi : M^n \to R$ называется *функцией Морса*, если множество ее критических точек конечно и состоит из невырожденных точек, то есть точек в которых определитель матрицы $\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ (гессиан) отличен от нуля. Для критической точки p функции Морса φ число отрицательных собственных значений матрицы $\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right)$, вычисленной в точке p, называют *индексом критической точки* p и обозначают $\operatorname{ind}(p)$. В некоторой окрестности критической точки p существуют локальные координаты $y_1, \dots, y_n$ называемые *координатами Морса*, в которых функция φ имеет вид

$$\varphi(y_1, \dots, y_n) = \varphi(p) - y_1^2 - \dots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \dots + y_n^2,$$

где $k = \operatorname{ind}(p)$ (лемма Морса, [5], лемма 2.2).

Естественное ограничение на функцию Ляпунова φ для градиентно-подобного потока f^t состоит в требовании, что она является функцией Морса. В этом случае, аналогично [7] (Proposition), можно доказать, что каждая неподвижная точка p потока f^t является критической точкой функции φ, при этом *индекс Морса* $\dim\, W_p^u$ равен $\operatorname{ind}(p)$.

Если множество критических точек гладкой функции Ляпунова φ для потока f^t совпадает с множеством $\Omega(f^t)$, то φ называется *энергетической функцией* для f^t. Факт существования энергетической функции для потоков из заданного класса требует обоснования. Первый результат в этом направлении был получен С. Смейлом [8], который в 1961 году доказал существование энергетической функции, являющейся функцией Морса для градиентно-подобных потоков, заданных на гладком замкнутом ориентируемом многообразии M^n, $n \geq 1$. В 1968 году К. Мейер [4] обобщил этот результат, построив энергетическую функцию Морса-Ботта[8] для произвольных потоков Морса-Смейла на M^n.

Как уже отмечалось энергетическая функция может служить для топологической классификации потоков Морса-Смейла, в основе которой лежит важное понятие, принадлежащее Р. Тому [10].

Определение 1.2. *Две гладкие функции $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ и $\psi : M^n \to \mathbb{R}$ называются топологически эквивалентными, если существуют гомеоморфизмы $G : M^n \to M^n$ и $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что*

$$\psi \circ G = \chi \circ \varphi.$$

[7] На самом деле Конли доказал более общее утверждение: для любого потока существует непрерывная функция Ляпунова.

[8] Функция φ называется *функцией Морса-Ботта*, если ее гессиан в каждой критической точке невырожден в направлении нормальном к критическому множеству уровня.

К. Мейер доказал ([4], theorem 2), что топологически эквивалентные потоки Морса-Смейла имеют топологически эквивалентные энергетические функции. В работе [4] (proposition) утверждалось, что для потоков Морса-Смейла, заданных на ориентируемых поверхностях, некоторая *специальная энергетическая функция* является полным топологическим инвариантом. Однако, как было отмечено А.А. Ошемковым и В.В. Шарко [6], этот результат верен только для градиентно-подобных потоков. В [6] указаны примеры топологически неэквивалентных потоков Морса-Смейла с замкнутыми траекториями на торе, имеющими эквивалентные специальные энергетические функции. Специальная энергетическая функция для градиентно-подобного потока $f^t: M^n \to M^n$ — это *самоиндексирующаяся* функция Морса, то есть функция Морса $\varphi: M^n \to [0,n]$ такая, что $\varphi(p)=\text{ind}(p)$ для любой критической точки p потока.

В настоящей работе показывается, что для градиентно-подобных потоков, имеющих седловые состояния равновесия одинакового индекса Морса и заданных на ориентируемом замкнутом многообразии размерности 3, самоиндексирующаяся энергетическая функция является полным топологическим инвариантом. Обозначим через $\Phi(M^3)$ класс таких потоков и для определенности будем полагать, что все седловые состояния равновесия рассматриваемых потоков имеют индекс Морса 1.

Теорема 1.1. *Пусть $f^t \in \Phi(M^3)$. Тогда неблуждающее множество $\Omega(f^t)$ содержит ровно один источник, $k \geq 0$ седел и $k+1$ сток, а объемлющее многообразие M^3 диффеоморфно 3-сфере.*

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1.2. *Потоки $f^t, f'^t \in \Phi(M^3)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны их самоиндексирующиеся энергетические функции.*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м РФФИ и гранта Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

2. Доказательство теоремы 1.1.

Пусть $f^t \in \Phi(M^3)$. Обозначим через $k \geq 0$ число седловых состояний равновесия потока f^t и через f сдвиг на единицу времени потока f^t. Тогда $f: M^3 \to M^3$ — диффеоморфизм Морса-Смейла с k седловыми точками индекса Морса 1 и без седловых точек с индексом Морса 2. Индукцией по числу k покажем, что неблуждающее множество $\Omega(f)$ содержит ровно один источник, $k \geq 0$ седел и $k+1$ сток, а объемлющее многообразие M^3 диффеоморфно 3-сфере.

Если $k=0$, то неблуждающее множество $\Omega(f)$ диффеоморфизма f состоит в точности из одного источника и одного стока, а объемлющее многообразие диффеоморфно $\mathbb{S}^3$ (см., например, [3], теорема 2.2.1).

Предположим, что утверждение теоремы имеет место для $k<n$, докажем его справедливость для $k=n$.

Выберем некоторую седловую точку σ диффеоморфизма f. Тогда 2-сфера $S = cl\ (W^s_\sigma)$ является топологическим репеллером, следовательно, существует окрестность $U(S) \in M^3$ и целое положительное число $r(S)$ такое, что $U(S) \subset int\ f^{r(S)}(U(S))$. Не уменьшая общности можно считать, что $r(S) = 1$ для любого σ (в противном случае перейдем к некоторой степени диффеоморфизма f, при этом многообразие M^3 останется прежним).

Из работы [1] (Proposition 0.1) следует, что для каждой седловой точки σ диффеоморфизма f существует замкнутая окрестность $V(S) \subset U(S)$ сферы S, ограниченная гладко вложенными 2-сферами S_1, S_2 и гомеоморфная прямому произведению $\mathbb{S}^2 \times [-1, 1]$. Обозначим через l_1 и l_2 неустойчивые сепаратрисы точки σ, через ω_1 и ω_2 – стоковые точки, принадлежащие замыканиям l_1 и l_2 соответственно (возможно, $\omega_1 = \omega_2$). Из локальной сопряженности диффеоморфизма f с линейным отображением следует, что дуги $cl\ l_1 \cap V(S)$ и $cl\ l_2 \cap V(S)$ лежат в разных компонентах связности множества $V(S) \setminus S$.

Удалим из многообразия M^3 внутренность окрестности $V(S)$. Многообразие $M^3 \setminus int\ V(S)$ является гладким компактным многообразием с краем, состоящим из сфер S_1, S_2. Обозначим через $\tilde{M}^3$ компактное многообразие без края, полученное из многообразия $M^3 \setminus int\ V(S)$ приклеиванием вдоль его края двух замкнутых 3-шаров B_1^3 и B_2^3. Зададим диффеоморфизм $\widetilde{f} : \tilde{M}^3 \to \tilde{M}^3$ таким образом, что:

1) диффеоморфизм $\widetilde{f}|_{\tilde{M}^3 \setminus (B_1^3 \cup B_2^3)}$ топологически сопряжен с диффеоморфизмом $f|_{M^3 \setminus int\ V(S)}$;

2) $\widetilde{f}|_{B_1^3 \cup B_2^3}$ имеет только две неподвижные точки $\alpha_1 \in B_1^3$, $\alpha_2 \in B_2^3$, каждая из которых является неподвижным источником.

Неблуждающее множество $\Omega(\widetilde{f})$ диффеоморфизма Морса-Смейла $\widetilde{f}$ содержит $n-1$ седловых точек с индексом Морса 1 и не содержит седловых точек с индексом Морса 2. Поскольку $\Omega(\widetilde{f})$ содержит в точности два источника, то, по предположению индукции, многообразие $\tilde{M}^3$ состоит из двух компонент связности $\tilde{M}_1^3$, $\tilde{M}_2^3$, каждая из которых диффеоморфна $\mathbb{S}^3$.

По построению многообразие M^3 является связной суммой двух экземпляров 3-сфер[9]. Поэтому M^3 гомеоморфно 3– сфере. Поскольку диффеоморфизм $\widetilde{f}|_{\tilde{M}^3 \setminus (B_1^3 \cup B_2^3)}$ топологически сопряжен с диффеоморфизмом $f|_{M^3 \setminus int\ V(S)}$, то неблуждающее множество диффеоморфизма f содержит ровно один источник, n седел и $n+1$ сток. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 1.2.

Необходимость. Пусть φ и φ' – самоидексирующиеся энергетические функции топологически эквивалентных потоков Морса-Смейла f^t и f'^t из множества $\Phi(M^3)$ и $h : M^3 \to M^3$ гомеоморфизм, преобразующий траектории потока f^t в траектории потока f'^t. Тогда из определения самоидексирующейся функции и свойств гомеоморфизма h следует, что для любого состояния равновесия p потока f^t имеет место равенство $\varphi(p) = \varphi'(h(p))$. Поэтому выберем в качестве гомеоморфизма χ тождественное отображение, и сконструируем гомеоморфизм G, удовлетворяющий определению 1.2.

Пусть $x \in M^n$ произвольная точка отличная от состояния равновесия потока f^t. Обозначим через l_x траекторию потока f^t (f'^t), проходящую через точку x и через $\alpha(l_x)$ ($\omega(l_x)$) состояние равновесия, являющееся α-предельным (ω -предельным) множеством траектории l_x. Положим $x' = h(x)$. Тогда $l_{x'} = h(l_x)$. Из свойств гомеоморфизма h следует, точка $\alpha(l_{x'}) = h(\alpha(l_x))$ ($\omega(l_{x'}) = h(\omega(l_x))$). Кроме того, имеют место равенства: $\varphi(\alpha(l_x)) = \varphi'(\alpha(l_{x'}))$ и $\varphi(\omega(l_x)) = \varphi'(\omega(l_{x'}))$. Пусть $c \in (\varphi(\omega(l_x)), \varphi(\alpha(l_x)))$

[9] Связной суммой $M_1^3 \sharp M_2^3$ двух ориентируемых связных 3-многообразий M_1^3, M_2^3 называется многообразие $M_1^3 \sharp M_2^3$, полученное удалением из M_1^3, M_2^3 шаров $B_1^3 \subset M_3^1$, $B_2^3 \subset M_2^3$ и склеиванием оставшихся многообразий с краем при помощи гомеоморфизма $\varphi : \partial B_1^3 \to \partial B_2^3$, обращающего естественную ориентацию ∂B_1^3.

и $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$ $(\Sigma'_c = (\varphi')^{-1}(c))$. Отметим, что из определения энергетической функции следует, что пересечение $\Sigma_c \cap l_x$ $(\Sigma'_c \cap l_{x'})$ состоит из единственной точки. Тогда на множестве $M^3 \setminus \Omega(f^t)$ корректно определено отображение $\tilde{G}$, ставящее в соответствие точке $y = \Sigma_c \cap l_x$ точку $y' = \Sigma'_c \cap l_{x'}$. По построению отображение $\tilde{G}$ является гомеоморфизмом между множествами $M^3 \setminus \Omega(f^t)$ и $M^3 \setminus \Omega(f'^t)$, преобразующим траектории потока f^t и множество регулярных уровней функции φ в траектории потока f'^t и множество регулярных уровней функции φ' [10]. В силу свойства $\varphi(\alpha(l_x)) = \varphi'(\alpha(l_{x'})$ и $\varphi(\omega(l_x)) = \varphi'(\omega(l_{x'})$ для любой точки x, отличной от состояния равновесия, гомеоморфизм однозначно продолжается до искомого гомеоморфизма G, удовлетворяющего условию: $\varphi(x) = \varphi'(G(x))$.

Достаточность. Пусть f^t и f'^t потоки из множества $\Phi(M^3)$, имеющие эквивалентные самоиндексирующиеся энергетические функции φ и φ', соответственно. Из определения эквивалентных функций следует, что существуют гомеоморфизмы $G : M^3 \to M^3$ и $\chi : [0,3] \to [0,3]$, для которых выполняется условие $\varphi' \circ G = \chi \circ \varphi$.

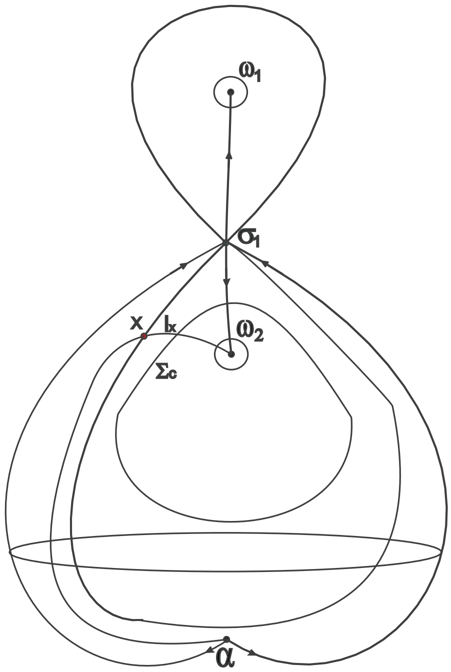

Рис. 1: Построение отображения h_1.

Согласно теореме 2.3 работы [9], $M^3 = \bigcup\limits_{p \in \Omega(f^t)} W^s_p$. Для $q = 0, 1, 2, 3$ обозначим через $\Omega_q(f^t)$ множество всех состояний равновесия потока f^t с индексом Морса q. Из теоремы 1.1. следует, что множество $\Omega_3(f^t)$ состоит из одного источника α. Для любого $c \in [0,3]$ положим $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$, $\Sigma'_c = (\varphi')^{-1}(c)$ и $M_c = \varphi^{-1}([0,c])$, $M'_c = (\varphi')^{-1}([0,c])$. Поскольку функция Ляпунова убывает вдоль блуждающих траекторий потока, то $M_1 \cap W^s_{\Omega_1(f^t)} = \Omega_1(f^t)$. Откуда следует, что для каждой компоненты связности Q множества $M_1 \setminus \Omega_1(f^t)$ существует единственный сток $\omega_Q \in \Omega_0(f^t)$ такой, что $Q \subset W^s_{\omega_S}$. Пусть $x \in (\partial Q \setminus \Omega_1(f^t))$. Тогда траектория l_x потока f^t, проходящая через точку x имеет ω-предельную точку ω_Q и α-предельную точку α. Кроме того, для любого $c \in (0,3)$ множество $\Sigma_c \cap l_x$ состоит из единственной точки.

Положим $x' = G(x)$ и снабдим штрихом обозначения объектов потока f'^t, аналогичных введенным выше объектам потока f^t. Тогда на множестве $W^s_{\Omega_0(f^t)} \setminus cl\, W^u_{\Omega_1(f^t)}$ корректно определено отображение $\tilde{h}_1$, переводящее точку $\Sigma_c \cap l_x$ в точку $\Sigma'_{\chi(c)} \cap l_{x'}$ (см. рисунок

[10] Регулярным уровнем функции Морса называется уровень, не содержащей критических точек.

1). Поскольку $\omega_{Q'} = G(\omega_Q)$ и отображение $\tilde{h}_1$ переводит множества уровня функции φ в множества уровня функции φ', то $\tilde{h}_1$ единственным образом продолжается до гомеоморфизма $h_1 : W^s_{\Omega_0(f^t)} \to W^s_{\Omega_0(f'^t)}$, осуществляющего топологическую эквивалентность ограничений потоков f^t и f'^t на множества $W^s_{\Omega_0(f^t)}$ и $W^s_{\Omega_0(f'^t)}$.

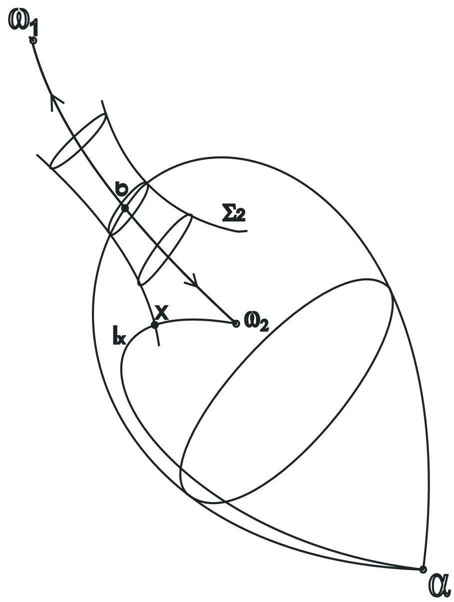

Рис. 2: Построение отображения h_2.

Положим $C = \Sigma_2 \cap W^u_{\Omega_1(f^t)}$ и $C' = \Sigma'_2 \cap W^u_{\Omega_1(f'^t)}$. Согласно теории Морса, линия уровня Σ_2 (Σ'_2) является гладкой 2-сферой. Поскольку φ (φ') является энергетической функцией потока f^t (f'^t) и $\Sigma'_2 = G(\Sigma_2)$, то множество C (C') состоит из k окружностей, по одной на каждом устойчивом многообразии множества $W^s_{\Omega_1(f^t)}$ $(W^s_{\Omega_1(f'^t)})$. Поскольку $h_1(\Sigma_2 \setminus C) = \Sigma'_2 \setminus C'$ и $h_1|_{\Omega_0(f^t)} = G|_{\Omega_0(f^t)}$, то существует гомеоморфизм $g : \Sigma_2 \to \Sigma'_2$ со следующими свойствами:

a) $g(C) = C'$;

b) существует окрестность $V(C)$ множества C такая, что $g|_{\Sigma_2 \setminus V(C)} = h_0|_{\Sigma_2 \setminus V(C)}$.

Пусть $x \in \Sigma_2$, $c \in (0,3)$. Тогда на множестве $W^u_\alpha \setminus \alpha$ корректно определено отображение $\tilde{h}_2$, переводящее точку $\Sigma_c \cap l_x$ в точку $\Sigma'_{\chi(c)} \cap l_{x'}$ (см. рисунок 2). Поскольку $\alpha' = G(\alpha)$, то отображение $\tilde{h}_2$ единственным образом продолжается до гомеоморфизма $h_2 : W^u_\alpha \to W^u_{\alpha'}$, осуществляющего топологическую эквивалентность потоков f^t и f'^t на множествах W^u_α и $W^u_{\alpha'}$. Поскольку гомеоморфизм h_2 переводит множества уровня функции φ в множества уровня функции φ', то h_2 единственным образом продолжается по непрерывности до искомого гомеоморфизма $h : M^3 \to M^3$ формулой $h(x) = \begin{cases} h_2(x), \text{ если } x \in W^u_\alpha; \\ h_1(x), \text{ если } x \in cl\ W^u_{\Omega_1(f^t)}. \end{cases}$ Теорема доказана.

Список литературы

1. C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pecou, “Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves”, *Topology and its Applications*, **117** (2002), 335 – 344.

2. C. Conley, "Isolated Invariant Sets and Morse Index", *CBMS Regional Conference Series in Math.*, **38** (1978).

3. Гринес В.З., Починка О.В., *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". Ижевский институт компьютерных исследований, М. - Ижевск, 2011.

4. Meyer K.R., "Energy Functions for Morse-Smale Systems", *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1031–1040.

5. Milnor J., *Morse Theory*, Princeton University Press, N.Y. (русский перевод: Милнор Дж. Теория Морса. – М.: Мир. 1965.), 1963.

6. Ошемков А.А., Шарко В.В., "О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях", *Математический сборник*, **189**:8 (1998), 93–140.

7. Pixton D., "Wild unstable manifolds", *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.

8. Smale S., "On Gradient Dynamical Systems", *Annals of Math.*, **1**:1 (1961), 199–206.

9. Смейл С., "Дифференцируемые динамические системы", *Успехи мат. наук*, **25**:1 (1970), 113 – 125.

10. Thom R., "La stabilite topologique des applications polinomiales", *Topology*, **1** (1962), 101–120.

Energy function as complete topological invariant for the gradient-like flows with the saddle points of the same Morse index on 3-manifolds

© V. Z. Grines[11], O. V. Pochinka[12], A. V. Ruzaev[13], A.N. Sakharov[14].

Abstract. It is shown that for gradient-like flows with the same Morse index on closed 3-manifolds the energy function is a complete invariant.

Key Words: Morse-Smale flows, energy function, the topological equivalence

[11] Professor of Chair of numerical and functional analysis, Lobachevskii State University, Nizhny Novgorod, vgrines@yandex.ru

[12] Associated Professor of Chair of Theory of Functions, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, olga-pochinka@yandex.ru

[13] Graduatied student, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk

[14] Assistant professor of department of higher mathematic, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; ansakharov2008@yandex.ru.