УДК 517.9

Грубые гетероклинические кривые в нейронных сетях

© И.С. Клыков[1], О.В. Починка[2]

Аннотация. Полученный результат является доказательством существования грубых гетероклинических кривых в системе дифференциальных уравнений типа Лотки-Вольтерра, которая была предложена для моделирования когнитивных и эмоциональных функций мозга в работах [5],[6].

Ключевые слова: нейронные сети, гетероклинические цепочки, система Лотки-Вольтерра.

1. Введение

Традиции моделирования процесса мышления на базе теории динамических систем берут своё начало с рождения кибернетики в конце 1940-х годов [1]. Однако в то время преобладало влияние символического описания искусственного интеллекта и применение чисто информационного подхода к психологическим задачам. Кроме того, ещё в 1960-1970-х годах отсутствовали экспериментальные технологии исследования мозга с достаточно высоким пространственным и временным разрешением. Поэтому попытки динамического описания "живого интеллекта" в то время особого успеха не имели.

В конце XX века динамические идеи применительно к мозгу вновь стали популярны. К примеру, авторы [2] описали развитие определённого поведения новорождённого, такого как "лягание" и "потягивание" с помощью динамических понятий устойчивости, аттракторов в фазовом пространстве и их бифуркаций. Поиски динамических механизмов эмоционального поведения ведутся многие десятилетия. Например, уже в 1935 г. высказывались мнения, что эмоции — это последовательность переходных состояний [3]. В работе [4] развивается теория, в рамках которой и положительные, и отрицательные эмоции рассматриваются и измеряются как сосуществующие и конкурирующие динамические процессы.

В недавних работах [5],[6] для моделирования когнитивных и эмоциональных функций мозга предлагается использовать систему дифференциальных уравнений типа Лотки-Вольтерра. При особых условиях в фазовом пространстве системы удается обнаружить негрубую гетероклиническую цепочку соединяющую седловые точки системы.

Настоящая же работа посвящена изучению системы Лотки-Вольтерра и поиску условий, при которых возможно существование грубых гетероклинических пересечений в фазовом пространстве этой системы.

2. Формулировка результатов

Динамику процесса конкуренции когнитивных или эмоциональных мод между собой и эмоциональных и когнитивных мод друг с другом будем описывать системой уравнений типа Лотки-Вольтерра. В обобщённой форме модель Лотки-Вольтерра имеет вид

[1] Студент кафедры теории функций ННГУ им. Н.И. Лобачевского; igor.kl@mail.ru
[2] Доцент кафедры теории функций ННГУ им. Н.И. Лобачевского; olga-pochinka@yandex.ru

$$\frac{\partial}{\partial t}x_i(t) = x_i\left\{\mu_i(E) - \sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}(E)x_j(t)\right\} + x_i(t)\eta(t), i \in \mathbb{N}, i = \overline{1,n}, \tag{2.1}$$

где $x_i \geq 0$ характеризует активность i-й моды (численность i-й популяции в экологии), n — число взаимодействующих мод (популяций), $\mu_i(E)$ — икремент i-й моды, E — поступающая в систему информация или доступные ресурсы, $\varphi_{ij}(E)$ — элементы матрицы взаимодействия, $\eta(t)$ — мультипликативный шум, присутствующий в системе.

Положим $\mu_i(E) = 1, i = \overline{1,n}$ и рассмотрим данную модель в пространстве $\mathbb{R}^3$ при отсутствии мультипликативного шума. Тогда система примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}x_i(t) = x_i\left\{1 - \sum_{j=1}^{3}\varphi_{ij}(E)x_j(t)\right\}, i \in N, i = \overline{1,3}, \tag{2.2}$$

Авторами [5],[6] была исследована динамика системы (2.2) в предположении, что матрица взаимодействия $(\varphi_{ij}(E))$ имеет вид

$$(\varphi_{ij}(E)) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \beta & 1 & \alpha \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

А именно, при условии $\beta > 1 > \alpha$, $\beta + \alpha > 2$ в фазовом пространстве системы точка $(0,0,0)$ является источником, а точки $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ — седлами, каждое из которых имеет одномерное неустойчивое многообразие. Кривые по которым пересекаются седла образуют негрубую гетероклиническую цепочку. Любая траектория, попав в некоторую окрестность гетероклинической цепочки, проходит всю цепочку от седла к седлу, не покидая этой окрестности.

Настоящая работа посвящена исследованию модели Лотки-Вольтерра на предмет наличия в ней грубых гетероклинических пересечений в пространстве $\mathbb{R}^3$ при отсутствии мультипликативного шума для матрицы взаимодействия $(\varphi_{ij}(E))$ следущего вида

$$(\varphi_{ij}(E)) = \begin{pmatrix} 1 & \mu & \mu \\ \mu & 1 & \mu \\ \mu & \mu & 1 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

При определенных ограничениях на μ в фазовом пространстве системы удалось обнаружить грубые гетероклинические пересечения, а именно, была сформулирована и доказана следущая теорема

Теорема 2.1. *Для матрицы взаимодействия (2.4) и для любых $\mu \in (-\frac{1}{2}, 1)$ в фазовом пространстве системы Лотки-Вольтерра (2.2) существуют грубые гетероклинические кривые.*

Благодарности. Авторы благодарят гранты 12-01-00672, 11-01-12056-офи-м РФФИ, грант правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 и грант Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011) за частичную финансовую поддержку.

3. Основные понятия и определения

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = P(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x_2} = Q(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x_3} = R(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \tag{3.1}$$

или в векторной форме:

$$\dot{x} = F(x), x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \tag{3.2}$$

Решением такой системы дифференциальных уравнений является поток. Дадим более строгое определение потока на метрическом пространстве

Определение 3.1. *Потоком на метрическом пространстве* $(\mathbb{R}^3, d)$ *называется непрерывное отображение* $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *с групповыми свойствами*

1. $f(x, 0) = x, \forall x \in \mathbb{R}^3$
2. $f(f(x, t), s) = f(x, t + s), \forall x \in \mathbb{R}^3; \forall s, t \in \mathbb{R}$

В дальнейшем для потока будем полагать $f(x, t) = f^t(x), t \in \mathbb{R}$. Многие свойства динамической системы определяются положением и асимптотическим поведением ее траекторий.

Определение 3.2. *Траекторией или орбитой точки* $p \in \mathbb{R}^3$ *называется множество* $O_p = f^t(p), t \in \mathbb{R}$.

Выделяют несколько видов траекторий:

1. Неособые, гомеоморфные $\mathbb{R}^1$.
2. Периодические, гомеоморфные $\mathbb{S}^1$.
3. Неподвижные точки.

Определение 3.3. 1. *Точка* p *называется периодической, если* $\exists$ $per(p) > 0$, *такое что* $f^{per(p)}(p) = p, f^t(p) \neq p \;\; \forall t \in (0, per(p))$.

2. *Точка* $p \in \mathbb{R}^3$ *называется неподвижной, если* $O_p = p$.

В рамках настоящей работы рассматривается система без периодических траекторий с неподвижными точками только гиперболического вида.

Определение 3.4. *Неподвижная точка* p *потока* f^t *называется гиперболической, если среди собственных чисел матрицы Якоби* $(\frac{\partial F}{\partial x})|_p$ *нет чисел с нулевой вещественной частью.*

Рассматривают следующую классификацию гиперболических неподвижных точек

- стоковые (все собственные числа имеют отрицательную вещественную часть),

- источниковые (все собственные числа имеют положительную вещественную часть,
- седловые (неподвижные точки, не являющиеся ни стоковыми, ни источниковыми)

Гиперболичность неподвижных точек приводит к существованию так называемых инвариантных многообразий. Введем следующие обозначения

$W^s_p = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : d(p, f^k(y)) \to 0, k \to \infty \right\}$ — устойчивое многообразие

$W^s_u = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : d(p, f^{-k}(y)) \to 0, k \to \infty \right\}$ — неустойчивое многообразие

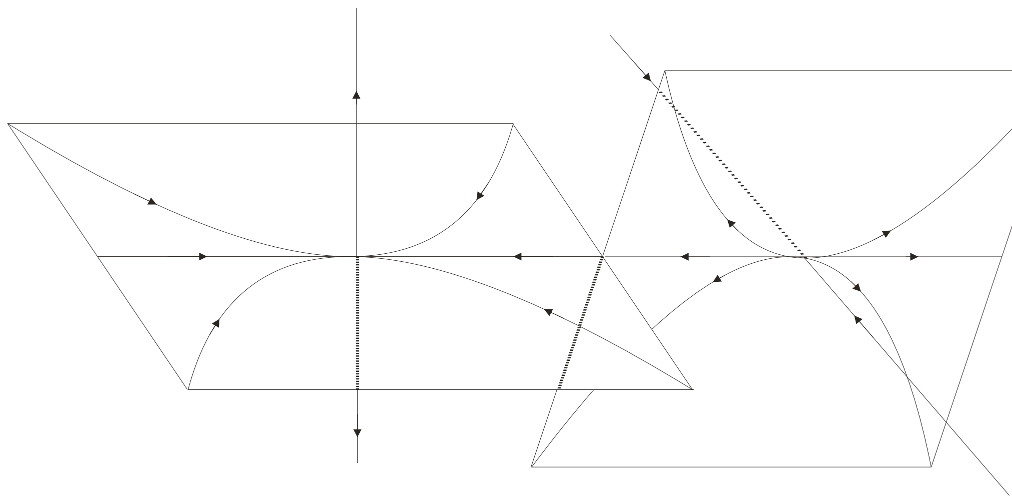

Рис. 1: Грубое пересечение

О п р е д е л е н и е 3.5. *Для гиперболической неподвижной точки p устойчивое и неустойчивое многообразие называется инвариантным многообразием этой точки, компонента связности $W^s_p \setminus p$ $(W^u_p \setminus p)$ называется устойчивой (неустойчивой) сепаратрисой, а число, равное размерности неустойчивого многообразия называется индексом Морса этой точки.*

Для динамических систем с седловыми неподвижными точками интересен особый вид движение от седла к седлу, являющееся гетероклиническим пересечением инвариантных многообразий. Если инвариантные многообразия пересекаются трансверсально, то такое пересечение называют грубым (рис. 1).

Если инвариантные многообразия пересекаются нетрансверсально, то такое пересечение называют негрубым (рис. 2).

4. Доказательство теоремы 2.1.

Запишем систему (2.2) при условии, что матрица взаимодействия $(\varphi_{ij}(E))$ имеет вид (2.4)

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1(1 - x_1 - \mu x_2 - \mu x_3) \\ \dot{x_2} = x_2(1 - \mu x_1 - x_2 - \mu x_3) \\ \dot{x_3} = x_3(1 - \mu x_1 - \mu x_2 - x_3) \end{cases} \tag{4.3}$$

Неподвижные точки системы (4.3) и их собственные числа в силу особого вида матрицы взаимодействия $(\varphi_{ij}(E))$ находятся путем несложных вычислений. Итак, в фазовом пространстве системы имеем следующие неподвижные точки: $O = (0, 0, 0), A_1 = (1, 0, 0),$

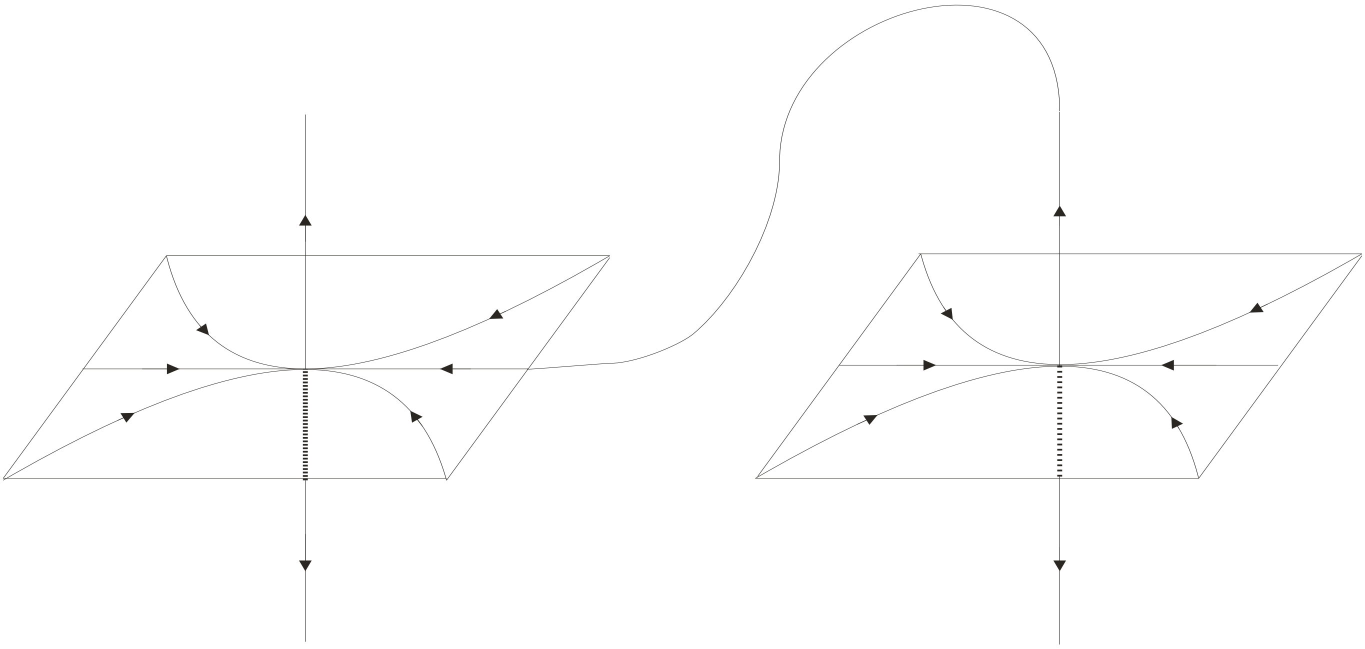

Рис. 2: Негрубое пересечение

$A_2 = (0,1,0), A_3 = (0,0,1), B_1 = (0, \frac{1}{\mu+1}, \frac{1}{\mu+1}), B_2 = (\frac{1}{\mu+1}, 0, \frac{1}{\mu+1}), B_3 = (\frac{1}{\mu+1}, \frac{1}{\mu+1}, 0)$,
$C = (\frac{1}{2\mu+1}, \frac{1}{2\mu+1}, \frac{1}{2\mu+1})$

Для точки O получаем собственные числа: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Точки A_1, A_2, A_3 имеют собственные числа: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1-\mu, \lambda_3 = -1-\mu$, а точки B_1, B_2, B_3: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-1}{\mu+1}$, $\lambda_3 = \frac{1-\mu}{1+\mu}$. Наконец, для точки C собственные значения будут следущими: $\lambda_1 = \frac{-1}{2\mu+1}$, $\lambda_2 = \frac{\mu-1}{2\mu+1}, \lambda_3 = \frac{-1-\mu}{2\mu+1}$.

Согласно утверждению теоремы $\mu \in (-\frac{1}{2}, 1)$. Тогда в фазовом пространстве системы имеем: O — источник, C — сток, A_1, A_2, A_3 — седла с индексом 2, B_1, B_2, B_3 — седла с индексом 1.

Рассмотрим седловые точки A_1, A_2, B_3 и ограничение системы (4.3) на плоскость $x_3 = 0$

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1(1 - x_1 - \mu x_2) \\ \dot{x_2} = x_2(1 - \mu x_1 - x_2) \end{cases} \tag{4.4}$$

В фазовом пространстве системы (4.4) точки A_1, A_2 имеют собственные числа: $\lambda_1 = 1-\mu, \lambda_2 = -1-\mu$, а точка B_3: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-1}{\mu+1}$. То есть, при $\mu \in (-\frac{1}{2}, 1)$ получаем, что в фазовом пространстве системы (4.4) точки A_1, A_2 — седла, а точка B_3 — сток. Поскольку других неподвижных точек в фазовом пространстве системы (4.4) нет, любая траектория проходящая через седла A_1, A_2 должна двигаться к стоку B_3, что в свою очередь означает наличие гетероклинического пересечения между парами точек A_1, B_3 и A_2, B_3 в фазовом пространстве системы (4.3). Поскольку инвариантные многообразия этих точек пересекаются трансверсально, это пересечение является грубым.

Для остальных пар точек рассуждения будут аналогичными в силу симметрии системы (4.3). Теорема доказана.

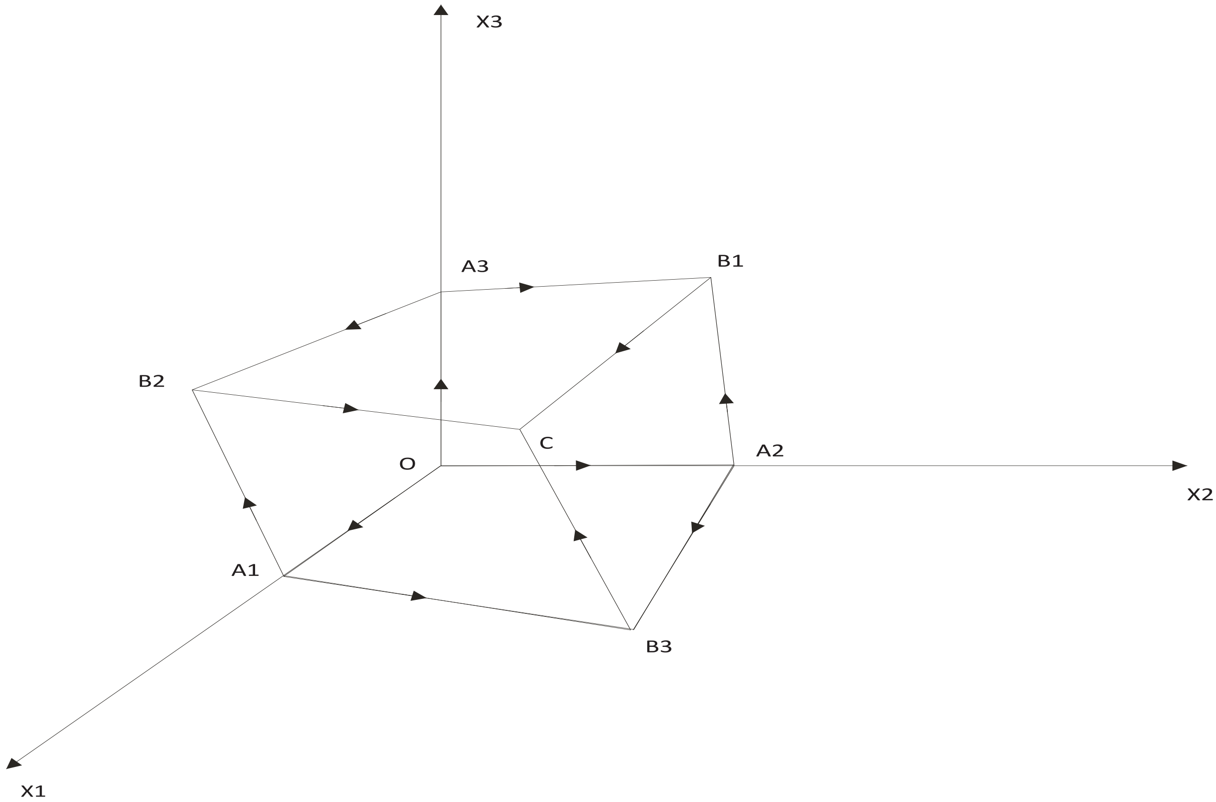

Рис. 3: Иллюстрация к доказательству теоремы

Список литературы

1. Ashby W.R., *Design for a Brain*, J. Wiley, New York, 1954.
2. Thelen E., Smith L.B., *A dynamic Systems Approach to the Development of Cognition and Action*, Cambridge, MA: MIT Press, 1994.
3. Franz A.J., *Psychology of Emotion*, 1935.
4. Zautra A. J., *Emotions, Stress, and Health*, Oxford Univ. Press, New York, 2003.
5. Afraimovich V., Rabinovich M., Varona P., *Heteroclinic Contours in Neural Ensembles and the Winnerless Competition Principle*, Institute for Nonlinear Science. University of California, San Diego, 2002.
6. Рабинович М.И., Мюезинолу М.К., “Нелинейная динамика мозга: эмоции и интелектуальная деятельность”, *Успехи физических наук*, **80**:4 (2010).

Rough heteroclinic curves in neural networks

© I. S. Klykov[3], O. V. Pochinka[4]

Abstract. The result is a proof of the existence of rough heteroclinic curves in the system of differential equations of Lotka-Volterra model, which was proposed to model the cognitive and emotional functions of the brain in papers [5], [6].

Key Words: neural networks, heteroclinic channels, the system of Lotka-Volterra.

[3] Student of theory function chair of Nizhny Novgorod State University after N.I.Lobachevsky; igor.kl@mail.ru

[4] Docent of theory function chair of Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky; olga-pochinka@yandex.ru