УДК 517.9

Об уходящем типе движений

© А. Ф. Зубова[1], С. А. Стрекопытов[2], М. В. Стрекопытова[3]

Аннотация. Целью настоящей статьи будет являться изучение первого типа движений (уходящих), являющегося малоизученной областью качественной теории.

Ключевые слова: Расстояние, метрика, динамическая система, аргумент, метрическое пространство

Рассмотрим динамическую систему $f(p,t)$, заданную на топологическом произведении R метрических пространств R_1, R_2. Метрика ρ пространства R индуцируется метриками ρ_1, ρ_2 пространства R_1, R_2: $\rho(p,q) = \rho_1(p_1,q_1) + \rho_2(p_2,q_2)$, где $(p,q) \in R$, $(p_1,q_1) \in R_1$, $(p_2,q_2) \in R_2$. Отметим, что метрики ρ_1, ρ_2 могут индуцировать метрику ρ и другим способом.

Поведение динамической системы $f(p,t) = f(p_1,p_2,t)$ полностью определяется поведением ее проекций $f_1(p_1,p_2,t)$, $f_2(p_1,p_2,t)$ на пространства R_1, R_2.

Определение 1.2. *Множество R элементов p, природа которых безразлична, называется метрическим пространством, если любым двум элементам $p,q \in R$ соответствует неотрицательное число $\rho(p,q)$, называемое расстоянием или метрикой и удовлетворяющее условиям* [1]*:*

1) $\rho(p,q) = 0$ лишь при $p = q$;

2) $\rho(p,q) = \rho(q,p)$;

3) $\rho(p,q) \le \rho(p,z) + \rho(z,q)$ для любого $z \in R$.

Элементы метрического пространства называются *точками.*

Определение 1.3. *Динамической системой $f(p,t)$ в метрическом пространстве R будем называть однопараметрическую группу преобразований R на себя, удовлетворяющую условиям:*

1) $f(p,0) = p$;

2) $f(p,t)$ непрерывна по совокупности своих аргументов;

3) $f(f(p,t_2),t_1) = f(p,t_1+t_2)$ для любого $p \in R$ для всех t_1,t_2.

Определение 1.4. *Функцию $f(p,t)$ при фиксированном p будем называть движением. Множество всех точек движения $\{f(p,t) : -\infty < t < +\infty\}$ будем называть траекторией движения и обозначать $f(p,I)$. Аналогично множества $\{f(p,t) : 0 \le t < +\infty\}$, $\{f(p,t) : -\infty < t \le 0\}$ будем называть соотвественно положительной и отрицательной траекториями и обозначать $f(p,I^+)$ и $f(p,I^-)$.*

Конечной дугой траектории временной длины $T^2 - T^1$, где $T^2 \ge T^1$, будем называть множество точек $\{f(p,t) : T^2 \le t \le T^1\}$.

Определение 1.5. *Точка q называется $\omega(\alpha)$ - предельной точкой движения $f(p,t)$, если существует последовательность чисел $t_n \to +\infty$ $(t_n \to -\infty)$ такая, что $f(p,t_n) \underset{n\to\infty}{\to} q$.*

[1] Профессор кафедры теории управления, СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Доцент кафедры теории управления, СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] Доцент кафедры теории управления, СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Множество всех ω- предельных точек движения $f(p,t)$ будем обозначать Ω_p, множество всех α-предельных - A_p.

Определение 1.6. *Множество $M \subset R$ называется инвариантным по отношению к динамической системе $f(p,t)$, если оно состоит из траекторий этой динамической системы, т.е. из $p \in M$ следует $f(p,t) \subset M$.*

Свойства множеств Ω_p, A_p изучены в литературе [1].

Пусть выполнены следующие условия.

1. Существует последовательность $\{t_n\}$ такая, что $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и $f_1(p_1,p_2,t_n) \to q_1 \in R_1$.

2. Последовательность $f_2(p_1,p_2,n)$, $n = 1,2,\dots$, не имеет предельных точек.

Точку q_1 уместно назвать ω - предельной точкой движения $f_1(p_1,p_2,t)$. Отметим, что к функции $f_1(p_1,p_2,t)$ термин "движение"мы применяем не в строгом смысле. Множество ω - предельных точек движения $f_1(p_1,p_2,t)$ обозначим Ω_{f_1}. Покажем, что движение, удовлетворяющее условиям 1, 2, является уходящим.

Определение 1.7. *Назовем уходящее движение $f(p,t)$, удовлетворяющее условиям 1,2, положительно устойчивым по Пуассону в расширенном смысле по отношению к пространству R_1, если существует хотя бы одна ω - предельная точка движения $f(p_1,p_2,t)$, принадлежащая самому движению, т.е. существует момент времени t^* такой, что $f_1(p_1,p_2,t^*) = q_1$, $q_1 \in \Omega_{f_1}$.*

Аналогичные определения можно ввести и при $t \to -\infty$.

Среди устойчивых по Пуассону в расширенном смысле движений выделим особый вид движений: пусть $f_1(q_1,p_2,t) \equiv q_1$, тогда движение $f(p,t)$ назовем равновесным. Обозначим через $P(q_1)$ множество точек $p_2 \in R_2$, для которых движение $f(p,t)$ является равновесным

$$P(q_1) = \{p_2 \in R_2 :\ f_1(q_1,p_2,t) \equiv q_1\}.$$

Очевидно, что $P(q_1)$ либо пусто, либо состоит из бесконечного множества точек. Особый интерес представляет случай $P(q_1) = R_2$.

Теорема 1.3. *Множество точек $Q = \{q \times p(q_1)\}$ есть замкнутое множество.*

Множество $Q = \{q \times p(q_1)\}$ является инвариантным множеством динамической системы $f(p,t)$. Действительно, из $p \in Q$ следует, что $f_1(p,t) \equiv q_1$, $f_2(p,I) \subset P(q_1)$, поэтому для всех $t \geq 0$ имеет место $f(p,t) \in Q$.

Для изучения свойств уходящих движений расширим определение инвариантности.

Определение 1.8. *Множество $M \subset R = R_1 \times R_2$ назовем R_1 - инвариантным по отношению к динамической системе $f(p,t) = (f_1(p_1,p_2,t), f_2(p_1,p_2,t))$, если из $p \in M$ следует $f_1(p,t) \in M_{R_1}$ $\forall t \geq 0$, $M_{R_1} = \{p_1 \in R_1 : \exists p_2 \in R_2, (p_1,p_2) \in M\}$.*

Обозначим $M_{R_1} = M \bigcap R_1$. В качестве примера R_1- инвариантного множества в R можно привести множество $Q = \{q \times p(q_1)\}$. Действительно, из $p \in Q$ следует $f_1(p,t) \equiv q_1$, $f_1(p,I) \subset Q_{R_1} = q_1$. Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 1.4. *Множество точек $Q = \{q \times p(q_1)\}$ есть инвариантное замкнутое множество.*

Отметим, что из R_1-инвариантности не следует инвариантность, а все инвариантные множества являются и R_1 - инвариантными.

О п р е д е л е н и е 1.9. *Движение* $f(p,t) = (f_1(p_1,p_2,t), f_2(p_1,p_2,t))$ *в* $R = R_1 \times R_2$ *назовем устойчивым по Лагранжу в расширенном смысле по отношению к пространству* R_1, *если траектория* $f_1(p,I)$ *целиком лежит в ограниченной области* $G \subset R_1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-00624)

Список литературы

1. А. Ф. Зубова, *Математические методы моделирования промышленных процессов и технологий*, СПбГУ, СПб, 2004,, 472 с.

The passing type movements

© **A. F. Zubova[4], S. A. Strecopitov[5], M. V. Strecopitova[6]**

Abstract. The arm this article is appears learning first type motions (going to) appearing small learning region of qualitative theory

Key Words: Distance, metric, dynamical system, argument, metrical space.

[4] Professor, SPbGU, town Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

[5] Docent, SPbGU, town Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

[6] Docent, SPbGU, town Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru