УДК 517.95

О слабой разрешимости смешанной задачи для нелинейного псевдогиперболического уравнения

© **Т. К. Юлдашев**[1]

Аннотация. В данной работе доказывается теорема о слабой обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейного псевдогиперболического уравнения пятого порядка. С помощью метода разделения переменных получается счетная система нелинейных интегральных уравнений. Используется метод последовательных приближений. Доказывается сходимость полученных рядов.

Ключевые слова: слабая разрешимость, интегральное тождество, система нелинейных интегральных уравнений, метод последовательных приближений.

В области D рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u(t,x)-\nu\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right)+\mu\frac{\partial^5 u(t,x)}{\partial t\,\partial x^4}+\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^4}=f\left(t,x,u(t,x)\right) \tag{1.1}$$

с начальными

$$u(t,x)_{|t=0}=\varphi_1(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u(t,x)_{|t=0}=\varphi_2(x) \tag{1.2}$$

и граничными условиями

$$u(t,x)_{|x=0}=u_{xx}(t,x)_{|x=0}=u(t,x)_{|x=l}=u_{xx}(t,x)_{|x=l}=0, \tag{1.3}$$

где $f\left(t,x,u\right)\in C\left(D\times R\right)$, $\varphi_j(x)\in C^4(D_l)$, $\varphi_j(x)_{|x=0}=\varphi_j''(x)_{|x=0}=\varphi_j(x)_{|x=l}=\varphi_j''(x)_{|x=l}=0$, $j=1,2$, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[0,T]$, $D_l\equiv[0,l]$, $0<T<\infty$, $0<l<\infty$, $0<\nu$, μ – малые параметры.

Отметим, что смешанные и краевые задачи были рассмотрены в работах многих авторов, в частности, в [1]-[6]. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных более высоких порядков. Изучение многих задач газовой динамики приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных более высоких порядков [7].

Определение 1.1. *Если функция $u(t,x)\in C(D)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству*

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l\Big\{u(t,y)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,y)-\nu\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial y^2}\Phi(t,y)-\mu\frac{\partial^5}{\partial t\partial y^4}\Phi(t,y)+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi(t,y)\right]-$$

$$-f\left(t,y,u(t,y)\right)\Phi(t,y)\Big\}\,dydt=\int\limits_0^l\varphi_1(y)\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,y)-\nu\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial y^2}\Phi(t,y)+\mu\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi(t,y)\right]_{t=0}dy-$$

$$-\int\limits_0^l\varphi_2(y)\left[\Phi(t,y)-\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(t,y)\right]_{t=0}dy$$

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск; tursunbay@rambler.ru.

для любого $\Phi(t,x)\in W_p^{(k)}(D)$ *, то функция* $u(t,x)$ *называется решением смешанной задачи* (1.1)-(1.3).

Пусть $b_i(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\,\sin\lambda_i x$ – собственные функции дифференциального оператора $\dfrac{\partial^4}{\partial x^4}$, $\lambda_i = dfraci\pi l$, $i=1,2,\ldots$.

Тогда слабое решение смешанной задачи (1.1)-(1.3) разыскивается в виде ряда:

$$u(t,x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\left(1-\frac{i-1}{N}\right)a_i(t)\,b_i(x),\quad (t,x)\in D. \tag{1.4}$$

Применение метода разделения переменных в виде (1.4) и использование интегрального тождества позволяет отказаться от непрерывной дифференцируемости правой части уравнения (1.1). Кроме того, такой подход позволяет свести смешанную задачу к счетной системе нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ).

Пусть $\lambda_i^4\mu^2-4\lambda_i^2\nu-4<0$. Тогда в силу (1.4) и определения решения смешанной задачи (1.1)-(1.3) получается следующая ССНИУ:

$$a_i(t)=w_i(t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\Bigl(1-\frac{j-1}{N}\Bigr)a_j(s)\,b_j(y)\right)G_i(t,s)\,b_i(y)\,dyds,$$

где

$$w_i(t)=\exp\Bigl\{-\frac{1}{2}\omega_{1i}(\nu,\mu)t\Bigr\}\Bigl[\varphi_{1i}\cos\omega_{2i}(\nu,\mu)\frac{t}{2}+\frac{2}{\omega_{2i}(\nu,\mu)}\Bigl(\varphi_{2i}+\frac{\varphi_{1i}}{2}\omega_{1i}(\nu,\mu)\Bigr)\sin\omega_{2i}(\nu,\mu)\frac{t}{2}\Bigr],$$

$$G_i(t,s)=\frac{2\exp\Bigl\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)\dfrac{t-s}{2}\Bigr\}\,\sin\omega_{2i}(\nu,\mu)\dfrac{t-s}{2}}{\omega_{0i}(\nu)\Bigl[\omega_{2i}(\nu,\mu)+\omega_{1i}(\nu,\mu)\sin\omega_{2i}(\nu,\mu)s\Bigr]},$$

$$\omega_{0i}(\nu)=1+\lambda_i^2\nu,\ \omega_{1i}(\nu,\mu)=\frac{\lambda_i^4\mu}{\omega_{0i}(\nu)},\ \omega_{2i}(\nu,\mu)=\frac{\lambda_i^2\sqrt{4\omega_{0i}(\nu)-\lambda_i^4\mu^2}}{\omega_{0i}(\nu)}.$$

Отсюда следует, что

$$u(t,x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\left(1-\frac{i-1}{N}\right)a_i(t)\,b_i(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\left(1-\frac{i-1}{N}\right)b_i(x)\Bigl[w_i(t)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\Bigl(1-\frac{j-1}{N}\Bigr)a_j(s)\,b_j(y)\right)G_i(t,s)\,b_i(y)\,dyds\Bigr].$$

Теорема 1.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. $\lambda_i^4\mu^2-4\lambda_i^2\nu-4<0$;

2. Функция $f\,(t,x,u(t,x))$ *при фиксированном* $t\in D_T$ *непрерывна по* $(t,x)\in D_l\times R$ *и удовлетворяет условию Гельдера по* x *;*

3. $\|f\,(t,x,u_0(t,x))\|_{C(D)}\le g(t)<\infty$;

4. $f(t,x,u)\in Lip\{g(t)_{|u}\}$, *где*$0<\int\limits_0^t g(s)ds<\infty$;

5. $u_0(t,x)\in C^1(D)$, *где*$u_0(t,x)=\lim_{N\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{N}\left(1-\dfrac{i-1}{N}\right)w_i(t)\,b_i(x)$.

Тогда уравнение

$$u(t,x) = u_0(t,x) + \int_0^t \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{i-1}{N}\right) f_i(u)\, G_i(t,s)\, b_i(x)\, ds, \tag{1.5}$$

где $f_i(u) = \int\limits_0^l f\,(t,y,u(t,y))\; b_i(y)\, dy$ *, имеет единственное решение в классе* $C^1(D)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $u(t,y) \in C(D)$, то

$$\left| \sum_{i=1}^{N} \left[\int_0^l \left(1 - \frac{i-1}{N}\right) f\,(t,y,u_0(t,y))\; b_i(y)\, dy \right] b_i(x) \right| \; le \max_x |f\,(t,y,u_0(t,y))\,| \le g(t)$$

и

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left[\int_0^l \left(1 - \frac{i-1}{N}\right) f\,(t,y,u_0(t,y))\; b_i(y)\, dy \right] b_i(x) = f\,(t,y,u_0(t,y))\,,$$

причем сходимость равномерна по x для любого $t \in D_T$.

Так как функция $f\,(t,x,u(t,x))$ удовлетворяет условию Гельдера, её частичные суммы равномерно ограничены:

$$\left| \sum_{i=1}^{N} f_i(u)\, b_i(x) \right| \le \delta_1\, \|f(u)\|_C.$$

где $0 < \delta_1$ – постоянное число.

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$u_{k+1}(t,x) = u_0(t,x) + \int_0^t \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{i-1}{N}\right) f_i(u_k)\, G_i(t,s)\, b_i(x)\, ds, \tag{1.6}$$

где $f_i(u_k) = \int\limits_0^l f\,(t,y,u_k(t,y))\; b_i(y)\, dy,\ k = 0,1,2,\ldots.$

Применение преобразования Абеля к правой части (1.6) дает

$$\|u_1(t,x) - u_0(t,x)\|_{C(D)} \le \left| \int_0^t \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{i-1}{N}\right) f_i(u_0)\, G_i(t,s)\, b_i(x)\, ds \right| \le$$

$$\le \delta_1 \int_0^t \|f_i(u_0)\|_{C(D)} \cdot |G_i(t,s)|\, ds \le \delta_1\, \delta_2 \int_0^t g(s)\, ds, \tag{1.7}$$

где $\delta_2 = \max_{(t,s)} |G_i(t,s)|$.

В силу второго условия теоремы, для произвольного натурального числа $k \ge 2$, справедлива оценка

$$\|u_{k+1}(t,x) - u_k(t,x)\|_{C(D)} \le \delta_1\, \delta_2 \int_0^t \left\| f\Big(s,x,u_k(s,x)\Big) - f\Big(s,x,u_{k-1}(s,x)\Big) \right\|_{C(D)} ds \le$$

$$\leq \delta_1\,\delta_2 \int\limits_0^t g(s)\,\|u_k(s,x) - u_{k-1}(s,x)\|_{C(D)} ds \leq \frac{1}{(k+1)!}\left[\delta_1\,\delta_2 \int\limits_0^t g(s)\,ds\right]^{k+1}. \qquad (1.8)$$

Из (1.7) и (1.8) следует равномерная сходимость при $k \to \infty$ последовательности функций $\left\{u_k(t,x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ к функции $u(t,x)$, которая является решением уравнения (1.5). Единственность решения уравнения (1.5) следует из оценки

$$\|u(t,x) - \vartheta(t,x)\|_{C(D)} \leq \delta_1\,\delta_2 \int\limits_0^t g(s)\,\|u(s,x) - \vartheta(s,x)\|_{C(D)} ds, \qquad (1.9)$$

если предположить, что уравнение (1.5) имеет два решения $u(t,x)$ и $\vartheta(t,x)$ в области D и применить к (1.9) неравенства Гронуолла-Беллмана.

Список литературы

1. Гордезиани Д. Г., Авалашвили Г. А., “Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды”, *Матем. моделир.*, **12**:1 (2000), 94–103.

2. Дмитриев В. Б., “Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения”, *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*, 2006, № 2(42), 15–27.

3. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967, 736 с.

4. Пулькина Л. С., “Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения”, *Мат. заметки*, **74**:3 (2003), 435–445.

5. Самарский А. А., “О некоторых проблемах теории диффренциальных уравнений”, *Дифференц. уравн.*, **16**:11 (1980), 1925–1935.

6. Соболев С. Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Наука, М., 1988, 336 с.

7. Алгазин С. Д., Кийко И. А., *Флаттер пластин и оболочек*, Наука, М., 2006, 248 с.

On weak solvability of mixed value problem for nonlinear pseudo hyperbolic equation.

© T. K. Yuldashev[2]

Abstract. In this article it is proved the theorem about the weak generalized solvability of mixed value problem for nonlinear partial pseudohyperbolic differential equations of the fifth order. By the method of separation variables the countable system of nonlinear integral equation is obtained. The successive approximations method is used. Convergence of obtained series is proved.
Key Words: weak solvability, integral identity, system of nonlinear equations, method of successive approximations.

[2] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk; tursunbay@rambler.ru.