УДК 517.9

Условия возникновения хаотического движения в динамической системе

© С. В. Зубов[1]

Аннотация. В статье рассмотрен вопрос об условиях возникновения хаотического движения в динамической системе. Рассмотрено определение хаотического движения. Целью статьи будет выяснение аналитической природы случайных последовательностей, применяемых на практике

Ключевые слова: Последовательность, хаотичность, случайное число, рекуррентное соотношение, интервал, модуль сравнения, точка

1. Введение

Случайность у современного поколения математиков во многом ассоциируется с подпрограммой RANDU. Действительно, уже многие десятилетия успешно применяются программные генераторы случайных чисел (ПГСЧ). Применение ПГСЧ более эфективно, чем выработка случайных чисел другими способами. Случайные числа, полученные с помощью ПГСЧ, используются в различных технических устройствах, при моделировании, численном анализе (метод Монте-Карло). Применяемые ПГСЧ подвергаются различным статистическим испытаниям для определения их состоятельности [1].

2. Построение в аналитическом виде функции

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Значения функции $\varphi(t)$ в целочисленных точках $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, … связаны с последовательностью*

$$y_i = \frac{x_i}{m} 2\pi \tag{2.1}$$

, полученной с помощью линейной конгруэнтной последовательности, следующим образом: $\varphi(t_i) = \cos y_i + i \sin y_i$.

Последовательность значений функции $f(t)$ в целочисленных точках $0, 1, 2, \ldots$ совпадает с линейной конгруэнтной последовательностью x_0, x_1, x_2, …

Таким образом, построена в явном аналитическом виде функция, порождающая те же значения, что и линейная конгруэнтная последовательность. Рассмотрим основные свойства этой функции.

Определение 2.1. *Функция $f(t)$, заданная и непрерывная при $t \in (-\infty, +\infty)$, называется рекуррентной, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $L_\varepsilon > 0$ такое, что в каждом интервале $(\alpha, \alpha + L_\varepsilon)$ действительной оси $\alpha \in (-\infty, \infty)$ для любого действительного числа t существует число τ_t, удовлетворяющее условию*

$$|f(t + \tau_t) - f(t)| < \varepsilon.$$

[1] Доцент кафедры теории управления, СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Если число τ можно при любом $\varepsilon > 0$ выбрать не зависящим от t, то $f(t)$ является почти периодической функцией по Бору.

Обозначим через R_f множество всех рекуррентных функций.

Теорема 2.2. *Если $f(t) \in R_f$, то функция $f(t)$ ограничена.*

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Выберем L_ε в соответствии с определением 2.1.. Положим $c = \sup\limits_{t\in[0,L_\varepsilon]} |f(t)|$. Тогда $c < +\infty$ ввиду непрерывности функции $f(t)$. Пусть t - любое конечное действительное число. Выберем в интервале $(-t, -t + L_\varepsilon)$ число t_τ согласно 2.1. Тогда будем иметь с одной стороны $t + \tau_t \in [0, L_\varepsilon]$, а с другой стороны, $|f(t + \tau_t) - f(t)| < \varepsilon$. Отсюда найдем, что $|f(t)| < c + \varepsilon$, что и требовалось доказать.
Доказательство закончено.

Теорема 2.3. *Множество R_f есть полное пространство в смысле равномерной сходимости на действительной оси.*

Доказательство. Пусть дана такая последовательность функций $f_n(t) \in R_f$, что $f_n(t)$ равномерно сходится к функции $f(t)$ при $t \in (-\infty, +\infty)$. Покажем, что $f(t) \in R_f$. По числу $\varepsilon/3$ в силу равномерной сходимости можно указать такое n_0, что $|f(t) - f_{n_0}(t)| < \varepsilon/3 \ \ \forall t \in (-\infty, +\infty)$.

По определению 2.1. для числа $\varepsilon/3$ можно указать такую величину L_ε, что будет $|f_{n_0}(t + \tau_t) - f_{n_0}(t)| < \varepsilon/3$, где τ_t - некоторая величина из интервала $(\alpha, \alpha + L_\varepsilon)$, соответствующая данному t. Оценим разность:

$$|f(t + \tau_t) - f(t)| \le |f(t + \tau_t) - f_{n_0}(t + \tau_t)| + |f(t) - f_{n_0}(t)| + |f_{n_0}(t + \tau_t) - f_{n_0}(t)| < \varepsilon.$$

Следовательно, τ, $\varepsilon > 3$ - почти периоды функции $f_{n_0}(t)$ является τ, ε - почти периодами функции $f(t)$. Таким образом, $f(t) \in R_f$, что и требовалось доказать.
Доказательство закончено.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-00624)

Список литературы

1. И. В. Зубов, Н. В. Зубов, М. В. Стрекопытова, *Анализ управляемых систем и равновесных движений*, ВВМ, СПб, 2012,, 322 с.

Conditions for the occurrence of chaotic motion in a dynamic system

© **Zubov S.V.**[2]

Abstract. In article is shows the question about conditions origin motion by dynamics system. Is consider the definition origin motion. The object this article were elucidation analytical nature chance sequences applicable on practice.

Key Words: Sequence, origin, chance number, recurrent correlation, interval, module of comparison, point.

[2] Docent, town Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru