УДК 517.938

О внутренней динамике диффеоморфизмов Смейла-Виеториса

© Е. В. Жужома[1], Н. В. Исаенкова[2]

Аннотация. Статья посвящена изучению внутренней динамики нового класса диффеоморфизмов Смейла-Виеториса замкнутых n-мерных многообразий. Доказано, что ограничение диффеоморфизма Смейла-Виеториса на множестве $T^k \times N \subset M^n$, где T^k – k-мерный тор, $k \geq 1$, N - многообразие размерности $n-k$ с непустой границей, сопряжено обратному пределу d-накрытия k-мерного тора.

Ключевые слова: топологическая сопряженность, неблуждающее множество, обратный предел

Одной из главных задач качественной теории динамических систем является задача топологической сопряженности, а именно, нахождение необходимых и достаточных условий существования гомеоморфизма многообразия, переводящего орбиты одного диффеоморфизма в орбиты другого диффеоморфизма, с наличием коммутативной диаграммы отображений.

Для удобства читателя напомним некоторые определения понятий, которые используются в данной статье. Пусть преобразования $f: M \to M$, $g: N \to N$ имеют инвариантные множества Λ_f, Λ_g соответственно. Ограничения $f|_{\Lambda_f}$, $g|_{\Lambda_g}$ этих преобразований на их инвариантные множества называются *сопряженными*, если существует гомеоморфизм $\varphi: \Lambda_f \to \Lambda_g$, такой, что $\varphi \circ f|_{\Lambda_f} = g \circ \varphi|_{\Lambda_f}$, то есть выполняется следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_f & \xrightarrow{f} & \Lambda_f \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \Lambda_g & \xrightarrow{g} & \Lambda_g \end{array}$$

Пусть $T^k = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{k}$, $k \geq 2$ – k-мерный тор. *d-накрытием* ($d \geq 2$) называется сохраняющее ориентацию d-листное накрытие k-мерного тора $g: T^k \to T^k$ такое, что для любой точки $t \in T^k$ полный прообраз $g^{-1}(t)$ состоит из d различных точек t_1, t_2, $\ldots$, $t_d \in T^k$, для которых выполняются равенства $g(t_1) = \ldots = g(t_d)$.

Обозначим через $\prod_{i\in\mathbb{Z}_0^+} T_i^k$ прямое произведение счетного семейства k-мерных торов $T_i^k = T^k$, наделенное тихоновской топологией, где $\mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ - множество целых неотрицательных чисел. В этой топологии база образована множествами $\prod_{i\in\mathbb{Z}_0^+} V_i$, где V_i открыты в T_i^k, и только для конечного множества индексов i множества V_i отличны от T_i^k, см. [2], стр. 155. Точками множества $\prod_{i\in\mathbb{N}} T_i^k$ являются последовательности $\{t_i\}_0^\infty$, где $t_i \in T_i^k$.

Пусть $\prod_g$ подмножество множества $\prod_{i\in\mathbb{Z}_0^+} T_i^k$, состоящее из последовательностей $\{t_i\}_0^\infty$, где $t_i = g(t_{i+1})$ при всех $i \geq 0$. Топология на $\prod_g$ индуцируется топологией на

[1] Профессор кафедры математики, Нижегородский государственный педагогический университет им. Козьмы Минина, Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru.

[2] Старший преподаватель, Нижегородский государственный педагогический университет им. Козьмы Минина, Нижний Новгород; nisaenkova@mail.ru.

Авторы благодарят РФФИ, гранты 11-01-12056-офи-м-2011, 12-01-00672 и грант Правительства РФ 11.G34.31.0039 за финансовую поддержку.

$\prod_{i\in\mathbb{Z}_0^+} T_i^k$. Определим на $\prod_g$ отображение $\hat{g}:\prod_g\to\prod_g$, положив

$$\hat{g}\left(\{t_0,\ldots,t_i,\ldots\}\right)=\{g(t_0),t_0,\ldots,t_i\ldots\}.$$

Следуя [4] (см. также [3]), пространство $\prod_g$ с отображением $\hat{g}$ называется *обратным пределом преобразования* g.

Диффеоморфизм $f:M^n\to M^n$ замкнутого ориентированного n-мерного многообразия M^n называется *диффеоморфизмом Смейла-Виеториса* (см. [1]), если существует n-мерное подмногообразие $T^k\times N\subset M^n$, где T^k – k-мерный тор, $k\geq 1$, N многообразие размерности $n-k$ с непустой границей, и ограничение $f|_{T^k\times N}\stackrel{\text{def}}{=}F$ является диффеоморфизмом $F:T^k\times N\to F(T^k\times N)\subset T^k\times N$ на свой образ, который удовлетворяет следующим условиям:

- F имеет вид
$$F(t,z)=(g(t),w(t,z)),\quad t\in T^k,\quad z\in N,\tag{1.1}$$
где $g:T^k\to T^k$ – d-накрытие класса, гомотопное растягивающемуся отображению $E_d:T^k\to T^k$ степени $d\geq 2$;

- при фиксированном $t\in T^k$ преобразование $w|_{\{t\}\times N}:\{t\}\times N\to T^k\times N$ является равномерно сжимающим вложением
$$\{t\}\times N\to int\left(\{g(t)\}\times N\right),\tag{1.2}$$
т.е. существуют константы $0<\lambda<1$, $C>0$ такие, что
$$diam\ (F^n(\{t\}\times N))\leq C\lambda^n diam\ (\{t\}\times N),\ \forall n\in\mathbb{N}.\tag{1.3}$$

Пусть диффеоморфизм f удовлетворяет условиям 1.1-1.3, рассмотрим пересечение

$$\cap_{l\geq 0}F^l(T^k\times N)\stackrel{\text{def}}{=}\mathfrak{M}.$$

Основная цель настоящей статьи – исследовать внутреннюю динамику диффеоморфизмов Смейла-Виеториса, удовлетворяющих условиям 1.1-1.3, на множестве $\mathfrak{M}$.

Лемма 1.1. *Множество $\mathfrak{M}$ инвариантно относительно F.*

Доказательство. Учитывая условие (1.3), получаем $F^l(T^k\times N)\supset F^{l+1}(T^k\times N)$. Тогда

$$F(\mathfrak{M})=F(\bigcap_{l\geq 0}F^l(T^k\times N)=\bigcap_{l\geq 0}F^{l+1}(T^k\times N)=\mathfrak{M}.$$

Аналогичным образом, $\mathfrak{M}=\bigcap_{l\geq 0}F^l(T^k\times N)=\bigcap_{l\geq 1}F^l(T^k\times N)$ и получаем

$$F^{-1}(\mathfrak{M})=F^{-1}(\bigcap_{l\geq 0}F^l(T^k\times N)=\bigcap_{l\geq 1}F^l(T^k\times N)=\mathfrak{M}.$$

Доказательство закончено.

Множество $\{t\}\times N\stackrel{\text{def}}{=}N_t$ назовем *t-слоем*, где $t\in T^k$. Каждый слой естественным образом отождествляется с N посредством проекции $p_2:T^k\times N\to N$. Согласно (1.2), диффеоморфизм F переводит t-слой в $g(t)$-слой, который будем называть образом исходного слоя. Отметим, что так как g - d-накрытие и имеет степень $d\geq 2$, то для любой точки $t \in T^k$ полный прообраз $g^{-1}(t)$ состоит из d различных точек. Пусть t_1, t_2, $\ldots$, $t_d \in T^k$ попарно различны и $g(t_1) = \ldots = g(t_d)$. Тогда

$$F(N_{t_i}) \cap F(N_{t_j}) = \emptyset, \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq d, \tag{1.4}$$

т.е. образы слоев $F(N_{t_1})$, $\ldots$, $F(N_{t_d})$ попарно не пересекаются.

Докажем следующую лемму, необходимую для построения символической модели ограничения отображения F на множестве $\mathfrak{M}$.

Лемма 1.2. *Каждой точке $p \in \mathfrak{M}$ соответствует единственная последовательность точек $\{t_i\}_0^\infty$, $t_i \in T^k$, и соответствующая последовательность образов слоев $F^i(\{t_i\} \times N) = F^i(N_{t_i})$ таких, что*

- $p \in \cdots \subset F^i(N_{t_i}) \subset \cdots \subset F(N_{t_1}) \subset N_{t_0}$, $p = \cap_{i \geq 0} F^i(N_{t_i})$;
- $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$.

Доказательство. Лемма тривиальна для $i = 0$ и $i = 1$. Для фиксированной точки p существует единственная точка $t_0 \in T^k$ такая, что $p \in \{t_0\} \times N$. Положим $N_{t_0} = \{t_0\} \times N$. Из (1.1) существуют попарно различные s_1, $\ldots$, $s_d \in T^k$ такие, что $g(s_1) = g(s_2) = \ldots = g(s_d) = t_0$, а образы соответствующих слоев $F(\{s_i\} \times N)$ принадлежат слою N_{t_0}, $F(\{s_i\} \times N) \subset N_{t_0}$, $i = 1$, $\ldots$, d. Согласно (1.4), множества $F(\{s_i\} \times N)$, $i = 1$, $\ldots$, d, попарно не пересекаются. Поэтому существует единственное s_j такое, что $p \in F(\{s_j\} \times N)$. Положим $t_1 = s_j$, $N_{t_1} = \{t_1\} \times N$. Из 1.2 получаем $\{t_1\} \times N \to int\,(\{g(t_1)\} \times N)$. Таким образом, $p \in F(N_{t_1}) \subset N_{t_0}$ и $t_0 = g(t_1)$.

Аналогично, из (1.1) для точки t_1 существуют попарно различные s_1', $\ldots$, $s_d' \in T^k$ такие, что $g(s_1') = g(s_2') = \ldots = g(s_d') = t_1$ и $F^2(\{s_j'\} \times N) \subset F(\{t_1\} \times N)$. Образы $F^2(\{s_i'\} \times N)$ слоев $N_{s_i'}$, $i = 1$, $\ldots$, d, попарно не пересекаются. Поэтому существует единственное s_j' такое, что $p \in F^2(\{s_j'\} \times N)$. Обозначим $t_2 = s_j'$, для которого выполняется $\{t_2\} \times N \to int\,(\{g(t_2)\} \times N)$, и $N_{t_2} = \{t_2\} \times N$. Тогда $p \in F^2(N_{t_2}) \subset F(N_{t_1}) \subset N_{t_0}$ и верны равенства $t_0 = g(t_1)$, $t_1 = g(t_2)$.

Пусть по предположению индукции существует единственная последовательность точек $\{t_l\}_0^{l-1}$, $t_l \in T^k$, и l слоев $F^l(\{t_l\} \times N) = F^l(N_{t_l})$ таких, что $p \in F^{l-1}(N_{t_{l-1}}) \subset \cdots \subset F(N_{t_1}) \subset N_{t_0}$, где $N_{t_i} = \{t_i\} \times N$. Таким образом, $p \in \bigcap_{i \geq 0}^{l-1} F^i(N_{t_i})$. Из (1.1) означает, что существуют

$$s_1'', s_2'' \ldots, s_d'' \in T^k \text{ такие, что } g(s_1'') = g(s_2'') = \ldots = g(s_d'') = t_{l-1},$$

и верны следующие включения $F^l(\{s_i''\} \times N) \subset F^{l-1}(N_{t_{l-1}})$, $i = 1$, $\ldots$, d. Согласно (1.4), существует единственное s_j'' такое, что $p \in F^l(\{s_j''\} \times N)$. Положим $t_l = s_j''$, $N_{t_l} = \{t_l\} \times N$. Тогда $p \in F^l(N_{t_l}) \subset F^{l-1}(N_{t_{l-1}}) \subset \cdots \subset N_{t_0}$. Из построения вытекает, что $t_i = g(t_{i+1})$ для всех $i \geq 0$. Из (1.3) следует, что $diam\ F^i(N_{t_i}) = diam\ (F^i(\{t_i\} \times N)) \to 0$ при $i \to \infty$. Поэтому пересечение $\cap_{i \geq 0} F^i(N_{t_i})$ есть одноточечное множество, совпадающее с p.

Покажем, что для любой точки $p \in \mathfrak{M}$ последовательность точек $\{t_i\}_0^\infty$, $t_i \in T^k$ определяется единственным образом. Допустим, для точки p существуют две различные последовательности точек $\{t_i\}_0^\infty$, $t_i \in T^k$ и $\{t_i'\}_0^\infty$, $t_i' \in T^k$, т.е. найдется i, для которого $t_i \neq t_i'$. Это означает существование двух множеств $F^i(\{t_i\} \times N) = F^i(N_{t_i})$ и $F^i(\{t_i'\} \times N) = F^i(N_{t_i'})$, таких что $p \in F^i(N_{t_i})$ и $p \in F^i(N_{t_i'})$, но это противоречит условию (1.4), так как образы слоев N_{t_i} и $N_{t_i'}$ попарно не пересекаются $F(N_{t_i}) \cap F(N_{t_i'}) = \emptyset$, а поскольку F –диффеоморфизм, то $F^i(N_{t_i}) \cap F^i(N_{t_i'}) = \emptyset$.

Доказательство закончено.

Рассмотрим отображение $\hat{g} : \prod_g \to \prod_g$, являющееся обратным пределом d-листного накрытия k-мерного тора $T^k \to T^k$, где $\prod_g$ - множество последовательностей $\{t_i\}_0^\infty$ вида $t_i = g(t_{i+1})$ для всех $i \geq 0$, и $\hat{g}(\{t_0, \ldots, t_i, \ldots\}) = \{g(t_0), t_0, \ldots, t_i \ldots\}$.

Лемма 1.3. *$\hat{g}$ – взаимно однозначное отображение.*

Доказательство. Установим инъективность отображения $\hat{g}$. Для этого возьмем две различные последовательности $\{t_i\}_0^\infty, \{t_i'\}_0^\infty \in \prod_g$, т.е. существуют такие i, j, что $t_i \neq t_j'$. Отсюда и способа задания отображения $\hat{g}$ следует, что образы этих последовательностей $\hat{g}(\{t_i\}_0^\infty) \neq \hat{g}\left(\{t_i'\}_0^\infty\right)$.

Пусть $\{t_i\}_0^\infty = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\} \in \prod_g$, где $t_i = g(t_{i+1})$ при всех $i \geq 0$. Существует последовательность $\{t_1, \ldots, t_i, \ldots\} \in \prod_g$ которая при действии отображения $\hat{g}$, с учетом равенства $t_0 = g(t_1)$, переходит в исходную $\hat{g}(\{t_1, \ldots, t_i, \ldots\}) = \{g(t_1), t_1, \ldots, t_i, \ldots\} = \{t_0, t_1 \ldots, t_i, \ldots\}$, что и доказывает сюръективность этого отображения.
Доказательство закончено.

Лемма 1.4. *Отображение $\hat{g}$ непрерывно.*

Доказательство. Пусть $\{r_0, \ldots, r_i, \ldots\} \in \prod_g$, и пусть U_ε – окрестность точки

$$\hat{g}(\{r_0, \ldots, r_i, \ldots\}) = \{g(r_0), r_0, \ldots, r_i \ldots\}.$$

Согласно определению тихоновской топологии, не уменьшая общности, можно считать, что существуют некоторые $k \in \mathbb{Z}^+$ и сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ такие, что для любой точки $\hat{g}(r') = \{g(r_0'), r_0', \ldots, r_i' \ldots\} \in U_\varepsilon$ выполняются неравенства:

$$|g(r_0) - g(r_0')| < \varepsilon, \quad |r_i - r_i'| < \varepsilon \quad \text{для любого} \quad i = 0, \ldots, k-2.$$

Так как g непрерывно, то существует $\delta > 0$ такое, что $|r_0 - r_0'| < \delta$ влечет $|g(r_0) - g(r_0')| < \varepsilon$. Ясно что, можно считать $\delta \leq \varepsilon$. Зададим окрестность U_δ точки $\{r_0, \ldots, r_i, \ldots\}$, положив $r' = \{r_0', \ldots, r_i' \ldots\} \in U_\delta$, если $|r_i - r_i'| < \delta$ для любого $i = 0, \ldots, k-1$. Тогда $\hat{g}(U_\delta) \subset U_\varepsilon$.
Доказательство закончено.

Определим отображение $\theta : \mathfrak{M} \to \prod_g$ следующим образом. Согласно лемме 1.2., любой точке $p \in \mathfrak{M}$ соответствует единственная последовательность точек $\{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\}$ такая, что $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$. Положим $\theta(p) = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\}$.

Лемма 1.5. *Отображение θ – гомеоморфизм.*

Доказательство. Установим сперва инъективность отображения θ. Возьмем различные $p_1, p_2 \in \mathfrak{M}$. Согласно лемме 1.2., каждой точке p_i, $i = 1, 2$, соответствует последовательность образов $F^j(N_{t_j}^i)$ слоев $N_{t_j}^i = \{t_j^i\} \times N$ таких, что $p_i = \cap_{j \geq 0} F^j(N_{t_j}^i)$, где $i = 1, 2$. Поскольку $p_1 \neq p_2$ и диаметры слоев стремятся к нулю, то существует k такое, что

$$N_{t_0}^1 = N_{t_0}^2, F(N_{t_1}^1) = F(N_{t_1}^2), \ldots, F^{k-1}(N_{t_{k-1}}^1) = F^{k-1}(N_{t_{k-1}}^2), F^k(N_{t_k}^1) \neq F^k(N_{t_k}^2),$$

где $N_{t_k}^1 = \{t_k^1\} \times N$ и $N_{t_k}^2 = \{t_k^2\} \times N$, поэтому $t_k^1 \neq t_k^2$ и, следовательно, $\theta(p_1) \neq \theta(p_2)$.

Докажем сюръективность отображения θ. Возьмем $\{t_0, t_1, \ldots\} \in \prod_g$. Из $t_i = g(t_{i+1})$ и условия (1.3) вытекает что

$$\{t_0\} \times N \supset F(\{t_1\} \times N) \supset \ldots \supset F^i(\{t_i\} \times N) \supset \ldots .$$

Так как $diam\ (F^i(\{t_i\} \times N)) \to 0$ при $i \to \infty$, то пересечение $\bigcap_{i \geq 0} F^i(\{t_i\} \times N)$ состоит ровно из одной точки, скажем p. Из определения множества $\mathfrak{M}$ следует, что $p \in \mathfrak{M}$. Таким образом, $\theta(p) = (t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots)$.

Докажем непрерывность отображения θ. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, $r \in \mathbb{N}$ и рассмотрим окрестность точки $\theta(p)$. Согласно топологии на множестве $\prod_g$ окрестность определяется по правилу $U^{'}(\theta(p)) = \{\{x_i\}_0^{\infty} \in \prod_g : |x_i - t_i| < \varepsilon$, для $i = 0, \ \ldots, \ r\}$.

Так как $\theta(p) = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\} \in \prod_g$, где $t_0 = g(t_1)$, $t_1 = g(t_2)$, $t_2 = g(t_3)$, $\ldots$ $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$, то $t_0 = g(t_1) = g^2(t_2) = \ldots = g^i(t_i)$, $t_1 = g(t_2) = g^2(t_3) = \ldots = g^{i-1}(t_i)$, $t_2 = g(t_3) = g^2(t_4) = \ldots = g^{i-2}(t_i), \ldots, t_j = g^{i-j}(t_i)$ для всех $1 \leq j \leq i$ и некоторого i. Поэтому $\theta(p) = \{t_0, t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots\} = \{g^i(t_i), g^{i-1}(t_i), \ldots, g(t_i), t_i, \ldots\}$.

Поскольку для точки $\theta(p)$ в ее окрестности $U^{'}$, заданной числами $r \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$, выполняется равенство $t_{r-j} = g^j(t_r)$ для всех $1 \leq j \leq r$, а отображение g непрерывное, то существует такое $0 < \delta \leq \varepsilon$, что $|x_r - t_r| < \delta$ влечет $|x_i - t_i| < \varepsilon$ для всех $i = 0, \ \ldots,$ r.

Обозначим $N_{t,\delta} \overset{\text{def}}{=} [t - \delta, t + \delta] \times N_t$, где N_t - t-слой, $t \in T^k$. Пусть $U(p)$ окрестность точки $p \in \mathfrak{M}$. Тогда для любой точки $q \in U(p) \cap \mathfrak{M}$, в силу леммы 1.1., $\theta(q) = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots\} \in \prod_g$ и

$$q = \bigcap_{i \geq 0} F^i(N_{x_i}) = N_{x_0} \cap F(N_{x_1}) \cap F^2(N_{x_2}) \cap \ldots = \{x_0\} \times N \cap F(\{x_1\} \times N) \cap F^2(\{x_2\} \times N) \cap \ldots .$$

Докажем сначала непрерывность для первых двух координат, т.е. рассмотрим $q \in N_{x_0} \cap F(N_{x_1})$. Поскольку диффеоморфизм F имеет вид $F(t, z) = (g(t), w(t, z))$, где $g : T^k \to T^k$ – d-накрытие степени $d \geq 2$, существуют попарно различные $s_1, s_2, \ldots, s_d \in T^k$ и $\delta_1 > 0$, $\delta_1 \leq \varepsilon$ такие, что $F\left(N_{s_1,\delta_1}\right) \cap F\left(N_{s_2,\delta_1}\right) \cap \ldots \cap F\left(N_{s_d,\delta_1}\right) = \emptyset$ и $F\left(N_{s_i,\delta_1}\right) \subset N_{t_0,\varepsilon}$ при $i = \overline{1, d}$. Так как $\theta(p) = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\}$, тогда согласно (1.4) существует некоторое s_i такое, что $F\left(N_{s_i,\delta_1}\right) = F\left(N_{t_1,\delta_1}\right)$. Из того, что $q \in U(p) \cap \mathfrak{M}$ следует $q \in N_{x_0} \cap F(N_{x_1}) \cap F\left(N_{t_1,\delta_1}\right)$. Это означает $F(N_{x_1}) \cap F\left(N_{t_1,\delta_1}\right) \neq \emptyset$ и $N_{x_1} \cap N_{t_1,\delta_1} \neq \emptyset$, тогда $|x_1 - t_1| < \delta_1$. Из равномерной непрерывности d-накрытия g вытекает неравенство $|g(x_1) - g(t_1)| < \varepsilon$, т.е. $|x_0 - t_0| < \varepsilon$. Таким образом, из включения $q \in U(p) \cap \mathfrak{M}$ для двух первых координат x_0 и x_1 последовательности $\theta(q) = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$ доказали, что $\theta(q) \in U^{'}(\theta(p))$.

Пусть теперь $q \in N_{x_0} \cap F(N_{x_1}) \cap F^2(N_{x_2})$. Проводя аналогичные рассуждения, как в предыдущем пункте, существуют попарно различные $s_1^{'}, s_2^{'}, \ldots, s_d^{'} \in T^k$ и $\delta_2 > 0$, $\delta_2 \leq \delta_1 \leq \varepsilon$ такие, что $F^2\left(N_{s_1^{'},\delta_2}\right) \cap F^2\left(N_{s_2^{'},\delta_2}\right) \cap \ldots \cap F^2\left(N_{s_d^{'},\delta_2}\right) = \emptyset$ и $F^2\left(N_{s_i^{'},\delta_2}\right) \subset F\left(N_{t_1,\delta_1}\right) \subset N_{t_0,\varepsilon}$ при $i = \overline{1, d}$. Из (1.4) следует существование $s_i^{'}$ для которого $F^2\left(N_{s_i^{'},\delta_2}\right) = F^2\left(N_{t_2,\delta_2}\right)$. Поскольку $q \in U(p) \cap \mathfrak{M}$, то $q \in N_{x_0} \cap F(N_{x_1}) \cap F^2(N_{x_2}) \cap F^2\left(N_{t_2,\delta_2}\right)$. Таким образом, $F^2(N_{x_2}) \cap F^2\left(N_{t_2,\delta_2}\right) \neq \emptyset$ и $N_{x_2} \cap N_{t_2,\delta_2} \neq \emptyset$, это означает, что $|x_2 - t_2| < \delta_2$. В силу равномерной непрерывности g получаем неравенства $|g(x_1) - g(t_1)| < \varepsilon$ и $|g^2(x_1) - g^2(t_1)| < \varepsilon$, т.е. $|x_1 - t_1)| < \varepsilon$ и $|x_0 - t_0| < \varepsilon$. Следовательно, установлена непрерывность отображения θ для первых трех координат x_0, x_1 и x_2 последовательности $\theta(q) = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\}$.

Аналогично, существует $\delta_r > 0$, $\delta_r \leq \ldots \leq \delta_2 \leq \delta_1 \leq \varepsilon$ такое, что $q \in N_{x_0} \cap F(N_{x_1}) \cap F^2(N_{x_2}) \cap \ldots \cap F^r(N_{x_r}) \cap F^r\left(N_{t_r,\delta_r}\right)$. Поэтому $F^r(N_{x_r}) \cap F^r\left(N_{t_r,\delta_r}\right) \neq \emptyset$, $N_{x_r} \cap N_{t_r,\delta_r} \neq \emptyset$ и $|x_r - t_r| < \delta_r$. Из равномерной непрерывности g получаем неравенства $|g(x_r) - g(t_r)| < \varepsilon$, $|g^2(x_r) - g^2(t_r)| < \varepsilon$, $\ldots$, $|g^r(x_r) - g^r(t_r)| < \varepsilon$, т.е. $|x_{r-1} - t_{r-1}| < \varepsilon$, $|x_{r-2} - t_{r-2}| < \varepsilon$, $\ldots$,

$|x_0 - t_0| < \varepsilon$. Итак, из определения отображений F и θ вытекает, что $\theta(q) \in U'(\theta(p))$ для любой точки $q \in U(p)$. Следовательно, θ – непрерывное отображение.

Аналогично можно доказать непрерывность отображения θ^{-1}. Таким образом, θ – гомеоморфизм.

Доказательство закончено.

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Ограничение $f|_{\mathfrak{M}}$ сопряжено обратному пределу отображения g.*

Доказательство. Установим равенство $\theta \circ F|_{\mathfrak{M}} = \widehat{g} \circ \theta|_{\mathfrak{M}}$, которое можно представить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M} & \xrightarrow{F} & \mathfrak{M} \\ \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\ \prod_g & \xrightarrow{\widehat{g}} & \prod_g \end{array}$$

Согласно лемме 1.2., любой точке $p \in \mathfrak{M}$ соответствует единственная последовательность $\theta(p) = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\}$, где $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$. Образ точки $\theta(p)$ относительно отображения $\hat{g} : \prod_g \to \prod_g$ есть, по определению

$$\hat{g}\left(\{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\}\right) = \{g(t_0), t_0, t_1, \ldots, t_i \ldots\}.$$

С другой стороны, для точки $p \in \mathfrak{M}$ из условия (1.2) вытекает, что $F(p) \in F(\{t_0\} \times N) \subset N_{g(t_0)}$. Из леммы 1.2. следует, что каждой точке $p \in \mathfrak{M}$ соответствует единственная последовательность образов слоев $F^i(N_{t_i})$ и $p = \cap_{i \geq 0} F^i(N_{t_i})$. Рассмотрим $F(p) = F\left(\cap_{i \geq 0} F^i(\{t_i\} \times N)\right) = \cap_{i \geq 0} F^{i+1}(\{t_i\} \times N) = \cap_{i \geq 0} F^{i+1}(\{t_i\} \times N) \cap N_{g(t_0)} = N_{g(t_0)} \cap F(\{t_0\} \times N) \cap F^2(\{t_1\} \times N) \cap \ldots \cap F^{i+1}(\{t_i\} \times N) \cap \ldots = N_{g(t_0)} \cap F(N_{t_0}) \cap F^2(N_{t_1}) \cap \ldots \cap F^{i+1}(N_{t_i}) \cap \ldots$. Тогда в силу леммы 1.2., образом точки $F(p)$ относительно отображения θ является последовательность $\{g(t_0), t_0, t_1, \ldots, t_i \ldots\}$. Следовательно, $\hat{g}\,[\theta(p)] = \theta\,[F(p)]$.

Доказательство закончено.

Так как сопрягающий гомеоморфизм переводит неблуждающее множество в неблуждающее множество, то из леммы 1.5. и теоремы 1.1. вытекает следующее следствие. Напомним, что неблуждающее множество $NW(f)$ определяется как множество неблуждающих точек и является f-инвариантным и замкнутым. Точка $x \in M$ является *неблуждающей*, если для любой ее окрестности U пересечение $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ для бесконечного множества целых n.

Следствие 1.1. *Имеет место равенство $\theta\,[NW(F)] = NW(\hat{g})$.*

Список литературы

1. Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., “О нульмерных соленоидальных базисных множествах”, *Матем. сб.*, **203** (2012).

2. Куратовский Л., “Топология”, *М.:Мир*, **1** (1966).

3. Robinson C., “Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos”, *Studies in Adv. Math., Sec. edition, CRC Press*, 1999.

4. Williams R., “Expanding attractors”, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **43** (1974), 169-203.

On interior dynamics of Smale-Vietoris diffeomorphisms

© **E.V. Zhuzhoma[3], N.V. Isaenkova[4]**

Abstract. The paper concerns to the study of interior dynamics of new class of Smale-Vietoris diffeomorphisms of closed n-manifolds M^n. One proved that the restriction of Smale-Vietoris diffeomorphism on the set $T^k \times N \subset M^n$ is conjugate to the inverse limit of d-cover of k-dimensional torus T^k, where $k \geq 1$, and N is a $(n-k)$-manifold with a non-empty boundary.

Key Words: topological equivalence, nonwandering set, inverse limit

[3] Professor of Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

[4] Aspirant faculty of mathematical analysis, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; nisaenkova@mail.ru.