УДК 519.8

Адаптация метода ветвей и границ для решения многокритериальных задач структурной оптимизации

© Е. А. Лазарев[1]

Аннотация. В работе предлагаются адаптированный метод ветвей и границ для решения задач структурной оптимизации на примере задачи оптимизации сети передачи данных; приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: проектирование сетей, метод ветвей и границ, многокритериальная оптимизация.

1. Введение

Метод ветвей и границ – общий алгоритмический метод решения оптимизационных задач, который был предложен Лендом и Дойгом для решения задач целочисленного программирования [1]. По существу, метод является модификацией полного перебора с отсечением заведомо неоптимальных подмножеств решений. На практике, при решении многих оптимизационных задач применение данного метода позволяет существенно сузить рассматриваемую область, тем самым значительно сократить перебор (время работы может быть уменьшено на несколько порядков). Поэтому метод ветвей и границ получил широкое распространение и является одним из самых популярных подходов к решению задач оптимизации.

Однако, в большинстве работ, в которых применяется метод ветвей и границ, рассматриваются однокритериальные задачи. В данной статье предлагается адаптация метода ветвей и границ для решения бикритериальной задачи оптимизации сети передачи данных с использованием концепции оптимальности по Парето. Предложенный подход может быть обобщен на решение задач структурной оптимизации с любым числом критериев.

2. Математическая модель

Рассмотрим математическую модель сети передачи данных, основанную на классических потоковых моделях, описанную в работе [2].

Известен ориентированный ациклический граф $G = (V, E)$, задающий существующую сеть передачи данных (V и E – множества вершин и ребер, соответственно). Вершинам соответствуют узловые элементы сети (коммутаторы). Ребро (u, v) обозначает канал связи, соединяющий коммутаторы, соответствующие вершинам u и v, который имеет положительную пропускную способность $c(u, v)$, показывающую, какое максимальное количество информации может быть передано по каналу в единицу времени. Ограничение пропускной способности канала диктуется его техническими характеристиками. Например, согласно плезиохронной цифровой иерархии (PDH, Plesiochronous Digital Hierarchy), поддерживается следующие уровни иерархии цифровых каналов: E0 (64 кбит/с), E1 (2,048 Мбит/с), E2 (8,448 Мбит/с), E3 (34,368 Мбит/с), E4 (139,264 Мбит/с) [3].

[1] Аспирант кафедры вычислительные системы и технологии, Нижегородский государственный технический университет имени Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород; elazarev.nnov@gmail.com.

В графе выделяются две особые вершины — источник информации s и сток t. Из истока ведут магистральные каналы, соединяющие городскую сеть с магистральной. В сток ведут ребра от коммутаторов, к которым напрямую подключены конечные пользователи.

Для описания каналов передачи данных, которые могут быть достроены, задается множество ребер $E'(E \cap E' = \emptyset)$. Для каждого ребра $(u, v) \in E'$ известна пропускная способность $c'(u, v)$ и стоимость строительства $p'(u, v)$.

Количество информации, передаваемой по каналам связи в единицу времени, описывается функцией потока $f : V \times V \to \mathbb{R}$ ($f(u, v)$ задает поток между вершинами u и v), удовлетворяющая трем условиям:

1. ограниченность пропускной способности: $f(u, v) \le c(u, v)$ для всех $u, v \in V$;
2. антисимметричность: $f(u, v) = -f(v, u)$ для всех $u, v \in V$;
3. сохранение потока: для всех $u \in V \setminus \{s, t\} : \sum_{v \in V} f(u, v) = 0$.

3. Постановка задачи

Требуется модифицировать существующую сеть передачи данных, используя каналы, описываемые множеством ребер E', для увеличения пропускной способности сети.

Возможным решением $x \in D$ (D – множество допустимых решений) задачи является множество ребер $E^* \subseteq E'$. При этом рассматриваются стоимость строительства сети передачи данных:

$$Q_1(x) = \sum_{(u,v) \in E'} p'(u, v) \tag{3.1}$$

и величина максимальной пропускной способности:

$$Q_2(x) = \sum_{v \in V} f(s, v) \tag{3.2}$$

задаваемые графом $G^* = (V, E \cup E^*)$. Далее будем обозначать величину максимального потока в произвольном графе G функцией $F(G)$.

Задача формулируется следующим образом: по заданным ациклическим ориентированным графам $G = (V, E)$ и множеству ребер $E'(E \cap E' = \emptyset)$, матрицам пропускных способностей $c(u, v)$ и $c'(u, v)$ и матрице стоимости ребер $p'(u, v)$ найти все множество парето-оптимальных решений задачи

$$\min_{x \in D}(Q_1(x)), \max_{x \in D}(Q_2(x)), \tag{3.3}$$

упорядоченных по возрастанию (убыванию) значения первого (второго) критерия.

К преимуществам данной модели стоит отнести то, что прибыль в ней не рассматривается как величина прямо пропорциональная количеству информации, переданной конечному потребителю. В современных сетях передачи данных такой метод оценки становится все менее эффективным, ввиду повсеместного распространения широкополосного интернета с оплатой по фиксированному тарифу (ежемесячная абонентская плата).

Также стоить отметить, что методы свертывания критериев или лексикографического упорядочивания порой не способны дать полное представление о спектре решений, даже с учетом задания различных весовых коэффициентов. Именно поэтому ставится задача поиска множества оптимальных по Парето решений. Такой подход позволит проектировщику сети передачи данных выбрать оптимальный вариант из всего спектра решений.

В работе [2] доказывается, что данная задача относится к классу NP трудных задач, а так же приводится оценка на мощность множества оптимальных по Парето решений (может составлять $2^{|E'|}$). Принимая во внимание гипотезу $P \neq NP$, можно сделать вывод о том, что не существует алгоритмов с полиномиальной сложностью, решающих поставленную задачу. В данной работе предлагается адаптация метода ветвей и границ как способ сокращения перебора.

4. Адаптированный метод ветвей и границ

4.1. Описание метода

Приведем описание алгоритма решения поставленной задачи.

1. Пронумеруем все ребра из множества E', произвольным образом различными числами от 1 до $|E'|$. Обозначим через e_i ребро с номером i из множества E'.

2. Каждая вершина дерева ветвления соответствует некоторому подмножеству D_p области допустимых решений и содержит нижнюю (L_p) и верхнюю (H_p) оценки значения пары $(Q_1(x), Q_2(x))$ на этом подмножестве. При этом корневая вершина (нулевой уровень дерева) соответствует всей области допустимых решений D, а любой вершине уровня $k > 0$ соответствует подмножество решений, получающееся при фиксировании первых k ребер (из множества E') сети. Под термином «фиксирование» понимается тот факт, что для выбранных ребер уже принято решение будут они достроены или нет. Обозначим через S множество, содержащее фиксированные ребра, которые будут достроены.

3. Из каждой вершины (за исключением концевых вершин, в которых зафиксированы все E' ребер) производится ветвление на два подмножества, т.е. осуществляется дихотомическое ветвление. При этом первое из подмножеств получается путем фиксирования очередного ребра, но без добавления его в S, таким образом, данное ребро не будет построено в сети. Второе из подмножеств получается путем фиксирования очередного ребра с добавлением его в S, таким образом, данное ребро будет построено в сети.

4. Нижняя оценка L_p решения x после фиксирования первых k ребер:

$$Q_1(x) = \sum_{e \in S} p'(e) + \sum_{i=k+1}^{|E'|} p'(e_i) \tag{4.1}$$

   т.е. сумме стоимостей строительства фиксированных ребер, которые будут достроены и ребер, которые еще не рассматривались, т.е. ребер с номерами большими k.

$$Q_2(x) = F(G(V, E \cup S)) \tag{4.2}$$

   т.е. величина потока для графа, полученного путем добавления в исходный множества достроенных фиксированных ребер.

5. Верхняя оценка решения после фиксирования первых ребер:
$$Q_1(x) = \sum_{e \in S} p'(e) \tag{4.3}$$
т.е. сумме стоимостей строительства фиксированных ребер, которые будут достроены.
$$Q_2(x) = F(G(V, E \cup S \cup \{e_i | i > k\})) \tag{4.4}$$
т.е. величине потока для графа, полученного путем добавления в исходный множества достроенных фиксированных ребер и всех ребер, которые еще не рассматривались, т.е. ребра с номерами большими k.

6. Функцией ветвления является рекурсивная функция, на вход которой подается номер ребра k для рассмотрения (подразумевается, что при вызове функции с параметром k ребра с номерами от 1 до $k-1$ являются фиксированными). Запуск алгоритма производится вызовом функции ветвления с аргументом 1.

7. Для каждой вершины дерева ветвления рассчитывается верхняя H_p и нижняя L_p оценки решения p. Они сравниваются с решениями из множества рекордов R. Пусть H_r и L_r верхняя и нижняя оценки решения $r \in R$. Тогда:

   (a) если $L_p \succ H_r$, то $R = R \setminus \{r\}$ и продолжается ветвление из данной вершины (вызывается функция ветвления с аргументов $k+1$);

   (b) если $L_r \succ H_p$, то ветвление из данной вершины прекращается;

   (c) если $\nexists r \in R : L_r \succ H_p$, то если текущая вершина дерева ветвления является концевой, то решение p добавляется во множество рекордов R ($R = R \cup \{p\}$). В противном случае продолжается ветвление из данной вершины (вызывается функция ветвления с аргументов $k+1$).

   Здесь символ $\succ$ обозначает парето-доминируемость одного решения над другим.

8. Останов алгоритма выполняется при невозможности осуществления дальнейшего ветвления.

В результате работы алгоритма множество R содержит все решения задачи оптимальные по Парето.

4.2. Анализ алгоритма

В худшем случае время работы метода будет сравнимо с алгоритмом полного перебора. В работе [2] приведен пример сети, в которой множество оптимальных по Парето решений имеет мощность $2^{|E'|}$. На такой сети метод ветвей и границ в ходе работы не сможет отсечь ни одного подмножества решений и в итоге построит дерево ветвлений состоящее из $|E'|$ уровней (корень дерева имеет уровень 0). Уровень глубины i будет иметь 2^i вершин. В этом случае, время работы алгоритма такое же, как и у метода полного перебора и составляет $O(2^{|E'|} \cdot |V|^3)$ (вычисление максимального потока в сети с помощью алгоритма «поднять в начало» требует $O(V^3)$ времени [4]).

Однако среднее время работы метода ветвей и границ гораздо меньше, чем время работы полного перебора. Приведем результаты тестирования программной реализации метода ветвей и границ и полного перебора, выполненной на языке C++. Вычислительные эксперименты заключались в нахождении всего множества оптимальных по Парето решений для 100 различных случайным образом сгенерированных сетей передач данных с числом ребер во множестве E' равным 15, 20, 25, 30, 35 и 40. Для случаев $|E'| = 35$ и $|E'| = 40$ приведено приближенное время работы алгоритма полного перебора, вычисленное аналитически, исходя из анализа сложности работы данного алгоритма, поскольку реальный запуск на таких больших входных данных не представляется возможным. Результаты экспериментов представлены на рис. 4.1.

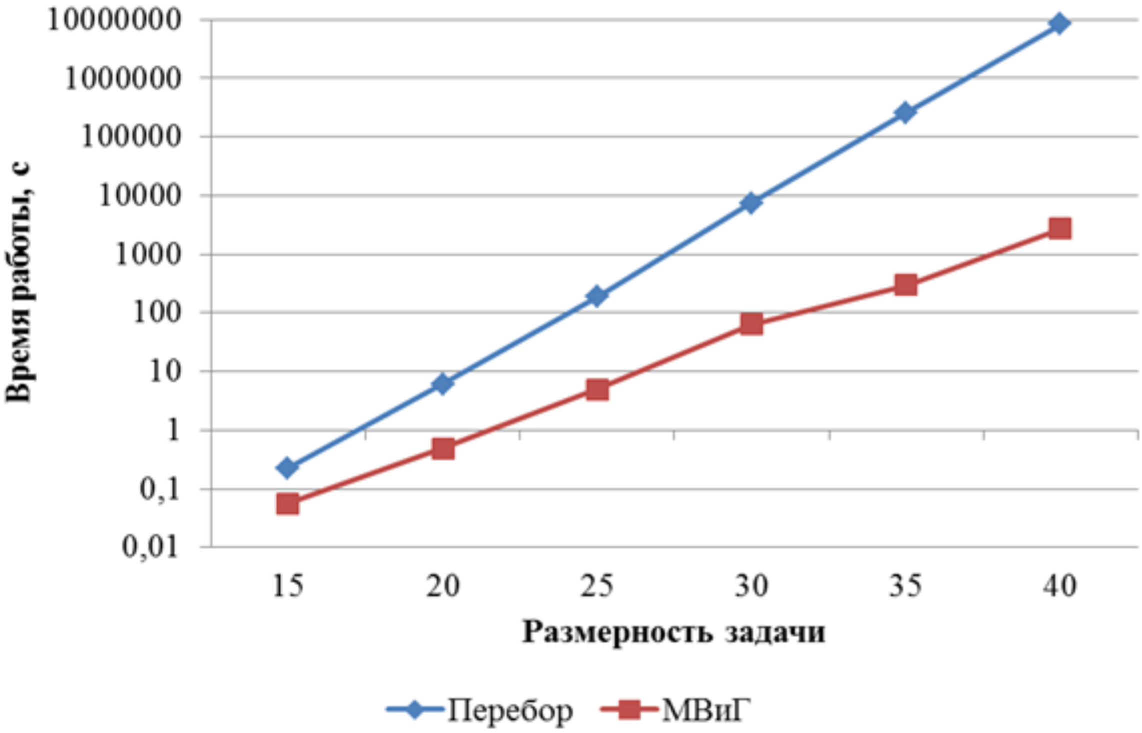

Рисунок **4.1**

Среднее время работы алгоритмов полного перебора и метода ветвей и границ

4.3. Пример

Рассмотрим конкретный пример, иллюстрирующий работу адаптированного метода ветвей и границ.

Пример 4.1. *Требуется найти все множество парето-оптимальных решений для бикритериальной задачи, если граф G и множество достраиваемых ребер E' заданы на рис. 4.2. Ребра G изображены сплошной линией, с указанием пропускной способности канала. Ребра из множества E' изображены пунктирной линией с указанием пропускной способности и стоимости постройки канала через косую черту соответственно.*

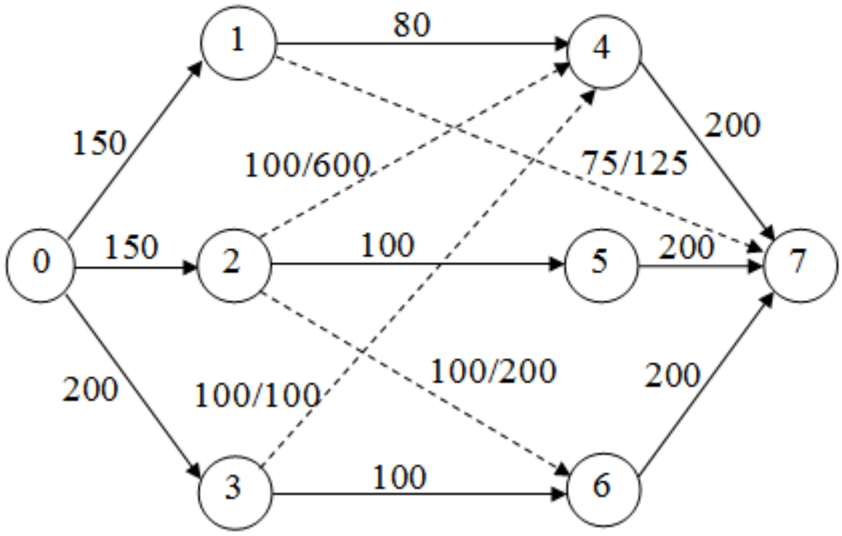

Рисунок **4.2**

Входные данные для примера 4.1.

Пронумеруем ребра из множества E' от 1 до 4 в следующем порядке: $(1,7),(2,4),(2,6),(3,4)$. Где (u,v) обозначает ребро из вершины u в вершину v. Будем строить дерево ветвлений (рис. 4.3) и заносить найденные верхние и нижние оценки подмножества решений в таблицу. Второй и третий столбцы таблицы содержат нижнюю и верхнюю оценки подмножества решений D_i, получаемого фиксированием всех ребер из E' при проходе от корня дерева ветвления до вершины с номером i. Четвертый столбец содержит множество рекордов, найденное на момент входа в вершину дерева ветвлений с соответствующим номером.

№ вершины	Нижняя оценка для подмножества решений D_i	Верхняя оценка для подмножества решений H_i	Множество рекордов
1	$(900,280)$	$(0,430)$	$\emptyset$
2	$(300,280)$	$(0,430)$	$\emptyset$
3	$(100,280)$	$(0,380)$	$\emptyset$
4	$(0,280)$	$(0,280)$	$\emptyset$
5	$(100,380)$	$(100,380)$	$(0,280)$
6	$(300,330)$	$(200,430)$	$(0,280),(100,380)$
7	$(200,330)$	$(200,330)$	$(0,280),(100,380)$
8	$(300,430)$	$(300,430)$	$(0,280),(100,380),(300,430)$
9	$(900,330)$	$(600,430)$	$(0,280),(100,380),(300,430)$
10	$(1025,350)$	$(125,500)$	$(0,280),(100,380),(300,430)$
11	$(425,350)$	$(125,500)$	$(0,280),(100,380),(300,430)$
12	$(225,350)$	$(125,450)$	$(0,280),(100,380),(300,430)$
13	$(125,350)$	$(125,350)$	$(0,280),(100,380),(300,430)$
14	$(225,450)$	$(225,450)$	$(0,280),(100,380),(300,430)$
15	$(425,400)$	$(325,500)$	$(0,280),(100,380),(225,450)$
16	$(325,400)$	$(325,400)$	$(0,280),(100,380),(225,450)$
17	$(425,500)$	$(425,500)$	$(0,280),(100,380),(225,450)$
18	$(1025,400)$	$(725,500)$	$(0,280),(100,380),(225,450),(425,500)$

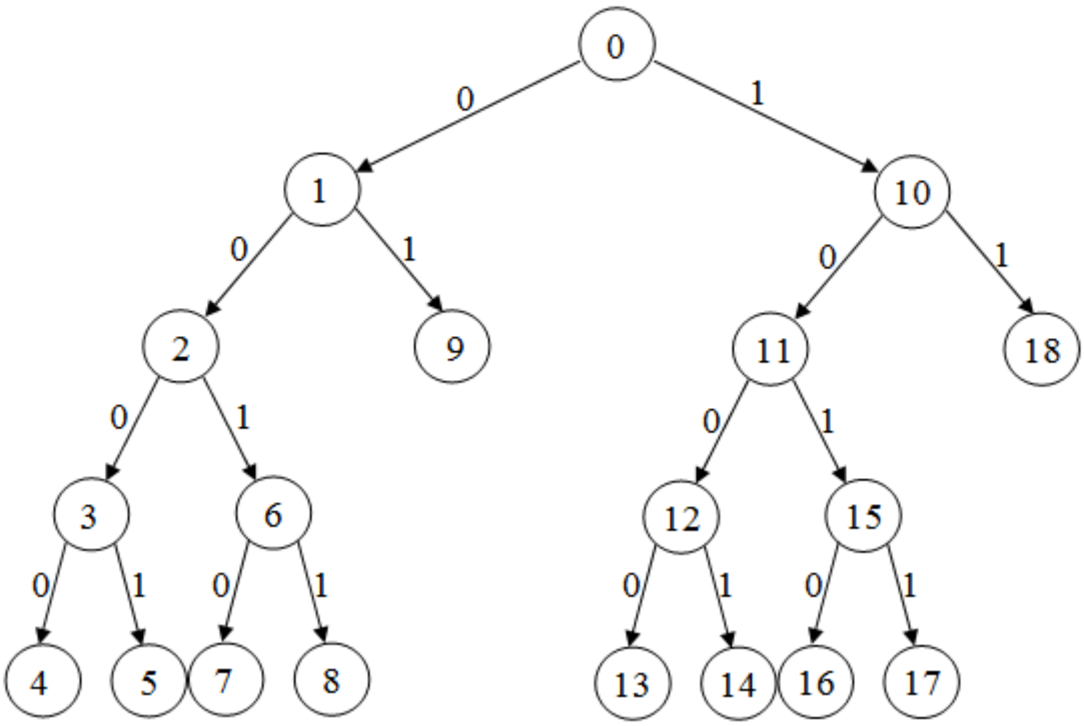

Рисунок **4.3**

Дерево ветвлений метода ветвей и границ для примера 4.1.

Изначально дерево ветвлений состоит из единственной вершины (корня) с номером 0. В процессе работы алгоритма в дерево добавляются ребра и новые вершины (вершины нумеруются в порядке добавления). На ребрах указаны числа 1 или 0, показывающие будет ли достроено рассматриваемое зафиксированное ребро из множества E' или нет. Таким образом, при прохождении по ребрам графа, начиная от корня до вершины i, строится подмножество решений D_i.

Рассмотрим подробно основные шаги работы алгоритма.

Поиск множества парето-оптимальных решений начинается в корне дерева ветвлений (вершина 0). Сначала делается предположение о том, что первое ребро из множества E' не будет достроено. Таким образом, фиксируется ребро с номером 1 из E' и выполняется переход в дереве ветвлений из вершины 0 по ребру с 0 в вершину 1. Вычисляется нижняя и верхняя оценка для подмножества решений D_1 следующим образом. Стоимость строительства получается из расчета, что все незафиксированные ребра (с номерами 2, 3 и 4) будут достроены, а пропускная способность из расчета, что они при этом не внесут вклад в увеличение пропускной способности сети в целом (т.е. можно считать, что их пропускная способность равна нулю). Стоимость строительства будет равна $p'(2,4)+p'(2,6)+p'(3,4)=900$, пропускная способность будет равна 280. Для вычисления стоимости строительства для верхней оценки считаем, что ни одно из нефиксированных ребер (с номерами 2, 3 и 4) не построено, а при вычислении пропускной способности считаем, что построено. Таким образом, стоимость строительства равна 0 (так как ни одно из фиксированных ребер не построено), а пропускная способность полученной сети равна 430. Далее проверятся доминируется ли полученная верхняя оценка нижней оценкой элемента из множества рекордов R. Так как R не содержит элементов, то условие не выполняется и так как еще не все ребра E' зафиксированы, то выполняется ветвление из вершины 1 дерева ветвлений.

По аналогии выполняется ветвление из вершины 1 и происходит переход в вершину 2, для которой нижняя и верхняя оценки равны $(300, 280)$ и $(0, 430)$ соответственно. Так как снова не все ребра E' зафиксированы, то выполняется ветвление уже из вершины 2 и происходит переход в вершину 3.

Для вершины 3 нижняя оценка равна $(100, 280)$, а верхняя $(0, 380)$. Так как снова не все ребра E' зафиксированы, то выполняется ветвление уже из вершины 3 и происходит переход в вершину 4.

После перехода в вершину 4 все ребра E' зафиксированы, поэтому верхняя и нижняя оценки совпадают и равны $(0, 280)$. Нижняя оценка полученного решения не доминируется ни одной из верхних оценок из R (в данный момент пустого), поэтому полученное решение добавляется во множество рекордов. Так как ветвление из вершины 4 невозможно, то выполняется переход в вершину 3 и рассматривается случай, когда ребро с номером 3 будет достроено (происходит переход в дереве ветвления в вершину 5).

Решение, соответствующее вершине 5 представляет собой исходный граф, в который было достроено ребро 4. Пропускная способность полученной сети равна 380, стоимость строительства есть стоимость ребра 4, равная 100. Полученное решение не доминирует ни одно решение из множества R, поэтому ни один элемент из R не удаляется. Так же полученное решение не доминируется ни одним решением из R, поэтому оно добавляется в R. Таким образом, множество рекордов состоит из двух элементов $\{(0, 280), (100, 380)\}$. Так как дальнейшее ветвление из вершины 5 невозможно, то происходит переход в вершину 3, для которой ветвление уже было выполнено, поэтому происходит переход в вершину 2.

Для вершины 2 был рассмотрен случай, когда ребро из E' с номером 3 не было построено. Теперь рассматривается случай, когда это ребро будет достроено (при этом ребра с номерами 1 и 2 уже зафиксированы и не будут достроены). Т.е. происходит переход в вершину дерева ветвлений с номером 6. Для данного подмножества решений нижняя оценка равна $(300, 330)$, а верхняя $(200, 430)$. Полученная верхняя оценка не доминируется ни одним из решений из R, и так как не все ребра из E' зафиксированы, то выполняем ветвление из вершины 6.

Сначала происходит переход в вершину 7, которое соответствует решению, в котором построено одно ребро с номером 3. Для него стоимость строительства равна 200, а пропускная способность равна 320. Данное решение доминируется решением $(100, 380)$ из множества рекордов, поэтому выполняется переход в вершину 6, а затем переход по ребру 1 дерева ветвления в вершину 8.

Вершина 8 соответствует решению, в котором было достроены ребра из E' с номерами 3 и 4. Для него стоимость строительства равна $p'(2, 6)+p'(3, 4) = 300$, а пропускная способность 430. Данное решение не доминируется ни одним из решений R, поэтому оно добавляется во множество рекордов, которое становится равным $\{(0, 280), (100, 380), (300, 430)\}$. Так как дальнейшее ветвление из данной вершины невозможно, то происходит переход сначала в вершину 6, затем в 2 (так как ветвление из 6 завершено), откуда происходит переход в 1 так как ветвление из 2 также завершено. Теперь для вершины 1 рассматривается случай, когда ребро 2 из множества E' будет достроено (выполняется переход в вершину 9).

Для вершины 9 зафиксированными являются ребро 1 из E' (не построено) и 2 (построено). Для нижней оценки стоимость строительства будет равна $p'(2, 4)+p'(2, 6)+p'(3, 4) = 900$, а пропускная способность равна 330 (вычислена для сети, в которой было построено только ребро номер 2). Для верхней оценки стоимость строительства равна стоимости фиксированных ребер, которые будут построены. В данном случае стоимость есть стоимость ребра с номером 2, равная $p'(2, 4) = 600$. Полученная верхняя оценка $(600, 430)$ доминируется решением $(300, 430)$ из множества рекордов, поэтому дальнейшее ветвление из данной вершины смысла не имеет и происходит переход в вершину 1 дерева ветвления, из которого, в свою очередь, происходит переход в вершину 0, так как ветвление в 1 завершено.

Для вершины 0 был рассмотрен случай, когда ребро из E' с номером 1 не было построено. Теперь рассматривается случай, когда это ребро будет достроено. Т.е. происходит переход в вершину дерева ветвлений с номером 10. Для данного подмножества решений нижняя оценка равна $(1025, 350)$, а верхняя $125, 500$. Полученная верхняя оценка не доминируется ни одним из решений из R, и так как не все ребра из E' зафиксированы, то выполняем ветвление из вершины 10.

Сначала выполняется переход в вершину 11, которой соответствуют нижняя и верхняя оценки, равные $(425, 350)$ и $(125, 500)$ соответственно. Полученная верхняя оценка не доминируется ни одним решением из R. Так как не все ребра зафиксированы, то происходит ветвление из вершины 11.

Сначала выполняется переход в вершину 12, которой соответствуют нижняя и верхние оценки, равные $(225, 350)$ и $(125, 450)$ соответственно. Полученная верхняя оценка не доминируется ни одним решением из R. Так как не все ребра зафиксированы, то происходит ветвление из вершины 12.

Пройдя по ребру с 0 дерева ветвления приходим в вершину 13, которой соответствует решение, в котором было построено только ребро с номером 1 из E'. Для такого решения стоимость строительства равна 125, а пропускная способность 350. Полученное решение доминируется решением $(100, 380)$ из множества рекордов R. Поэтому, выполняется переход в вершину 12, из которого происходит переход в вершину 14.

Вершина 14 соответствует решению, в котором было достроены ребра из E' с номерами 1 и 4. Для него стоимость строительства равна $p'(1,7) + p'(3,4) = 225$, а пропускная способность 450. Данное решение доминирует решение $(300, 430)$ из R, поэтому $(300, 430)$ удаляется из множество рекордов, и вместо него добавляется $(225, 450)$. Таким образом, $R = \{(0, 280), (100, 380), (225, 450)\}$. Так как дальнейшее ветвление из данной вершины невозможно, то происходит переход сначала в вершину 12, затем в 11 (так как ветвление из 12 завершено). Теперь для вершины 11 рассматривается случай, когда ребро 3 из множества E' будет достроено (выполняется переход в вершину 15).

Вершине 15 соответствуют нижняя и верхняя оценки, равные $(425, 400)$ и $(325, 500)$ соответственно. Полученная верхняя оценка не доминируется ни одним решением из R. Так как не все ребра зафиксированы, то происходит ветвление из вершины 15.

Сначала происходит переход в вершину 16, которая соответствует решению, в котором построен ребра из E' с номерами 1 и 3. Для него стоимость строительства равна $p'(1,7)+p'(2,6) = 325$, а пропускная способность равна 400. Данное решение доминируется решением $(225, 450)$ из множества рекордов, поэтому выполняется переход в вершину 15, а затем переход по ребру 1 дерева ветвления в вершину 17.

Вершина 17 соответствует решению, в котором было достроены ребра из E' с номерами 1, 3 и 4. Для него стоимость строительства равна $p'(1,7) + p'(2,6) + p'(3,4) = 425$, а пропускная способность 500. Данное решение не доминируется ни одним решением из множества рекордов, поэтому $R = \{(0, 280), (100, 380), (225, 450), (425, 500)\}$.

Ветвление из вершины 17 невозможно, поэтому выполняется переход сначала в вершину 15, затем в вершину 11 (так как ветвление в 15 завершено) и аналогично происходит переход в вершину 10.

Для вершины 10 был рассмотрен случай, когда ребро из E' с номером 2 не было построено. Теперь рассматривается случай, когда это ребро будет достроено. Т.е. происходит переход в вершину дерева ветвлений с номером 18. Для данного подмножества решений нижняя оценка равна $(1025, 400)$, а верхняя $(725, 500)$. Верхняя оценка доминируется решением $(425, 500)$ из R, поэтому ветвление из текущей вершины не имеет смысла. Происходит переход сначала в вершину 10, откуда выполняется переход в вершину 0 (так как ветвление 10 завершено). Ветвление из корня дерево завершено, поэтому алгоритм завершает свою работу.

Итак, найдено множество парето-оптимальных решений $\{\{\emptyset\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$, которым соответствуют пары значений критериев $(0, 280), (0, 380), (225, 450)$ и $(425, 500)$ соответствнно (для каждого решения указан список номеров ребер из E', которые необходимо построить).

5. Заключение

Результаты вычислительных экспериментов показывают, что предложенная адаптация метода ветвей и границ для решения задачи оптимизации сети передачи данных является эффективной (алгоритм работает а три порядка быстрее метода полного перебора уже на задачах размерности 40).

Предложенный алгоритм является универсальным и может быть использован при решении любых задач структурной оптимизации – необходимо лишь изменить функции вычисления нижней и верхней оценок.

Список литературы

1. A. H. Land, A. G. Doig., "An automatic method of solving discrete programming problems", *Econometrica*, 1960, № 3, 497–520.

2. Е. А. Лазарев, Д. Е. Шапошников, П. В. Мисевич., "Бикритериальная модель сети передачи данных", *Системы управления и информационные технологии*, 2011, № 3.2(45), 255-–258.

3. А. В. Шмалько., *Цифровые сети связи: основы планирования и проектирования*, Эко-Трендз, М., 2001, 282 с.

4. Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн., *Алгоритмы: построение и анализ*, Вильямс, М., 2006, 1296 с.

Adaptation of branch and bound method solving multicriterion problems of structural optimization

© **E. A. Lazarev**[2]

Abstract. The work presents adaptation of branch and bound method solving multicriterion problems of structural optimization based on example of network optimization problem; computational results are presented.

Key Words: network design, branch and bound method, multicriterion optimization.

[2] Graduate student of the department of computer systems and technologies, Nizhny Novgorod State Technical University after R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod; elazarev.nnov@gmail.com.