*УДК 517.9*

# Критерии устойчивости решений дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа

© **И. В. Бойков**[1], **В. А. Рязанцев**[2]

**Аннотация.** В работе получены достаточные условия устойчивости решения системы параболических уравнений с коэффициентами, зависящими от времени.
**Ключевые слова:** уравнения в частных производных, устойчивость тривиального решения, логарифмическая норма.

## 1. Введение

Проблема устойчивости решений уравнений в частных производных является актуальной как с теоретической точки зрения, так и в связи с большим количеством приложений таких уравнений в естествознании и технике. Этим проблемам посвящена обширная литература, в которой нужно отметить монографии [1], [2] и [3], содержащие большую библиографию, а также обзор [4].

Основным аппаратом исследования устойчивости нелинейных уравнений в частных производных является применение преобразования Фурье и построение обобщенных функционалов Ляпунова. В настоящей работе исследование устойчивости решений систем параболических уравнений проводится методом, основанным на оценках решений операторных уравнений логарифмическими нормами. Логарифмическая норма $\Lambda(A)$ оператора $A$ определяется как [8]

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{\|I+hA\|-1}{h}$$

Если $A$ – вещественная матрица размерности $n\times n$, то в векторных пространствах элементов $x=(x_1,\ldots,x_n)$ логарифмическая норма $\Lambda(A)$ вычисляется по формулам [5], [6]

$$\Lambda(A)=\sup_{j=\overline{1,n}}\left(a_{jj}+\sum_{k=1,k\neq j}^{n}|a_{jk}|\right) \tag{1.1}$$

с нормами $\|x\|=\max\limits_{k=\overline{1,n}}|x_k|$, $\|A\|=\max\limits_{j=\overline{1,n}}\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{jk}|$, и

$$\Lambda(A)=\sup_{j=\overline{1,n}}\left(a_{jj}+\sum_{k=1,k\neq j}^{n}|a_{kj}|\right) \tag{1.2}$$

с нормами $\|x\|=\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|$, $\|A\|=\max\limits_{j=\overline{1,n}}\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{kj}|$.

[1] Заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет, г. Пенза; boikov@pnzgu.ru.

[2] Аспирант кафедры высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет, г. Пенза; ryazantsevv@mail.ru.

В настоящей работе получены достаточные условия устойчивости решений $n$-мерных параболических уравнений, а также систем параболических уравнений на плоскости, выраженные через логарифмические нормы соответствующих матриц.

## 2. Устойчивость решения линейного $n$-мерного параболического уравнения

Рассмотрим задачу Коши для $n$-мерного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} \left( a_k(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + a_{n+k}(t) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + a_{2n+1}(t) u, \tag{2.1}$$

$$u(t_0, x_1, \ldots, x_n) = u_0(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2.2}$$

Исследование устойчивости решения задачи Коши (2.1)-(2.2) будем проводить в банаховом пространстве функций $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, с нормой

$$\|f\| = \left[ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx_1 \ldots dx_n \right]^{1/2}.$$

При каждом фиксированном значении $t$ норма функции $u(t,x)$ определяется формулой

$$\|u(t,x)\| = \left[ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(t,x)|^2 \, dx_1 \ldots dx_n \right]^{1/2}.$$

Введем матрицу

$$C(t, \omega_1, \ldots, \omega_n) = \begin{pmatrix} a_{2n+1}(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(t)\omega_k^2 & -\sum\limits_{k=1}^{n} a_{n+k}(t)\omega_k \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{n+k}(t)\omega_k & a_{2n+1}(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(t)\omega_k^2 \end{pmatrix},$$

где $-\infty < \omega_i < \infty$, $i = \overline{1,n}$.

**Т е о р е м а 2.1.** *Пусть выполнены условия:*

*1) функции $a_k(t)$ $(k = \overline{1, 2n+1})$ непрерывны по переменной $t$;*

*2) при любых фиксированных значениях $(t, \omega)$, где $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $-\infty < \omega_i < \infty$, $i = \overline{1,n}$, $t \geq t_0$, логарифмическая норма матрицы $C(t,\omega)$, вычисляемая по формуле (1.1), удовлетворяет неравенству*

$$\Lambda\big(C(t,\omega)\big) < -\alpha(\omega), \quad \alpha(\omega) > 0. \tag{2.3}$$

*Тогда тривиальное решение уравнения (2.1) устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что решение $u(t,x)$ задачи Коши (2.1)-(2.2) существует при всех $t \geq t_0$ и вместе со своей производной $\partial u / \partial t$ суммируемо с квадратом по пространственным переменным. Пусть функция $u_0(x)$ непрерывна и удовлетворяет неравенству $\|u_0(x)\| \leq \varepsilon_1$.

Для прямого и обратного преобразований Фурье используем следующие обозначения [7]:

$$U(t,\omega) = Fu(t,x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t,x) \exp\left(-i\sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k\right) dx_1 \dots dx_n,$$

$$u(t,x) = F^{-1}U(t,\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} U(t,\omega) \exp\left(i\sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k\right) d\omega_1 \dots d\omega_n.$$

Применим к задаче (2.1)-(2.2) преобразование Фурье по пространственным переменным, имея в виду [7], что $F\left(\dfrac{\partial^j u(t,x)}{\partial x_k^j}\right) = (i\omega_k)^j\, U(t,\omega)$. В результате получаем задачу Коши

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\left(\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\omega_k^2\right) U + i\left(\sum_{k=1}^{n} a_{n+k}(t)\omega_k\right) U + a_{2n+1}(t)U, \tag{2.4}$$

$$U(t_0,\omega) = U_0(\omega). \tag{2.5}$$

Справедливо представление $U(t,\omega) = U_1(t,\omega) + iU_2(t,\omega)$, где $U_1(t,\omega), U_2(t,\omega)$ – вещественные функции. Подставив эти представления в задачу (2.4)-(2.5), приходим к задаче

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial t} = \left(a_{2n+1}(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(t)\omega_k^2\right) U_1 - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{n+k}(t)\omega_k\right) U_2, \\ \dfrac{\partial U_2}{\partial t} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{n+k}(t)\omega_k\right) U_1 + \left(a_{2n+1}(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(t)\omega_k^2\right) U_2, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$U_1(t_0,\omega) = U_{01}(\omega), U_2(t_0,\omega) = U_{02}(\omega). \tag{2.7}$$

Введем обозначения $\widetilde{U}(t,\omega) = \big(U_1(t,\omega), U_2(t,\omega)\big)^T$ и $\widetilde{U}_0(\omega) = (U_{01}(\omega), U_{02}(\omega))^T$. При каждом фиксированном $\omega \in \mathbb{R}^n$ норма вектор-функции $\widetilde{U}(t,\omega)$ вычисляется по формуле $|\widetilde{U}(t,\omega)\|_1 = \max\limits_{i=1,2} |U_i(t,\omega)|$. Справедливы следующие неравенства:

$$\|\widetilde{U}(t,\omega)\|_1 = \max_{i=1,2} |U_i(t,\omega)| = \sqrt{\big(\max_{i=1,2} |U_i(t,\omega)|\big)^2} \le \sqrt{U_1^2(t,\omega) + U_2^2(t,\omega)} = |U(t,\omega)|,$$

$$|U(t,\omega)| = \sqrt{U_1^2(t,\omega) + U_2^2(t,\omega)} \le \sqrt{\big(\max_{i=1,2} |U_i(t,\omega)|\big)^2 + \big(\max_{i=1,2} |U_i(t,\omega)|\big)^2} \le \sqrt{2}\|\widetilde{U}(t,\omega)\|_1.$$

Тем самым, имеем оценку

$$\|\widetilde{U}(t,\omega)\|_1 \le |U(t,\omega)| \le \sqrt{2}\|\widetilde{U}(t,\omega)\|_1. \tag{2.8}$$

Введем обозначение $B[a,r]$ для замкнутого шара в пространстве $\mathbb{R}^n$ радиуса $r$ с центром в точке $a$. Докажем, что при всяком фиксированном $\omega \in \mathbb{R}^n$ траектория $\widetilde{U}(t,\omega)$ задачи Коши (2.6)-(2.7) при $t_0 \le t < \infty$ не покидает шара $B[0,\delta_0]$, где $\delta_0 = \|\widetilde{U}_0(\omega)\|_1$. Для доказательства предположим противное: пусть при некотором $\omega = \widetilde{\omega}$ в момент времени $T$ траектория решения системы (2.6) покидает шар $B[0,\delta_0]$. Для этого значения $\omega = \widetilde{\omega}$

систему уравнений (2.6) представим следующим образом

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \left(a_{2n+1}(T) - \sum_{k=1}^{n} a_k(T)\widetilde{\omega}_k^2\right) U_1 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_{n+k}(T)\widetilde{\omega}_k\right) U_2 + \\ + \left(a_{2n+1}(t) - a_{2n+1}(T) - \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(t) - a_k(T)\right)\widetilde{\omega}_k^2\right) U_1 - \\ - \left(\sum_{k=1}^{n} \left(a_{n+k}(t) - a_{n+k}(T)\right)\widetilde{\omega}_k\right) U_2, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = -\left(\sum_{k=1}^{n} a_{n+k}(T)\widetilde{\omega}_k\right) U_1 + \left(a_{2n+1}(T) - \sum_{k=1}^{n} a_k(T)\widetilde{\omega}_k^2\right) U_2 - \\ - \left(\sum_{k=1}^{n} \left(a_{n+k}(t) - a_{n+k}(T)\right)\widetilde{\omega}_k\right) U_1 + \\ + \left(a_{2n+1}(t) - a_{2n+1}(T) - \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(t) - a_k(T)\right)\widetilde{\omega}_k^2\right) U_2, \tag{2.10}$$

В операторной форме система (2.9)-(2.10) имеет вид:

$$\frac{\partial \widetilde{U}(t,\widetilde{\omega})}{\partial t} = C\big(T,\widetilde{\omega}\big)\widetilde{U}(t,\widetilde{\omega}) + \Psi(t,\widetilde{\omega})\widetilde{U}(t,\widetilde{\omega}), \tag{2.11}$$

где $\Psi(t,\widetilde{\omega}) =$

$$\begin{pmatrix} a_{2n+1}(t) - a_{2n+1}(T) - \sum\limits_{k=1}^{n} \left(a_k(t) - a_k(T)\right)\widetilde{\omega}_k^2 & -\sum\limits_{k=1}^{n} \left(a_{n+k}(t) - a_{n+k}(T)\right)\widetilde{\omega}_k \\ -\sum\limits_{k=1}^{n} \left(a_{n+k}(t) - a_{n+k}(T)\right)\widetilde{\omega}_k & a_{2n+1}(t) - a_{2n+1}(T) - \sum\limits_{k=1}^{n} \left(a_k(t) - a_k(T)\right)\widetilde{\omega}_k^2 \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения (2.8) при $t \geq T$ может быть представлено в виде [8]

$$\widetilde{U}(t,\widetilde{\omega}) = e^{C(T,\widetilde{\omega})(t-T)}\widetilde{U}\big(T,\widetilde{\omega}\big) + \int\limits_{T}^{t} e^{C(T,\widetilde{\omega})(t-s)}\Psi\big(s,\widetilde{\omega}\big)\widetilde{U}\big(s,\widetilde{\omega}\big)\,ds.$$

Переходя к нормам, имеем:

$$\left\|\widetilde{U}(t,\widetilde{\omega})\right\|_1 \leq \left\|e^{C(T,\widetilde{\omega})(t-T)}\widetilde{U}\big(T,\widetilde{\omega}\big)\right\|_1 + \left\|\int\limits_{T}^{t} e^{C(T,\widetilde{\omega})(t-s)}\Psi\big(s,\widetilde{\omega}\big)\widetilde{U}\big(s,\widetilde{\omega}\big)\,ds\right\|_1. \tag{2.12}$$

Оценим норму первого слагаемого. Так как по условиям теоремы логарифмическая норма $\Lambda\big(C(t,\omega)\big)$ оператора $C(t,\omega)$ удовлетворяет при всех $\omega \in \mathbb{R}^n$ неравенству (2.3), то имеем следующую оценку:

$$\left\|e^{C(T,\widetilde{\omega})(t-T)}\widetilde{U}\big(T,\widetilde{\omega}\big)\right\|_1 \leq e^{-\alpha(\widetilde{\omega})(t-T)}\left\|\widetilde{U}(t,\widetilde{\omega})\right\|_1. \tag{2.13}$$

Для оценки второго слагаемого отметим, что из структуры оператора $\Psi(t,\widetilde{\omega})$ следует, что для любого как угодно малого $\varepsilon_2 > 0$ найдется такой промежуток времени $\Delta T(\varepsilon_2,\widetilde{\omega})$, что при $T \le t \le T + \Delta T(\varepsilon_2, \widetilde{\omega})$ будет выполняться неравенство $\|\Psi(t,\widetilde{\omega})\widetilde{U}(t,\widetilde{\omega})\|_1 \le \varepsilon_2 \|\widetilde{U}(t,\widetilde{\omega})\|_1$

Поэтому

$$\left\| \int_T^t e^{C(T,\widetilde{\omega})(t-s)} \Psi(s,\widetilde{\omega})\widetilde{U}(s,\widetilde{\omega})\, ds \right\|_1 \le \int_T^t \left\| e^{C(T,\widetilde{\omega})(t-s)} \Psi(s,\widetilde{\omega})\widetilde{U}(s,\widetilde{\omega}) \right\|_1 ds \le$$

$$\le \int_T^t \left\| e^{C(T,\widetilde{\omega})(t-s)} \right\|_1 \left\| \Psi(s,\widetilde{\omega})\widetilde{U}(s,\widetilde{\omega}) \right\|_1 ds \le \varepsilon_2 \int_T^t e^{-\alpha(\widetilde{\omega})(t-s)} \|\widetilde{U}(s,\omega)\|_1\, ds. \quad (2.14)$$

Из неравенств (2.12)-(2.14) имеем

$$\left\| \widetilde{U}(t,\widetilde{\omega}) \right\|_1 \le e^{-\alpha(\widetilde{\omega})(t-T)} \left\| \widetilde{U}(T,\widetilde{\omega}) \right\|_1 + \varepsilon_2 \int_T^t e^{-\alpha(\widetilde{\omega})(t-s)} \left\| \widetilde{U}(s,\widetilde{\omega}) \right\|_1 ds.$$

Введем функцию $\varphi(s) = e^{-\alpha(\widetilde{\omega})(t-s)} \|\widetilde{U}(s,\widetilde{\omega})\|_1$ и представим предыдущее неравенство в виде $\varphi(t) \le \varphi(T) + \varepsilon_2 \int\limits_T^t \varphi(s)\, ds$. Применяя неравенство Гронуолла-Беллмана и возвращаясь к нормам, получаем неравенство $\|\widetilde{U}(t,\widetilde{\omega})\|_1 \le e^{[-\alpha(\widetilde{\omega})+\varepsilon_2](t-T)} \|\widetilde{U}(T,\widetilde{\omega})\|_1$, откуда в силу условия (2.3), выбора $\varepsilon_2$ и произвольности $T$ следует неравенство $\|\widetilde{U}(t,\widetilde{\omega})\|_1 \le \|\widetilde{U}_0(\widetilde{\omega})\|_1$. Тем самым, приходим к противоречию, обосновывающему справедливость для любого значения $\omega \in \mathbb{R}^n$ неравенства $\|\widetilde{U}(t,\omega)\|_1 \le \|\widetilde{U}_0(\omega)\|_1$, из которого в силу двусторонней оценки (2.8) следует неравенство $|U(t,\omega)|^2 \le 2|U_0(\omega)|^2$. Проинтегрировав обе его части по пространственным переменным и воспользовавшись формулой Планшереля $\|U(t,\omega)\|_2 = \|u(t,x)\|_2$, приходим к неравенству $\|u(t,x)\|^2 \le 2\varepsilon_1^2$, из которого сразу же следует неравенство $\|u(t,x)\| \le \sqrt{2}\varepsilon_1$, означающее устойчивость решения задачи (2.1)-(2.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Используя теорему 2.1., получим ограничения на коэффициенты $a_1(t), \ldots, a_{2n+1}(t)$, достаточные для устойчивости тривиального решения задачи Коши (2.1)-(2.2). Для этого исследуем, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты $a_1(t), \ldots, a_{2n+1}(t)$, чтобы выполнялось условие (2.3).

Поскольку логарифмическая норма $\Lambda\big(C(t,\omega)\big)$ вычисляется по формуле (1.1), то условие (2.3) теоремы 2.1. эквивалентно справедливости при любых $\omega \in \mathbb{R}^n$ неравенства

$$a_{2n+1}(t) - \sum_{k=1}^n a_k(t)\omega_k^2 + \left| \sum_{k=1}^n a_{n+k}(t)\omega_k \right| < 0.$$

Это неравенство можно заменить на более грубое:

$$\sum_{k=1}^n \left[ -a_k(t)\omega_k^2 + |a_{n+k}(t)||\omega_k| \right] < -a_{2n+1}(t) \quad (2.15)$$

Для того, чтобы неравенство (2.15) имело решения при любых $\omega \in \mathbb{R}^n$, необходимо потребовать, чтобы при каждом фиксированном $t \ge t_0$ выполнялись неравенства

$$a_{2n+1}(t) < 0, \qquad a_k(t) > 0, k = \overline{1,n}. \quad (2.16)$$

Пусть неравенства (2.16) справедливы. Тогда условие (2.15) будет иметь место при любых $\omega \in \mathbb{R}^n$, если этому условию удовлетворяет сумма $n$ максимумов параболических функций, стоящих в левой части (2.15). Легко убедиться, что при каждом фиксированном $t$ максимумы достигаются в точках $\omega_k = \dfrac{|a_{n+k}(t)|}{2a_k(t)}, k = \overline{1, n}$, а неравенство (2.15) имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n+k}^2(t)}{4a_k(t)} < -a_{2n+1}(t). \tag{2.17}$$

**Т е о р е м а 2.2.** *Пусть функции* $a_k(t)$ $(k = \overline{1, 2n+1})$ *непрерывны по переменной* $t$ *и при каждом фиксированном* $t \geq t_0$ *удовлетворяют условиям* (2.16)-(2.17). *Тогда тривиальное решение системы уравнений* (2.1) *устойчиво.*

## 3. Устойчивость решения системы параболических уравнений

Проанализируем устойчивость тривиального решения задачи Коши для системы параболических уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} =a_{1,1}(t)\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + a_{1,2}(t)\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + a_{1,3}(t)\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + a_{1,4}(t)\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + a_{1,5}(t)\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \\ \qquad + a_{1,6}(t)\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + a_{1,7}(t)\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + a_{1,8}(t)\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + a_{1,9}(t)u_1 + a_{1,10}(t)u_2, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} =a_{2,1}(t)\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + a_{2,2}(t)\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + a_{2,3}(t)\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + a_{2,4}(t)\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + a_{2,5}(t)\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \\ \qquad + a_{2,6}(t)\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + a_{2,7}(t)\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + a_{2,8}(t)\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + a_{2,9}(t)u_1 + a_{2,10}(t)u_2, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$u_1(t_0, x_1, x_2) = u_{01}(x_1, x_2), \quad u_2(t_0, x_1, x_2) = u_{02}(x_1, x_2). \tag{3.2}$$

Исследовать устойчивость решения задачи Коши (3.1)-(3.2) будем в банаховом пространстве вектор-функций $f(x_1, x_2)$ с нормой

$$\|f\| = \max_{i=1,2} \left[ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_i(x_1, x_2)|^2 \, dx_1 dx_2 \right]^{1/2}.$$

При каждом фиксированном значении $t$ норма вектор-функции $u(t, x)$, где $x = (x_1, x_2)$, определяется формулой

$$\|u(t, x)\| = \max_{i=1,2} \left[ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |u_i(t, x)|^2 \, dx_1 dx_2 \right]^{1/2}.$$

Пусть решение $u(t, x) = \big(u_1(t, x), u_2(t, x)\big)^T$ задачи Коши (3.1)-(3.2) существует и вместе с производной $\partial u/\partial t = \big(\partial u_1/\partial t, \partial u_2/\partial t\big)^T$ суммируемо с квадратом по пространственным переменным. В этих предположениях применим к задаче (3.1)-(3.2) преобразование

Фурье и получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial t} = -a_{1,1}(t)\omega_1^2 U_1 - a_{1,2}(t)\omega_2^2 U_1 - a_{1,3}(t)\omega_1^2 U_2 - a_{1,4}(t)\omega_2^2 U_2 + ia_{1,5}(t)\omega_1 U_1 + \\ + ia_{1,6}(t)\omega_2 U_1 + ia_{1,7}(t)\omega_1 U_2 + ia_{1,8}(t)\omega_2 U_2 + a_{1,9}(t)U_1 + a_{1,10}(t)U_2, \\ \dfrac{\partial U_2}{\partial t} = -a_{2,1}(t)\omega_1^2 U_1 - a_{2,2}(t)\omega_2^2 U_1 - a_{2,3}(t)\omega_1^2 U_2 - a_{2,4}(t)\omega_2^2 U_2 + ia_{2,5}(t)\omega_1 U_1 + \\ + ia_{2,6}(t)\omega_2 U_1 + ia_{2,7}(t)\omega_1 U_2 + ia_{2,8}(t)\omega_2 U_2 + a_{2,9}(t)U_1 + a_{2,10}(t)U_2, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$U_1(t_0,\omega) = U_{01}(\omega), \quad U_2(t_0,\omega) = U_{02}(\omega). \tag{3.4}$$

Справедливы представления $U_1(t,\omega) = V_1(t,\omega) + iV_2(t,\omega), U_2(t,\omega) = V_3(t,\omega) + iV_4(t,\omega)$, где $V_1(t,\omega), V_2(t,\omega), V_3(t,\omega), V_4(t,\omega)$ – вещественные функции. Подставив эти представления в задачу (3.3)-(3.4), приходим к следующей задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial t} = \big(a_{1,9}(t) - a_{1,1}(t)\omega_1^2 - a_{1,2}(t)\omega_2^2\big)V_1 - \big(a_{1,5}(t)\omega_1 + a_{1,6}(t)\omega_2\big)V_2 + \\ \quad + \big(a_{1,10}(t) - a_{1,3}(t)\omega_1^2 - a_{1,4}(t)\omega_2^2\big)V_3 - \big(a_{1,7}(t)\omega_1 + a_{1,8}(t)\omega_2\big)V_4, \\ \dfrac{dV_2}{dt} = \big(a_{1,5}(t)\omega_1 + a_{1,6}(t)\omega_2\big)V_1 + \big(a_{1,9}(t) - a_{1,1}(t)\omega_1^2 - a_{1,2}(t)\omega_2^2\big)V_2 + \\ \quad + \big(a_{1,7}(t)\omega_1 + a_{1,8}(t)\omega_2\big)V_3 + \big(a_{1,10}(t) - a_{1,3}(t)\omega_1^2 - a_{1,4}(t)\omega_2^2\big)V_4, \\ \dfrac{dV_3}{dt} = \big(a_{2,9}(t) - a_{2,1}(t)\omega_1^2 - a_{2,2}(t)\omega_2^2\big)V_1 - \big(a_{2,5}(t)\omega_1 + a_{2,6}(t)\omega_2\big)V_2 + \\ \quad + \big(a_{2,10}(t) - a_{2,3}(t)\omega_1^2 - a_{2,4}(t)\omega_2^2\big)V_3 - \big(a_{2,7}(t)\omega_1 + a_{2,8}(t)\omega_2\big)V_4, \\ \dfrac{dV_4}{dt} = \big(a_{2,5}(t)\omega_1 + a_{2,6}(t)\omega_2\big)V_1 + \big(a_{2,9}(t) - a_{2,1}(t)\omega_1^2 - a_{2,2}(t)\omega_2^2\big)V_2 + \\ \quad + \big(a_{2,7}(t)\omega_1 + a_{2,8}(t)\omega_2\big)V_3 + \big(a_{2,10}(t) - a_{2,3}(t)\omega_1^2 - a_{2,4}(t)\omega_2^2\big)V_4, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$V_1(t_0,\omega) = V_{01}(\omega), \quad V_2(t_0,\omega) = V_{02}(\omega),$$
$$V_3(t_0,\omega) = V_{03}(\omega), \quad V_4(t_0,\omega) = V_{04}(\omega),$$

где функции $V_{0j}(\omega), j = \overline{1,4}$ определяются из соотношений

$$U_{01}(\omega) = V_{01}(\omega) + iV_{02}(\omega), \quad U_{02}(\omega) = V_{03}(\omega) + iV_{04}(\omega).$$

В операторном виде система (3.5) будет иметь вид:

$$\frac{\partial V(t,\omega)}{\partial t} = B(t,\omega)V(t,\omega),$$

где $V(t,\omega) = \big(V_1(t,\omega), V_2(t,\omega), V_3(t,\omega), V_4(t,\omega)\big)^T$,

$$B(t,\omega) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

$$B_{i1} = \begin{pmatrix} a_{i9}(t) - a_{i1}(t)\omega_1^2 - a_{i2}(t)\omega_2^2 & -a_{i5}(t)\omega_1 - a_{i6}(t)\omega_2 \\ a_{i5}(t)\omega_1 + a_{i6}(t)\omega_2 & a_{i9}(t) - a_{i1}(t)\omega_1^2 - a_{i2}(t)\omega_2^2 \end{pmatrix},$$

$$B_{i2} = \begin{pmatrix} a_{i10}(t) - a_{i3}(t)\omega_1^2 - a_{i4}(t)\omega_2^2 & -a_{i7}(t)\omega_1 - a_{i8}(t)\omega_2 \\ a_{i7}(t)\omega_1 + a_{i8}(t)\omega_2 & a_{i10}(t) - a_{i3}(t)\omega_1^2 - a_{i4}(t)\omega_2^2 \end{pmatrix},$$

и $i = 1, 2$.

Достаточное условие устойчивости дается следующей теоремой.

**Т е о р е м а 3.1.** *Пусть выполнены условия:*

*1) функции $a_{ij}(t), i=\overline{1,2}, j=\overline{1,10}$ непрерывны по переменной $t$;*

*2) при любых фиксированных значениях $(t,\omega_1,\omega_2), t\geq t_0, -\infty<\omega_i<\infty, i=1,2$ логарифмическая норма матрицы $B(t,\omega_1,\omega_2)$, вычисляемая по формуле* (1.1)*, удовлетворяет неравенству*

$$\Lambda\big(B(t,\omega_1,\omega_2)\big)<-\alpha(\omega_1,\omega_2),\quad \alpha(\omega_1,\omega_2)>0. \tag{3.6}$$

*Тогда тривиальное решение задачи Коши* (3.1)-(3.2) *устойчиво.*

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.1..

Выведем ограничения на коэффициенты $a_{ij}(t), i=\overline{1,2}, j=\overline{1,10}$, достаточные для выполнения условия (3.6). Это условие эквивалентно системе из двух неравенств:

$$\begin{cases} \big(a_{1,9}(t)-a_{1,1}(t)\omega_1^2-a_{1,2}(t)\omega_2^2\big)+\big|a_{1,10}(t)-a_{1,3}(t)\omega_1^2-a_{1,4}(t)\omega_2^2\big|+\\ +|a_{1,5}(t)\omega_1+a_{1,6}(t)\omega_2|+|a_{1,7}(t)\omega_1+a_{1,8}(t)\omega_2|<0,\\ \big(a_{2,10}(t)-a_{2,3}(t)\omega_1^2-a_{2,4}(t)\omega_2^2\big)+\big|a_{2,9}(t)-a_{2,1}(t)\omega_1^2-a_{2,2}(t)\omega_2^2\big|+\\ +|a_{2,5}(t)\omega_1+a_{2,6}(t)\omega_2|+|a_{2,7}(t)\omega_1+a_{2,8}(t)\omega_2|<0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Имея в виду, что в этой системе два неравенства лишь формально отличны друг от друга, проанализируем только первое неравенство, а полученные результаты затем распространим на второе неравенство. Исследуем, при каких условиях при любом $\omega\in\mathbb{R}^2$ выполняется неравенство

$$\big(a_{1,9}(t)-a_{1,1}(t)\omega_1^2-a_{1,2}(t)\omega_2^2\big)+\big|a_{1,10}(t)-a_{1,3}(t)\omega_1^2-a_{1,4}(t)\omega_2^2\big|+\\ +|a_{1,5}(t)\omega_1+a_{1,6}(t)\omega_2|+|a_{1,7}(t)\omega_1+a_{1,8}(t)\omega_2|<0.$$

Это неравенство можно заменить на более грубое

$$\big(a_{1,9}(t)-a_{1,1}(t)\omega_1^2-a_{1,2}(t)\omega_2^2\big)+|a_{1,10}(t)|+|a_{1,3}(t)|\omega_1^2+|a_{1,4}(t)|\omega_2^2+\\ +\big(|a_{1,5}(t)|+|a_{1,7}(t)|\big)|\omega_1|+\big(|a_{1,6}(t)|+|a_{1,8}(t)|\big)|\omega_2|<0. \tag{3.8}$$

Сгруппировав слагаемые, перепишем последнее неравенство следующим образом:

$$\big[\big(|a_{1,3}(t)|-a_{1,1}(t)\big)\omega_1^2+\big(|a_{1,5}(t)|+|a_{1,7}(t)|\big)|\omega_1|\big]+\\ +\big[\big(|a_{1,4}(t)|-a_{1,2}(t)\big)\omega_2^2+\big(|a_{1,6}(t)|+|a_{1,8}(t)|\big)|\omega_2|\big]<-\left(a_{1,9}(t)+|a_{1,10}(t)|\right).$$

Таким образом, левая часть неравенства (3.8) представляется в виде суммы двух параболических функций от независимых аргументов. Поскольку неравенство (3.8) должно выполняться для любых значений $\omega$, то необходимо, чтобы обе параболы имели ветви, направленные вниз. Следовательно, при каждом фиксированном $t\geq t_0$ должны выполняться условия

$$|a_{1,3}(t)|<a_{1,1}(t), |a_{1,4}(t)|<a_{1,2}(t). \tag{3.9}$$

При условии (3.9) неравенство (3.8) будет выполняться при любых $-\infty<\omega_i<\infty$, $i=1,2$, если этому неравенству будет удовлетворять сумма максимумов упомянутых параболических функций. Вычисляя при каждом фиксированном $t\geq t_0$ значения параболических функций в точках максимума $\omega_1=\dfrac{|a_{1,5}(t)|+|a_{1,7}(t)|}{2\big(a_{1,1}(t)-|a_{1,3}(t)|\big)}$ и $\omega_2=\dfrac{|a_{1,6}(t)|+|a_{1,8}(t)|}{2\big(a_{1,2}(t)-|a_{1,4}(t)|\big)}$ соответственно, приходим к следующему условию:

$$\frac{\big(|a_{1,5}(t)|+|a_{1,7}(t)|\big)^2}{2\big(a_{1,1}(t)-|a_{1,3}(t)|\big)}+\frac{\big(|a_{1,6}(t)|+|a_{1,8}(t)|\big)^2}{2\big(a_{1,2}(t)-|a_{1,4}(t)|\big)}\leq-\big(a_{1,9}(t)+|a_{1,10}(t)|\big). \tag{3.10}$$

Распространяя полученные результаты на второе неравенство системы (3.7), получаем следующие дополнительные условия:

$$|a_{2,1}| < a_{2,3}(t), |a_{2,2}(t)| < a_{2,4}(t), \tag{3.11}$$

$$\frac{\big(|a_{2,5}(t)| + |a_{2,7}(t)|\big)^2}{2\big(a_{2,3}(t) - |a_{2,1}(t)|\big)} + \frac{\big(|a_{2,6}(t)| + |a_{2,8}(t)|\big)^2}{2\big(a_{2,4}(t) - |a_{2,2}(t)|\big)} \le -\big(a_{2,10}(t) + |a_{2,9}(t)|\big). \tag{3.12}$$

Приведенные рассуждения позволяют нам сформулировать теорему.

**Теорема 3.2.** *Пусть функции $a_{ij}(t), i = \overline{1,2}, j = \overline{1,10}$ при $t \ge t_0$ непрерывны по переменной $t$ и при каждом фиксированном $t \ge t_0$ удовлетворяют неравенствам* (3.9)-(3.12). *Тогда тривиальное решение задачи Коши* (3.1)-(3.2) *устойчиво.*

**Замечание 3.1.** *Теорема 3.1. остается справедливой, если логарифмическую норму $\Lambda\big(B(t,\omega)\big)$ в ней вычислять по формуле* (1.2). *В этом случае требование $\Lambda\big(B(t,\omega)\big) < 0$ приводит к достаточным условиям устойчивости, отличным от сформулированных в теореме 3.2.*

## Список литературы


1. А. А. Шестаков, *Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами*, Наука, М., 1990, 320 с.
2. Т. К. Сиразетдинов, *Устойчивость систем с распределенными параметрами*, Наука, М., 1987, 232 с.
3. Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985, 376 с.
4. С. Г. Крейн, М. И. Хазан, "Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве", *Итоги науки и техники. Математический анализ*, **21**, ВИНИТИ, М., 1983, 130–264.
5. И. В. Бойков, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений*, Изд-во Пенз. гос. ун-та, Пенза, 2008, 244 с.
6. К. Деккер, *Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1988, 334 с.
7. И. Снеддон, *Преобразования Фурье*, Изд-во иностр. лит., М., 1955, 667 с.
8. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970, 536 с.


# Stability criteria for the solutions of partial differential equations of parabolic type

**© I. V. Boykov[3], V. A. Ryazantsev[4]**

**Abstract.** In the work we obtained some sufficient conditions of solutions stability for systems of parabolic differential equations with time-dependent coefficients.

**Key Words:** partial differential equations, Liapunov stability, logarithmic norm

[3] Head of Higher and Applied Mathematics Chair, Penza State University, Penza; boikov@pnzgu.ru.

[4] Post-graduate student of Higher and Applied Mathematics Chair, Penza State University, Penza; ryazantsevv@mail.ru