## В Средневолжском математическом обществе

*УДК 517.9*

# Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка общего вида с начальными данными в декартовых координатах на линии бесконечной длины

**© С. Н. Алексеенко[1], Л. Е. Платонова[2]**

**Аннотация.** Для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка с начальными условиями, заданными в декартовых координатах, построена система из 15 интегральных уравнений, решение которой дает решение рассмотренной задачи Коши в исходных координатах. Анонсирована теорема, в которой сформулированы условия локальной разрешимости, не включающие в себя предположений о характере поведения характеристик.

**Ключевые слова:** квазилинейное дифференциальное уравнение первого порядка, задача Коши, метод дополнительного аргумента.

Основным объектом исследования в данной работе является квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка

$$a_1(x_1,x_2,z)\partial_1 z + a_2(x_1,x_2,z)\partial_2 z = f(x_1,x_2,z), \tag{1.1}$$

где $\partial_i z = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, $i = 1,2$, $a_1, a_2, f$ – непрерывно дифференцируемые функции. Решение ищется в некоторой окрестности линии $L$, которая задается уравнением $x_2 = \varphi(x_1)$, $-\infty < x_1 < +\infty$. Соответственно, задача Коши ставится следующим образом:

$$z|_L = \gamma(x_1), \quad x_1 \in (-\infty;+\infty). \tag{1.2}$$

Функции $\varphi(x_1)$, $\gamma(x_1) \in \overline{C}^2(-\infty;+\infty)$, где $\overline{C}^2(-\infty;+\infty)$ – множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, ограниченных вместе со своими 1-ой и 2-ой производными на $(-\infty;+\infty)$. Пусть $N_\gamma = \max\limits_{(-\infty;+\infty)} |\gamma(x_1)|$. В общих чертах схема применения метода дополнительного аргумента (далее МДА) к задаче Коши вида (1.1), (1.2) была намечена в [3]. Но в [3] резольвентная система интегральных уравнений не приведена.

В рамках данной работы рассмотрен случай, когда линия $L$ и область определения неизвестной функции $z(x_1,x_2)$ содержится во множестве

$$\Omega_\beta = \left\{(x_1,x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, \min_{(-\infty;+\infty)}(\varphi(x_1)-\beta_0) \leqslant x_2 \leqslant \max_{(-\infty;+\infty)}(\varphi(x_1)+\beta_0)\right\}, \beta_0 \in \mathbb{R}.$$

Принципиальная особенность изучаемой задачи состоит в том, что наряду с поиском неизвестной функции $z(x_1,x_2)$ ищется и область определения решения. Соответственно, постоянная $\beta_0$ должна быть достаточно велика, чтобы искомая область определения $z(x_1,x_2)$ входила в $\Omega_\beta$. Обозначим эту заранее неизвестную область определения

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет имени Р. Е. Алексеева, г. Н.Новгород; sn-alekseenko@yandex.ru

[2] Ассистент кафедры математического анализа, Нижегородский государственный педагогический университет имени К.Минина, г. Н.Новгород; fluff13@yandex.ru

решения задачи (1.1), (1.2) через $\Omega_\varepsilon$. Так как в данной статье речь идет о локальной разрешимости, то область $\Omega_\varepsilon$ представляет собой некоторую окрестность кривой $L$. Примем для определенности, что все заданные функции $a_1, a_2, f$ определены в области $Q_\rho = \Omega_\beta \times [-\rho N_\gamma, \rho N_\gamma]$, где коэффициент $\rho$ выбирается исходя из вида функций $a_1, a_2, f$. Сформулируем условия на $L$, при выполнении которых справедливы нижеприведенные выкладки и утверждения.

Область определения решения $\Omega_\varepsilon$ будем искать в виде полосы шириной $\varepsilon$ в направлении $Ox_2$, прилегающей к $L$ с одной стороны, точнее

$$\Omega_\varepsilon = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty,\ \varphi(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \varphi(x_1) + \varepsilon\}, \Omega_\varepsilon \subset \Omega_\beta.$$

Параметр $\varepsilon$ подлежит определению, ограничение на величину $\varepsilon$ является одним из основных условий разрешимости задачи (1.1), (1.2). А возможность определения $\varepsilon$ «конструктивно», исходя из данных задачи, представляет собой одно из основных преимуществ МДА.

В рамках метода дополнительного аргумента [3] запишем для задачи Коши (1.2) расширенную характеристическую систему:

$$\frac{d\eta_1}{ds} = a_1(\eta_1, \eta_2, u), \tag{1.3}$$

$$\frac{d\eta_2}{ds} = a_2(\eta_1, \eta_2, u), \tag{1.4}$$

$$\frac{du}{ds} = f(\eta_1, \eta_2, u) \tag{1.5}$$

с начальными данными

$$\eta_1|_{s=\omega(x_1,x_2)} = x_1, \eta_2|_{s=\omega(x_1,x_2)} = x_2, u|_L = \gamma(x_1). \tag{1.6}$$

Здесь $\omega(x_1, x_2), \eta_1(s, x_1, x_2), \eta_2(s, x_1, x_2), u(s, x_1, x_2)$ — новые неизвестные функции, непрерывно дифференцируемые по всем переменным, $s$ – дополнительный аргумент, $0 \leqslant s \leqslant \omega(x_1, x_2)$.

Значение $\omega$ на кривой, заданной уравнением $x_2 = \varphi(x_1)$ полагаем равной нулю, то есть $\omega(x_1, \varphi(x_1)) = 0$. Для получения решения в исходных координатах решения уравнений (1.3), (1.4) должны иметь возможность быть представленными в виде:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= x_1 - \int\limits_s^{\omega(x_1,x_2)} a_1(\eta_1(\delta, x_1, x_2), \eta_2(\delta, x_1, x_2), u(\delta, x_1, x_2))d\delta, \\ \eta_2 &= x_2 - \int\limits_s^{\omega(x_1,x_2)} a_2(\eta_1(\delta, x_1, x_2), \eta_2(\delta, x_1, x_2), u(\delta, x_1, x_2))d\delta. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Представление (1.7) оправдано, если можно определить новую заранее неизвестную функцию $\theta(x_1, x_2)$, для которой в некоторой области изменения ее аргументов были бы справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \theta(x_1, x_2) &= x_1 - \int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)} a_1(\eta_1(\delta, x_1, x_2), \eta_2(\delta, x_1, x_2), u(\delta, x_1, x_2))\, d\delta, \\ \varphi(\theta(x_1, x_2)) &= x_2 - \int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)} a_2(\eta_1(\delta, x_1, x_2), \eta_2(\delta, x_1, x_2), u(\delta, x_1, x_2))\, d\delta. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Из соотношений (1.5)–(1.6) при допустимости (1.7):

$$u(s,x_1,x_2)=\gamma(\theta(x_1,x_2))+\int\limits_0^s f(\eta_1(\delta,x_1,x_2),\eta_2(\delta,x_1,x_2),u(\delta,x_1,x_2))d\delta. \tag{1.9}$$

**Л е м м а 1.1.** *Непрерывно дифференцируемое решение системы интегральных уравнений* (1.6), (1.7), (1.9) *дает решение задачи Коши* (1.1)–(1.2).

При доказательстве леммы в работе [4] было выведено основное условие разрешимости. Для вывода этого условия проведем следующие выкладки: продифференцируем первое и второе уравнение (1.8) по $x_1$ и $x_2$. Получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial x_1}&=1-a_1\frac{\partial\omega}{\partial x_1}-\int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)}\left(\frac{\partial a_1}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_1}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial x_1}+\frac{\partial a_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)d\delta,\\ \frac{\partial\theta}{\partial x_2}&=-a_1\frac{\partial\omega}{\partial x_2}-\int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)}\left(\frac{\partial a_1}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial x_2}+\frac{\partial a_1}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)d\delta.\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}\varphi'\frac{\partial\theta}{\partial x_1}&=-a_2\frac{\partial\omega}{\partial x_1}-\int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)}\left(\frac{\partial a_2}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)d\delta,\\ \varphi'\frac{\partial\theta}{\partial x_2}&=1-a_2\frac{\partial\omega}{\partial x_2}-\int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)}\left(\frac{\partial a_2}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial x_2}+\frac{\partial a_2}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)d\delta.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Умножим первое уравнение системы (1.10) на $a_1$, второе – на $a_2$, затем сложим полученные выражения. Будем иметь:

$$\begin{aligned}\left(a_1\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\right)+a_1\left(a_1\frac{\partial\omega}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial\omega}{\partial x_2}-1\right)=-\int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)}\left(\frac{\partial a_1}{\partial\eta_1}\left(a_1\frac{\partial\eta_1}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial\eta_1}{\partial x_2}\right)+\right.\\ \left.+\frac{\partial a_1}{\partial\eta_2}\left(a_1\frac{\partial\eta_2}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial\eta_2}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial a_1}{\partial u}\left(a_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right)d\delta.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Умножим первое уравнение системы (1.11) на $a_1$, второе – на $a_2$, затем сложим полученные выражения. Получим:

$$\begin{aligned}\varphi'\left(a_1\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\right)+a_2\left(a_1\frac{\partial\omega}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial\omega}{\partial x_2}-1\right)=-\int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)}\left(\frac{\partial a_2}{\partial\eta_1}\left(a_1\frac{\partial\eta_1}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial\eta_1}{\partial x_2}\right)+\right.\\ \left.+\frac{\partial a_2}{\partial\eta_2}\left(a_1\frac{\partial\eta_2}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial\eta_2}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial a_2}{\partial u}\left(a_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right)d\delta.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Обозначим

$$W(\zeta)=a_1\frac{\partial\zeta}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial\zeta}{\partial x_2}.$$

Мы получим следующую систему:

$$W(\theta) + a_1\left(a_1\frac{\partial\omega}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial\omega}{\partial x_2} - 1\right) = -\int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)}\left(\frac{\partial a_1}{\partial\eta_1}W(\eta_1) + \frac{\partial a_1}{\partial\eta_2}W(\eta_2) + \frac{\partial a_1}{\partial u}W(u)\right)d\delta,$$

$$\varphi' W(\theta) + a_2\left(a_1\frac{\partial\omega}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial\omega}{\partial x_2} - 1\right) = -\int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)}\left(\frac{\partial a_2}{\partial\eta_1}W(\eta_1) + \frac{\partial a_2}{\partial\eta_2}W(\eta_2) + \frac{\partial a_2}{\partial u}W(u)\right)d\delta. \tag{1.14}$$

Система (1.14) разрешима, когда

$$J = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ \varphi' & a_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.15}$$

Введем обозначения:

$$\omega_{xi} = \frac{\partial\omega}{\partial x_i},\ \theta_{xi} = \frac{\partial\theta}{\partial x_i}, u_{xi} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \eta_{ixj} = \frac{\partial\eta_i}{\partial x_j},\ a_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial\eta_j},\ a_{iu} = \frac{\partial a_i}{\partial u}, f_u = \frac{\partial f}{\partial u}, f_i = \frac{\partial f}{\partial\eta_i},$$

$$(i, j = 1, 2).$$

Далее запишем систему уравнений с использованием таких обозначений:

$$u\left(s, x_1, x_2\right) = \gamma\left(\theta\left(x_1, x_2\right)\right) + \int\limits_0^s f\left(\eta_1\left(\delta, x_1, x_2\right), \eta_2\left(\delta, x_1, x_2\right), u\left(\delta, x_1, x_2\right)\right)d\delta, \tag{1.16}$$

$$u_{xj} = \gamma'\left(\theta\left(x_1, x_2\right)\right)\theta_{xj} + \int\limits_0^s\left(\sum_{i=1}^2 f_i\eta_{ixj} + f_u u_{xj}\right)d\delta, \tag{1.17}$$

$$\eta_j = x_j - \int\limits_s^{\omega(x_1,x_2)} a_j\left(\eta_1\left(\delta, x_1, x_2\right), \eta_2\left(\delta, x_1, x_2\right), u\left(\delta, x_1, x_2\right)\right)d\delta, \tag{1.18}$$

$$\eta_{lxk} = \delta_k^l - a_l\omega_{xk} - \int\limits_s^{\omega(x_1,x_2)}\left(\sum_{i=1}^2 a_{li}\eta_{ixk} + a_{lu}u_{xk}\right)d\delta, \tag{1.19}$$

$$\omega = \int\limits_{\varphi(x_1)}^{x_2}\omega_{x2}dx_2, \tag{1.20}$$

$$\omega_{x1} = J^{-1}\left(-\varphi' + \int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)}\left(\varphi'\left(\sum_{i=1}^2 a_{1i}\eta_{ix1} + a_{1u}u_{x1}\right) - \left(\sum_{i=1}^2 a_{2i}\eta_{ix1} + a_{2u}u_{x1}\right)\right)d\delta\right), \tag{1.21}$$

$$\omega_{x2} = J^{-1}\left(1 + \int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)}\left(\varphi'\left(\sum_{i=1}^2 a_{1i}\eta_{ix2} + a_{1u}u_{x2}\right) - \left(\sum_{i=1}^2 a_{2i}\eta_{ix2} + a_{2u}u_{x2}\right)\right)d\delta\right), \tag{1.22}$$

$$\theta = x_1 - \int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)} a_1\left(\eta_1\left(\delta,x_1,x_2\right),\eta_2\left(\delta,x_1,x_2\right),u\left(\delta,x_1,x_2\right)\right)d\delta, \tag{1.23}$$

$$\theta_{xj} = J^{-1}\Bigg((-1)^{j+1}a_{3-j} + \int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)}\Bigg(a_1\Bigg(\sum_{i=1}^{2} a_{2i}\eta_{ixj} + a_{2u}u_{xj}\Bigg) - a_2\Bigg(\sum_{i=1}^{2} a_{1i}\eta_{ixj} + a_{1u}u_{xj}\Bigg)\Bigg)d\delta\Bigg), \tag{1.24}$$

где $j,l,k = 1,2$, $\delta_k^l$ – символ Кронекера. Уравнение (1.16) получено интегрированием уравнения (1.5) в пределах от $0$ до $s$ с учетом начальных данных (1.6). Уравнения (1.17) получены дифференцированием уравнения (1.9) по $x_1$ и $x_2$, соответственно. Уравнения (1.18) получены интегрированием уравнений (1.3) и (1.4) соответственно в пределах от $s$ до $\omega(x_1,x_2)$. Уравнения (1.19) получены дифференцированием первого и второго уравнений (1.7) по $x_1$ и $x_2$, соответственно. Уравнение (1.20) получено интегрирование равенства $\omega_{x2} = \frac{\partial\omega}{\partial x_2}$ по $Ox_2$ от $\varphi(x_1)$ до $x_2$. Уравнения (1.21) и (1.24) при $j=1$ получены решением системы уравнений относительно $\omega_{x1}$ и $\theta_{x1}$, состоящей из первого уравнения (1.10) и первого уравнения (1.11). Уравнения (1.22) и (1.24) при $j=2$ получены решением системы уравнений относительно $\omega_{x2}$ и $\theta_{x2}$, состоящей из второго уравнения (1.10) и второго уравнения (1.11). Уравнение (1.23) — первое уравнение (1.8).

Так как при доказательстве существования решения системы интегральных уравнений (1.16) – (1.24), производные рассматриваются как новые неизвестные функции, введем соответствующие обозначения:

$$u(s,x_1,x_2) = U(s,x_1,x_2),\ \omega = W_1,\ \theta = W_2,\ \theta_{xi} = W_{2i},\ u_{xi} = U_i,\ \omega_{xi} = W_{1i},\ \eta_i = H_i,$$

$$\eta_{ixj} = H_{ij},\ \mu_1 = x_1 - H_1,\ \mu_2 = x_1 - W_2,\ \mu_{ixj} = \mu_{ij},\ (i,j = 1,2).$$

С ними основная резольвентная система запишется следующим образом:

$$U\left(s,x_1,x_2\right) = \gamma\left(W_2\left(x_1,x_2\right)\right) + \int\limits_0^s f\left(x_1-\mu_1, H_2\left(\delta,x_1,x_2\right), U\left(\delta,x_1,x_2\right)\right)d\delta, \tag{1.25}$$

$$U_1 = \gamma'\left(W_2\left(x_1,x_2\right)\right)W_{21} + \int\limits_0^s \left(f_1(1-\mu_{11}) + f_2H_{21} + f_UU_1\right)d\delta, \tag{1.26}$$

$$U_2 = \gamma'\left(W_2\left(x_1,x_2\right)\right)W_{22} + \int\limits_0^s \left(f_1(-\mu_{12}) + f_2H_{22} + f_UU_2\right)d\delta, \tag{1.27}$$

$$\mu_1 = \int\limits_s^{W_1(x_1,x_2)} a_1\left(x_1-\mu_1, H_2, U\left(\delta,x_1,x_2\right)\right)d\delta, \tag{1.28}$$

$$H_2 = x_2 - \int\limits_s^{W_1(x_1,x_2)} a_2\left(x_1-\mu_1, H_2, U\left(\delta,x_1,x_2\right)\right)d\delta, \tag{1.29}$$

$$\mu_{11} = a_1 W_{11} + \int\limits_{s}^{W_1(x_1,x_2)} (a_{11}(1-\mu_{11}) + a_{12}H_{21} + a_{1U}U_1)\,d\delta, \tag{1.30}$$

$$\mu_{12} = a_1 W_{12} + \int\limits_{s}^{W_1(x_1,x_2)} (a_{11}(-\mu_{12}) + a_{12}H_{22} + a_{1U}U_2)\,d\delta, \tag{1.31}$$

$$H_{21} = -a_2 W_{11} - \int\limits_{s}^{W_1(x_1,x_2)} (a_{21}(1-\mu_{11}) + a_{22}H_{21} + a_{2U}U_1)\,d\delta, \tag{1.32}$$

$$H_{22} = 1 - a_2 W_{12} - \int\limits_{s}^{W_1(x_1,x_2)} (a_{21}(-\mu_{12}) + a_{22}H_{22} + a_{2U}U_2)\,d\delta, \tag{1.33}$$

$$W_1 = \int\limits_{\varphi(x_1)}^{x_2} W_{12}dx_2, \tag{1.34}$$

$$\mu_2 = \int\limits_{0}^{W_1(x_1,x_2)} a_1\left(x_1-\mu_1, H_2, U\left(\delta, x_1, x_2\right)\right)d\delta, \tag{1.35}$$

$$W_{11} = J^{-1}\Bigg(-\varphi' + \int\limits_{0}^{W_1(x_1,x_2)} \Big(\varphi'\left(a_{11}(1-\mu_{11}) + a_{12}H_{21} + a_{1U}U_1\right) - \\ - \left(a_{21}(1-\mu_{11}) + a_{22}H_{21} + a_{2U}U_1\right)\Big)d\delta\Bigg), \tag{1.36}$$

$$W_{12} = J^{-1}\Bigg(1 + \int\limits_{0}^{W_1(x_1,x_2)} \Big(\varphi'\left(a_{11}(-\mu_{12}) + a_{12}H_{22} + a_{1U}U_2\right) - \\ - \left(a_{21}(-\mu_{12}) + a_{22}H_{22} + a_{2U}U_2\right)\Big)d\delta\Bigg), \tag{1.37}$$

$$1-\mu_{21} = J^{-1}\Bigg(a_2 + \int\limits_{0}^{W_1(x_1,x_2)} \Big(a_1\left(a_{21}(1-\mu_{11}) + a_{22}H_{21} + a_{2U}U_1\right) - \\ - a_2\left(a_{11}(1-\mu_{11}) + a_{12}H_{21} + a_{1U}U_1\right)\Big)d\delta\Bigg), \tag{1.38}$$

$$-\mu_{22} = J^{-1}\Bigg(-a_1 + \int\limits_{0}^{W_1(x_1,x_2)} \Big(a_1\left(a_{21}(-\mu_{12}) + a_{22}H_{22} + a_{2U}U_2\right) - \\ - a_2\left(a_{11}(-\mu_{12}) + a_{12}H_{22} + a_{1U}U_2\right)\Big)d\delta\Bigg). \tag{1.39}$$

В системе (1.25) – (1.39) $U$, $U_1$, $U_2$, $\mu_1$, $H_2$, $\mu_{11}$, $\mu_{12}$, $H_{21}$, $H_{22}$, $W_1$, $W_{11}$, $W_{12}$, $\mu_2$, $\mu_{21}$ $\mu_{22}$ новые неизвестные функции.

Несмотря на достаточно сложный вид, резольвентная система (1.25) – (1.39) может быть исследована с помощью классического метода последовательных приближений. Принципиальным преимуществом этой системы является то, что в ней явно выписаны все взаимосвязи между известными и неизвестными величинами. А, следовательно, непосредственные оценки дают конкретное выражение для величины $\varepsilon$ , характеризующей область определения решения. Весь набор условий, обеспечивающих существование решения задачи (1.1) – (1.2) в исходных координатах, сформулирован в нижеследующей теореме. При этом, кроме введенных выше, использовано обозначение:

$$X_2 = \max_{x_1 \in (-\infty;+\infty)} \left\{ \left| \varphi(x_1) - \beta_0 \right|, \left| \varphi(x_1) + \beta_0 \right| \right\}.$$

**Теорема 1.3.** *Пусть* $a_1(x_1, x_2, z)$ , $a_2(x_1, x_2, z)$ , $f(x_1, x_2, z)$ *непрерывно дифференцируемые функции по всем аргументам в области* $Q_\rho$ *;* $L$ *— линия, несущая начальные данные:* $x_2 = \varphi(x_1)$ *;* $\varphi(x_1), \gamma(x_1) \in \overline{C}^2(-\infty; +\infty)$ *; выполнено основное условие разрешимости* $|J| \geq K_J$ *. Тогда существует такое число* $\varepsilon_0 > 0$ *, что при* $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *, задача Коши* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение* $z \in C^1(\Omega_\varepsilon)$ *, которое при* $s = \omega$ *совпадает с функцией* $u(s, x_1, x_2) = U(s, x_1, x_2)$ *, определяемой из резольвентной системы* (1.25) – (1.39).

**Замечание 1.2.** *Число* $\varepsilon_0$ *определяется алгебраическим образом через известные и заданные функции.*

# Список литературы


1. Алексеенко С. Н., “Применение метода дополнительного аргумента к исследованию разрешимости "одноосной"задачи Коши для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2009, № 11, 40–49.

2. Алексеенко С. Н., “Доказательство сходимости последовательных приближений, построенных с помощью метода дополнительного аргумента в "одноосной"задаче Коши для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2010, № 12, 51–57.

3. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н., “Условия целесообразности применения метода дополнительного аргумента к квазилинейным дифференциальным уравнениям первого порядка в частных производных общего вида”, *Асимптотические топологические и компьютерные методы в математике*, Труды межд. научн. конф. посвящ. 70-летию академика М. И. Иманалиева (Бишкек, КГНУ), Сер.3. Естеств. и техн. науки, Матем. науки. Информ. и инф. технологии, Вестник КГНУ, 2001, 6–7.

4. Алексеенко С. Н., Платонова Л. Е., “Построение основной разрешающей системы интегральных уравнений для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка в случае параметрического задания начальных данных”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2011, № 13, 61–70.

5. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н., “К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени”, *Докл. АН*, **329**:5 (1993), 543–546.

6. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н., “К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени”, *Докл. РАН*, **379**:1 (2001), 16–21.

7. Иманалиев М. И., Панков П. С., Алексеенко С. Н., “Метод дополнительного аргумента”, *Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. Специальный выпуск*, 2006, № 1, 60–64.

# A first-order partial differential equation of the common type with initial data in Cartesian coordinates on an infinite length line

© **S. N. Alekseenko**[3], **L. E. Platonova**[4]

**Abstract.** The Cauchy problem for a quasi-linear first order partial differential equation is studied in case when initial data is given on an infinite length smooth line with non-vertical gradient. A system in 15 integral equations, a solution of which gives a solution of the considered Cauchy problem in original coordinates, is constructed. Local solvability conditions, which do not include in itself assumptions about behavior of the characteristic lines, are presented in a theorem announced here.

**Key Words:** quasi-linear first order partial differential equation, Cauchy problem, method of an additional argument.

[3] The professor of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; sn-alekseenko@yandex.ru

[4] The assistant lecture of the mathematical analysis chair, Nizhniy Novgorod State Pedagogical University, Nizhniy Novgorod; fluff13@yandex.ru